

УДК 517.51

А. Ф. Конограй (Ін-т математики НАН України, Київ)**О. В. Федунік-Яремчук** (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)**ОЦІНКИ АПРОКСИМАТИВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАСІВ $B_{p,\theta}^\Omega$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ІЗ ЗАДАНОЮ МАЖОРАНТОЮ МІШАНИХ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ**

We obtain exact order estimates of approximation of classes $B_{p,\theta}^\Omega$ of periodic functions of several variables in the space L_q by using linear operators subjected to some conditions for some means of parameters p and q .

Одержано точні за порядком оцінки наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q за допомогою лінійних операторів, які підпорядковані певним умовам, для деяких значень параметрів p та q .

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \leq p < \infty$, — простір 2π -періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0; 2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$, в якому норма визначається наступним чином

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L_\infty(\pi_d)$ — простір 2π -періодичних по кожній змінній суттєво обмежених функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$ з нормою

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Всюди далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

© А. Ф. Конограй, О. В. Федунік-Яремчук, 2013

Для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, і $t = (t_1, \dots, t_d)$, $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$, розглянемо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=\overline{1, d}}} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p,$$

де $l \in \mathbb{N}$, $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_1}^l \dots \Delta_{h_d}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\dots (\Delta_{h_1}^l f(x)))$ — мішана різниця порядку l з кроком h_j за змінною x_j і

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^l (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє такі умови:

- 1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;
- 2) $\Omega(t)$ не спадає по кожній змінній;
- 3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \leq \left(\prod_{j=1}^d m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$;
- 4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l) , які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S) , якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l) , якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l) , якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i , $i \neq j$.

Отже, нехай $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови 1 – 4. Тоді, згідно з означенням [2]

$$B_{p,\theta}^\Omega = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \leq 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left\{ \int_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)},$$

(запис $t > 0$ для $t = (t_1, \dots, t_d)$ рівносильний $t_j > 0, j = \overline{1, d}$).

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ класи $B_{p,\theta}^\Omega$ співпадають з класами H_p^Ω , які були розглянуті М.М. Пустовойтовим в [3].

Для подальших міркувань нам буде зручно користуватися еквівалентним (з точністю до абсолютних сталих) означенням класів $B_{p,\theta}^\Omega$.

Нехай $V_n(t)$ позначає ядро Валле Пуссена порядку $2n - 1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n} \right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \right)$$

і для $f \in L_p(\pi_d), 1 \leq p \leq \infty$, через $A_s(f, x)$ позначимо згортку

$$A_s(f, x) = f * A_s.$$

Отже, якщо $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови 1 – 4, (S) і (S_l) , то з точністю до абсолютних сталих класи $B_{p,\theta}^\Omega$ можна означити наступним чином

$$B_{p,\theta}^\Omega = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}, \quad (1)$$

де $1 \leq \theta < \infty$ та

$$B_{p,\infty}^\Omega = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_s \frac{\|A_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \leq 1 \right\}, \quad (2)$$

тут і надалі $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$.

Зазначимо, що рівності (1) і (2) були отримані в роботах [4] і [3] відповідно.

Відмітимо, що при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}$, $0 < r_j < l$, класи $B_{p,\theta}^\Omega$ є аналогами відомих класів Бесова $B_{p,\theta}^r$ (див., наприклад, [5]).

Нижче ми будемо розглядати класи $B_{p,\theta}^\Omega$, які визначаються функцією $\Omega(t)$ деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = \begin{cases} \prod_{j=1}^d \frac{t_j^{r_j}}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0, j = \overline{1, d}; \\ 0, & \text{якщо } \prod_{j=1}^d t_j = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тут і надалі розглядаються логарифми за основою 2, крім того

$$\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+ = \max \left\{ 1, \log \frac{1}{t_j} \right\}.$$

Також будемо вважати, що $b_j < r_j$, $j = \overline{1, d}$, і $0 < r < l$, а значить для функції $\Omega(t)$ вигляду (3) виконуються властивості 1–4, а також умови (S) і (S_i).

А зараз наведемо означення величини, яка буде нами досліджуватись (див. [6]).

Для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$ означимо

$$d_M^B(F, L_q) = \inf_{G \in L_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f(\cdot) - Gf(\cdot)\|_q. \quad (4)$$

Через $L_M(B)_q$ тут позначено множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься в підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує число $B \geq 1$ таке, що для всіх векторів $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, виконується нерівність $\|Ge^{i(k, \cdot)}\|_2 \leq B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M , а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який визначається послідовністю $\{\lambda_m\}$ такою, що $|\lambda_m| \leq 1$ для всіх m .

На сьогодні відомо багато робіт, в яких досліджувалися величини $d_M^B(F, L_q)$ для тих чи інших класів функцій. Тут згадаємо роботи [7–11], в яких вивчалися величини (4) для класів функцій багатьох змінних $W_{p,\alpha}^r$, H_p^r , $B_{p,\theta}^r$ та H_p^Ω , і в яких можна ознайомитись з більш детальною бібліографією.

В даній роботі встановлюються точні за порядком оцінки величин $d_M^B(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$ при $(p, q) = (1, 1), (\infty, \infty)$. Одержані оцінки доповнюють результати отримані в роботі [12].

Наведемо кілька відомих тверджень, які будемо використовувати у подальших міркуваннях.

Кожному вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \{k = (k_1, \dots, k_d) : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = \overline{1, d}\}.$$

Для натурального N покладемо

$$\chi(N) = \left\{s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}, \Omega(2^{-s}) \geq \frac{1}{N}\right\},$$

$$Q(N) = \bigcup_{s \in \chi(N)} \rho(s).$$

Враховуючи (3) множину $\chi(N)$ можна означити так:

$$\chi(N) = \left\{s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}, \prod_{j=1}^d 2^{r s_j} s_j^{b_j} \leq N\right\}.$$

Далі, нехай

$$\chi^\perp(N) = \mathbb{N}^d \setminus \chi(N),$$

$$\Theta(N) = \left\{ s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}, \frac{1}{2^l N} \leq \Omega(2^{-s}) < \frac{1}{N} \right\}.$$

В прийнятих позначеннях мають місце наступні твердження, які встановлені М. М. Пустовойтовим.

Лема 1[11]. *Кількість елементів множини $Q(N)$ рівна за порядком:*

$$|Q(N)| \asymp N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r} + d - 1}.$$

Тут і далі для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\forall N \in \mathbb{N} \mu_1(N) \leq C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо також, що всі сталі $C_i, i = 1, 2, \dots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору \mathbb{R}^d .

Лема 2 [13]. *Для кількості елементів множини $\Theta(N)$ має місце співвідношення*

$$|\Theta(N)| \asymp (\log N)^{d-1}.$$

Лема 3 [13]. *Для функції $\Omega(t)$, яка визначена рівністю (3), при $r > 0, 0 < p < \infty$ має місце співвідношення*

$$\sum_{s \in \chi^\perp(N)} (\Omega(2^{-s}))^p \ll \sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^p.$$

Перш ніж перейти до викладу отриманих результатів покладемо $M = |Q(N)|$. Тоді внаслідок леми 1, отримаємо

$$M \asymp N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r} + d - 1},$$

$$\log M \asymp \log N, \quad N \asymp M^r (\log M)^{b_1 + \dots + b_d - (d-1)r}.$$

Має місце.

Теорема 1. *Нехай $1 \leq \theta < \infty$, а $\Omega(t)$ задана формулою (3). Тоді при $0 < r < l$ має місце рядкова рівність*

$$d_M^B(B_{1,\theta}^\Omega, L_1) \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)(r+1-\frac{1}{\theta})}. \quad (5)$$

Доведення. Встановимо в (5) оцінку зверху. З цією метою розглянемо наближення функції $f \in B_{1,\theta}^\Omega$ поліномом виду

$$V_{Q(N)}(x) = \sum_{s \in \chi(N)} A_s(f, x).$$

Оператор G , який ставить у відповідність функції f поліном $V_{Q(N)}(x)$, належить до $L_M(1)_q$, $1 \leq q \leq \infty$. Врахувавши, що $f(x) = \sum_s A_s(f, x)$ [14, с. 304], і скориставшись нерівністю Мінковського, матимемо

$$\begin{aligned} \|f(\cdot) - V_{Q(N)}(\cdot)\|_1 &= \left\| \sum_{s \in \chi^+(N)} A_s(f, \cdot) \right\|_1 \leq \sum_{s \in \chi^+(N)} \|A_s(f, \cdot)\|_1 = \\ &= \sum_{s \in \chi^+(N)} \Omega^{-1}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_1 \Omega(2^{-s}) = I_1. \end{aligned}$$

Щоб оцінити I_1 , розглянемо два випадки.

Нехай спочатку $1 < \theta < \infty$. Застосовуючи до I_1 нерівність Гельдера з показником θ , а також використовуючи послідовно леми 3 і 2 одержимо

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left(\sum_{s \in \chi^+(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \chi^+(N)} (\Omega(2^{-s}))^{\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll \\ &\ll \|f\|_{B_{1,\theta}^\Omega} \left(\sum_{s \in \chi^+(N)} (\Omega(2^{-s}))^{\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll \\ &\ll \left(\sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^{\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll N^{-1} \left(\sum_{s \in \Theta(N)} 1 \right)^{1-\frac{1}{\theta}} = \\ &= N^{-1} |\Theta(N)|^{1-\frac{1}{\theta}} \asymp N^{-1} (\log N)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} \asymp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)r} (\log M)^{(d-1)\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)} = \\ &= M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)\left(r + 1 - \frac{1}{\theta}\right)}. \end{aligned}$$

Нехай тепер $\theta = 1$, матимемо

$$\begin{aligned} I_1 &\leq N^{-1} \sum_{s \in \chi^\perp(N)} \Omega^{-1}(2^{-s}) \|A_s(f, \cdot)\|_1 \ll \\ &\ll N^{-1} \|f\|_{B_{1,1}^\Omega} \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)r}. \end{aligned}$$

Таким чином, оцінка зверху в (5) встановлена.

Перейдемо до встановлення відповідної оцінки знизу величини $d_M^B(B_{1,\theta}^\Omega, L_1)$. При цьому розглянемо функцію, яка аналогічна функції з прикладу 7 роботи [7].

Нехай N достатньо велике. За допомогою аналогічних міркувань, що і в [15], можна показати, що існує множина $\Theta'(N) \subset \Theta(N)$ така, що для $s = (s_1, \dots, s_d) \in \Theta'(N)$ будуть виконуватись співвідношення

$$s_j \asymp \log N, \quad j = \overline{1, d} \quad \text{і} \quad |\Theta'(N)| \asymp (\log N)^{d-1}.$$

Покладемо

$$v = \lceil |\Theta'(N)|^{\frac{1}{d}} \rceil,$$

де $[a]$ — ціла частина числа a .

Далі, розіб'ємо куб π_d на v^d кубів з довжиною ребра $\frac{2\pi}{v}$. Встановимо взаємнооднозначну відповідність між множиною $\overline{\Theta}(N) \subset \Theta'(N)$, $|\overline{\Theta}(N)| = v^d$ і утвореною множиною кубів. При цьому через $x^s \in \pi_d$ позначимо центр куба, що відповідає вектору $s \in \overline{\Theta}(N)$, і покладемо

$$u = 2^{\lceil \frac{1}{d} \log |\Theta'(N)| \rceil} \asymp (\log N)^{\frac{d-1}{d}}.$$

Означимо через $K_n(t)$ ядро Фейєра порядку n , тобто

$$K_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kt.$$

Через k^s позначимо вектор $k^s = (k_1^{s_1}, \dots, k_d^{s_d})$, де

$$k_j^{s_j} = \begin{cases} 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}, & s_j \geq 2; \\ 1, & s_j = 1, j = \overline{1, d}. \end{cases}$$

Нехай $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$. Тоді існують число N і множина $\tilde{\Theta}(N) \subset \bar{\Theta}(N)$ такі, що

$$|\tilde{\Theta}(N)| \geq \frac{1}{2} |\bar{\Theta}(N)|,$$

і в кожному $\rho(s)$, $s \in \tilde{\Theta}(N)$, знайдуться куби з центрами в k^s і довжинами ребер $2u$ такі, що для функції

$$g_1(x) = \sum_{s \in \tilde{\Theta}(N)} e^{i(k^s, x)} \prod_{j=1}^d K_u(x_j - x_j^s)$$

і деякого вектора y^* має місце оцінка

$$\|g_1(x + y^*) - Gg_1(x + y^*)\|_1 \gg (\log M)^{d-1}. \quad (6)$$

Доведення оцінки (6) проводиться за допомогою тих же міркувань, які використовувались при доведенні відповідної оцінки в прикладі 7 роботи [7].

Тепер повертаємось безпосередньо до оцінки знизу величини $d_M^B(B_{1,\theta}^\Omega, L_1)$. Розглянемо функцію

$$g_2(x) = C_3 N^{-1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} g_1(x), \quad C_3 > 0,$$

і оцінимо $\|g_2\|_{B_{1,\theta}^\Omega}$.

Враховуючи, що внаслідок вибору параметра u

$$\|A_s(g_1, \cdot)\|_1 \ll \left\| \prod_{j=1}^d K_u(x_j) \right\|_1 \leq C_4, \quad \forall s \in \tilde{\Theta}(N), \quad C_4 > 0,$$

будемо мати

$$\|g_2\|_{B_{1,\theta}^\Omega} = \left(\sum_{s \in \tilde{\Theta}(N)} \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \|A_s(g_2, \cdot)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\begin{aligned} &\ll N^{-1}(\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \tilde{\Theta}(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(g_1, \cdot)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \\ &\ll N^{-1}(\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \tilde{\Theta}(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \\ &\asymp (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} |\tilde{\Theta}(N)|^{\frac{1}{\theta}} \asymp 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким чином, із (7) робимо висновок, що функція $g_2 \in B_{1,\theta}^\Omega$, $1 \leq \theta < \infty$, з відповідною сталою $C_3 > 0$.

Далі, внаслідок (6), існує вектор y^* такий, що

$$\begin{aligned} &\|g_2(x + y^*) - Gg_2(x + y^*)\|_1 \gg \\ &\gg N^{-1}(\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \|g_1(x + y^*) - Gg_1(x + y^*)\|_1 \gg \\ &\gg N^{-1}(\log N)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} \asymp M^{-r}(\log M)^{-b_1-\dots-b_d+(d-1)(r+1-\frac{1}{\theta})}. \end{aligned}$$

Оцінку знизу встановлено. Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Нехай $1 \leq \theta < \infty$, а $\Omega(t)$ задана формулою (3). Тоді при $0 < r < l$ має місце порядкова рівність

$$d_M^B(B_{\infty,\theta}^\Omega, L_\infty) \asymp M^{-r}(\log M)^{-b_1-\dots-b_d+(d-1)(r+1-\frac{1}{\theta})}. \quad (8)$$

Доведення. Оцінка зверху в (8) встановлюється аналогічно, як і оцінка зверху в теоремі 1.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. При цьому використаємо міркування аналогічні до тих, які використовувалися у прикладі 2 роботи [7].

Розглянемо функцію

$$g_3(x) = \sum_{s \in \Theta'(N)} \mathcal{K}^s(x),$$

де множина $\Theta'(N)$ означена вище, а

$$\mathcal{K}^s(x) = e^{i(k^s, x)} \prod_{j=1}^d K_{2^{s_j-2}}(x_j),$$

$K_n(t)$ — ядро Фейєра.

Припустимо, що оператор G належить $\mathcal{L}_M(B)_\infty$. В роботі [12] встановлено, що існує вектор $y^* = (y_1^*, \dots, y_d^*)$ такий, що

$$\|g_3(x - y^*) - Gg_3(x - y^*)\|_\infty \gg M. \quad (9)$$

Розглянемо функцію

$$g_4(x) = C_5 N^{-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{-1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} g_3(x), \quad C_5 > 0.$$

Покажемо, що функція g_4 при відповідному виборі сталої C_5 належить до класу $B_{\infty, \theta}^\Omega$, $1 \leq \theta < \infty$.

Дійсно, скориставшись співвідношенням

$$\|A_s(g_3, \cdot)\|_\infty \ll \|\mathcal{K}^s(\cdot)\|_\infty \asymp 2^{\|s\|_1},$$

де $\|s\|_1 = s_1 + \dots + s_d$, $s_j \in \mathbb{N}$, будемо мати

$$\begin{aligned} \|g_4\|_{B_{\infty, \theta}^\Omega} &= \left(\sum_{s \in \Theta'(N)} \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \|A_s(g_4, \cdot)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \\ &\ll N^{-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{-1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \times \\ &\quad \times \left(\sum_{s \in \Theta'(N)} \Omega^{-\theta} (2^{-s}) \|A_s(g_3, \cdot)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp \\ &\asymp \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{-1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{s \in \Theta'(N)} 2^{\|s\|_1 \theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} = I_2. \end{aligned}$$

Далі, враховуючи, що для $s \in \Theta'(N) \subset \Theta(N)$ виконуються співвідношення

$$2^{\|s\|_1} \asymp N^{\frac{1}{r}} \prod_{j=1}^d s_j^{-\frac{b_j}{r}} \text{ і } s_j \asymp \log N, \quad j = \overline{1, d},$$

будемо мати

$$\begin{aligned} I_2 &\asymp \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} \right)^{-1} (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} \times \\ &\times N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r}} |\Theta'(N)|^{\frac{1}{\theta}} \asymp \\ &\asymp (\log N)^{-\frac{d-1}{\theta}} (\log N)^{\frac{d-1}{\theta}} = 1. \end{aligned}$$

Тепер, скориставшись співвідношенням (9), отримаємо

$$\begin{aligned} &\|g_4(x - y^*) - Gg_4(x - y^*)\|_\infty \gg \\ &\gg N^{-1} \left(N^{\frac{1}{r}} (\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \dots - \frac{b_d}{r} + d-1} \right)^{-1} (\log N)^{(d-1)\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)} \times \\ &\times \|g_3(x - y^*) - Gg_3(x - y^*)\|_\infty \gg \\ &\gg M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)r} M^{-1} (\log M)^{(d-1)\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)} M = \\ &= M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)(r+1 - \frac{1}{\theta})}. \end{aligned}$$

Оцінку знизу встановлено. Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. У випадку $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^r$, результати теорем 1 і 2 (для класів $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$) отримані А. С. Романюком в [9, 10].

Зауваження 2. Точні за порядком оцінки величин $d_M^B(H_p^\Omega, L_q)$ при значеннях параметрів p і q , які задовольняють умовам теорем 1 і 2, отримані М. М. Пустовойтовим в [11].

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1956.— **5**.— С. 483–522.
2. Sun Yongsheng, Wang Heping. Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1997.— **219**.— С. 356–377.
3. Пустовойтов Н.Н. Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math.— 1994.— **20**.— С. 35–48.

4. Стасюк С.А., Федуник О.В. Аппроксимативні характеристики класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн.— 2006.— **58**, № 5.— С. 692–704.
5. Лизоркин П.И., Никольский С.М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова.— 1989.— **187**.— С. 143–161.
6. Темляков В.Н. Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР.— 1982.— **267**, № 2.— С. 314–317.
7. Темляков В.Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1989.— **189**.— С. 138–168.
8. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1986.— **178**.— С. 1–112.
9. Романюк А.С. Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сб. — 2008.— **199**, № 2.— С. 93–114.
10. Романюк А.С. Поперечники и наилучшие приближения классов Бесова $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных // Anal. Math.— 2011.— **37**.— С. 181–213.
11. Пустовойтов Н.Н. Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители // Anal. Math.— 2008.— **34**.— С. 187–224.
12. Конограй А.Ф. Оценки аппроксимативных характеристик классов $B_{p,\theta}^\Omega$ функций многих переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. — 2013.— В печати.
13. Пустовойтов Н.Н. Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки.— 1999.— **65**, № 1.— С. 107–117.
14. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1977.— 456 с.
15. Пустовойтов Н.Н. О приближении и характеристизации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида // Anal. Math.— 2003.— **29**.— С. 201–218.