Карпатські математичні публікації. Т.2, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №.1

УДК 512.53

Волошина Т.В.

АНАЛОГ ЛЕМИ БЕРНСАЙДА ДЛЯ СКІНЧЕННОЇ ІНВЕРСНОЇ СИМЕТРИЧНОЇ НАПІВГРУПИ

Волошина Т.В. *Аналог леми Бернсайда для скінченної інверсної симетричної напівгрупи* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №1. — С. 15–23.

Отримано аналог леми Бернсайда для транзитивних підстановочних представлень скінченної інверсної симетричної напівгрупи.

Вступ

Нехай S – інверсна напівгрупа. Через ω будемо позначати так званий *природний частковий порядок на* S*:* $a\omega b \Leftrightarrow aa^{-1} = ab^{-1} \Leftrightarrow a^{-1}a = a^{-1}b$. Для зручності іноді будемо вживати для ω позначення $\leq$. *Замиканням* $H\omega$ *множини* $H \subseteq S$ називається множина $H\omega := \{h \in S : \ \exists \pi \in H \ \ \pi\omega h\}$. Якщо $H\omega = H$, то H називається *замкненою множиною*.

Напівгрупу всіх часткових взаємнооднозначних відображень деякої множини X в саму себе будемо називати *інверсною симетричною напівгрупою на множині* X і позначати $IS(X)$ або IS_n, якщо $|X| = n$. Елементи напівгрупи $IS(X)$ називають *частковими підстановками множини* X. *Підстановочним зображенням* інверсної напівгрупи S називається довільний її гомоморфізм φ в інверсну симетричну напівгрупу $IS(X)$ на деякій множині X. Оскільки кожне ефективне зображення інверсної напівгрупи еквівалентне прямій сумі транзитивних, спочатку природно розглянути лише транзитивні підстановочні зображення.

Для замкненої інверсної піднапівгрупи H інверсної напівгрупи S розглянемо часткову праву конгруенцію $\pi_H := \left\{(s,t) \in S \times S \;\middle|\; st^{-1} \in H\right\}$. Класами еквівалентності цього відношення є множини $(Hs)\omega$, де $ss^{-1} \in H$, які будемо називати *правими* ω*–класами за замкненою інверсною піднапівгрупою* H. На множині X правих ω–класів за H дія $\varphi(S)$ визначається правилом: для $x \in X$ і $s \in S \quad x^{\varphi_H(s)} = (xs)\omega$. Зображення $\varphi : S \to IS(X)$ будемо називати *зображенням напівгрупи* S *на правих* ω*–класах за замкненою*

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20M18, 20M20, 20M30.

Ключові слова і фрази: лема Бернсайда, інверсна напівгрупа.

інверсною піднапівгрупою H. У роботі [1] довів, що кожне ефективне транзитивне зображення інверсної напівгрупи S еквівалентне зображенню напівгрупи на множині правих ω–класів за деякою замкненою інверсною піднапівгрупою.

Нехай $N = \{1, 2, \dots n\}$, IS_n — інверсна симетрична напівгрупа на множині N, $S(M)$ — симетрична група на множині M. Для $\pi \in IS_n$ через $dom\,\pi$ і $ran\,\pi$ позначимо відповідно область визначення та область значень часткової підстановки π. *Рангом* часткової підстановки π будемо називати потужність її області визначення, а *дефектом* — кількість точок на яких π не визначена. Ранг і дефект часткової підстановки π будемо позначати $rank\,\pi$ і $def\,\pi$ відповідно.

Опис усіх замкнених інверсних піднапівгруп інверсної симетричної напівгрупи дає теорема.

Теорема 1 ([1]). *Для кожної підмножини* $M \subseteq N$ *і підгрупи* $G \leq S(M)$ *піднапівгрупа* $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$ *буде замкненою інверсною піднапівгрупою в* IS_n. *З іншого боку, кожна замкнена інверсна піднапівгрупа в* IS_n *має такий вигляд.*

Для замкненої інверсної піднапівгрупи $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$ позначимо $|M| = k$, $|G| = m$, $[S(M) : G] = \frac{k!}{m} = r$. Кількість правих ω–класів напівгрупи IS_n за замкненою інверсною піднапівгрупою H позначимо $[IS_n : H]$.

Теорема 2 ([1]). *Кожний правий* ω*–клас інверсної напівгрупи* IS_n *за замкненою інверсною піднапівгрупою* $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$ *має вигляд* $(Hg)\omega$, *де* $g \in S(N)$, *і містить правий клас суміжності* Ag *групи* $S(N)$ *за підгрупою* $A = G \oplus S(\overline{M})$, *причому ця відповідність між правими* ω*–класами і класами суміжності за підгрупою* A *є взаємно однозначною.*

$$[IS_n : H] = \left[S(N) : G \oplus S(\overline{M})\right] = \frac{n!}{m \cdot (n-k)!} = C_n^k \cdot [S(M) : G] = C_n^k \cdot r.$$

Всі праві ω*–класи рівнопотужні піднапівгрупі* H.

Поняття, які використовуються без означення, можна знайти в [3].

Нехай $\varphi : IS_n \to IS(X)$ — підстановочне зображення напівгрупи IS_n на множині X правих ω–класів за замкненою інверсною піднапівгрупою H. Будемо розглядати конгруенцію $\varphi \circ \varphi^{-1} = \{(x, y) \in IS_n \times IS_n | \varphi(x) = \varphi(y)\}$ на множині елементів напівгрупи IS_n. Кількість класів еквівалентності цієї конгруенції для різних замкнених інверсних піднапівгруп H обчислено в [2].

Теорема 3 ([1]). *Зображення інверсної симетричної напівгрупи* IS_n *на множині правих* ω*–класів за замкненою інверсною піднапівгрупою* $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$ *буде точним тоді і тільки тоді, коли* $|M| = 1$. *Кожне точне ефективне транзитивне зображення напівгрупи* IS_n *еквівалентне стандартному зображенню* IS_n *частковими підстановками на множині* $\{1, 2, \dots, n\}$.

У цьому випадку $|\varphi(IS_n| = |IS_n| = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(C_n^i\right)^2 \cdot i!$.

Лема 1 ([2]). *Для замкненої інверсної піднапівгрупи* $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$, *де* $|M| = k$, *множина* $I_k = \{\pi \in IS_n | rank\,\pi < k\}$ *складає один клас еквівалентності конгруенції*

$\varphi\circ\varphi^{-1}$. Для кожного елемента $t\in I_k$ його образ $\varphi(t)$ — ніде невизначена часткова підстановка на множині правих ω–класів за замкненою інверсною піднапівгрупою $H=G\oplus IS_{\overline{M}}$.

Зауваження. *При $k=n,\ M=N$ і $H=G\leq S(N)$. За лемою 1, усі негрупові елементи IS_n діють як порожня підстановка. Тому $\varphi(IS_n)$ — група підстановок з нулем.*

1 Аналог леми Бернсайда

Позначимо через $\chi(\pi)$ кількість нерухомих точок часткової підстановки π.

Лема 2. *Для інверсної симетричної напівгрупи IS_n виконується рівність*

$$\sum_{\pi\in IS_n}\chi(\pi)+\frac{1}{n}\sum_{\pi\in IS_n}def\,\pi=|IS_n|\,. \tag{1}$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що $|IS_n|=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2\cdot k!$. Обчислимо $\frac{1}{n}\sum\limits_{\pi\in IS_n}def\,\pi$. Для цього розглянемо окремо елементи різних рангів. В елемента рангу k дефект дорівнює $n-k$. Кількість елементів рангу k у напівгрупі IS_n дорівнює $\left(C_n^k\right)^2\cdot k!$. Тому

$$\frac{1}{n}\sum_{\pi\in IS_n}def\,\pi=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{\pi\in IS_n\\ rank\pi=k}}def\,\pi=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\left(C_n^k\right)^2k!.$$

Для обчислення $\sum\limits_{\pi\in IS_n}\chi(\pi)$ розглянемо окремо елементи різних рангів. У елементів рангу k область визначення можна вибрати C_n^k способами. Для напівгрупи IS_n множини елементів рангу k з однією і тією ж областю визначення — рівнопотужні. Тому можна вибрати і зафіксувати якусь одну підмножину $L\subseteq N$ потужності k і знайти $\sum\limits_{\substack{\pi\in IS_n\\ dom\,\pi=L}}\chi(\pi)$.

Позначимо $St(i)=\{\pi\in IS_n|\ dom\,\pi=L,\ \pi(i)=i\}$. Тоді

$$\sum_{\substack{\pi\in IS_n\\ dom\pi=L}}\chi(\pi)=\sum_{i\in L}|St(i)|=|L|\cdot|St(i)|=k\cdot C_{n-1}^{k-1}\cdot(k-1)!=\frac{k}{n}\cdot C_n^k\cdot k!.$$

Оскільки підмножину $L\subseteq N$ можна вибрати C_n^k способами, то

$$\sum_{\pi\in IS_n}\chi(\pi)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\cdot\left(C_n^k\right)^2\cdot k!.$$

Тоді

$$\sum_{\pi\in IS_n}\chi(\pi)+\frac{1}{n}\sum_{\pi\in IS_n}def\pi=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\cdot\left(C_n^k\right)^2\cdot k!+\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k}{n}\cdot\left(C_n^k\right)^2\cdot k!$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k+n-k}{n}\cdot\left(C_n^k\right)^2\cdot k!=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2\cdot k!=|IS_n|.$$

□

Будемо тепер розглядати підстановочні зображення напівгрупи IS_n на правих ω–класах за замкненими інверсними піднапівгрупами виду $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$. За теоремою 3, таке зображення буде точним тоді і тільки тоді, коли $|M| = k = 1$. При цьому воно буде еквівалентне стандартному зображенню напівгрупи IS_n. Тому для точного зображення φ рівність (1) набуває такого вигляду

$$\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} \chi(\pi) + \frac{1}{[IS_n : H]} \cdot \sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} def\,\pi = |\varphi(IS_n)|\,.$$

Доведемо останню рівність для неточних підстановочних зображень на правих ω–класах за замкненими інверсними піднапівгрупами виду $H = G \oplus IS_{\overline{M}}$. Такі зображення – транзитивні.

Лема 3. *Часткова підстановка $\varphi(t)$, $t \in IS_n$, визначена на правому ω–класі $(Hx)\omega$, де $dom\,x = M$, тоді і тільки тоді, коли $dom\,x \supseteq M^x$.*

Доведення. Нехай e_H — найменший ідемпотент H. Тоді $dom\,e_H = M$ і $e_H = xx^{-1}$. $(Hx)\omega^{\varphi(t)} \neq \varnothing \Leftrightarrow xtt^{-1}x^{-1} \in H$, що рівносильно $xtt^{-1}x^{-1} \geq e_H$. З іншого боку, $xtt^{-1}x^{-1} \leq xx^{-1} = e_H$. Тому $xtt^{-1}x^{-1} = xx^{-1}$. Ця рівність у свою чергу рівносильна $x^{-1}xtt^{-1}x^{-1}x = x^{-1}x$. Оскільки ідемпотенти в інверсній напівгрупі комутують, то

$$(x^{-1}x)(tt^{-1}) = (x^{-1}x)(x^{-1}x)(tt^{-1}) = (x^{-1}x)(tt^{-1})(x^{-1}x) = x^{-1}x.$$

Отже, $tt^{-1} \geq x^{-1}x$. Тому $dom\,t = dom\,tt^{-1} \supseteq dom\,x^{-1}x = ran\,x = M^x$. □

Лема 4. *Якщо часткова підстановка $\varphi(t)$, $t \in IS_n$, фіксує правий ω–клас $(Hx)\omega$, де $dom\,x = M$, то $dom\,t \supseteq M^x$, $(M^x)^t = M^x$ і $t\big|_{M^x} \in G^x$, де $G^x = x^{-1}\big|_{M^x} \cdot G \cdot x\big|_M$ — подібна до G група підстановок на множині M^x.*

Доведення. Включення $dom\,t \supseteq M^x$ випливає із попередньої леми. $(Hx)\omega^{\varphi(t)} = (Hx)\omega \Leftrightarrow xtx^{-1} \in H$. Отже, $M^{xtx^{-1}} = M$. Тоді $M^x = M^{xtx^{-1}x} = ((M^x)^t)^{x^{-1}x}$. Оскільки ідемпотент $x^{-1}x$ тотожно відображає свою область визначення M^x на саму себе, то $(M^x)^t = M^x$.

Із того, що $xtx^{-1} \in H = G \oplus IS_{\overline{M}}$ випливає, що $xtx^{-1}\big|_M \in G$ або $x\big|_M \cdot t\big|_{M^x} \cdot x^{-1}\big|_{M^x} \in G$. Звідси $t\big|_{M^x} \in x^{-1}\big|_{M^x} \cdot G \cdot x\big|_M$. □

Теорема 4. *Нехай φ — підстановочне зображення напівгрупи IS_n на множині правих ω–класів за замкненою інверсною піднапівгрупою H. Тоді*

$$\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} \chi(\pi) + \frac{1}{[IS_n : H]} \cdot \sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} def\,\pi = |\varphi(IS_n)|\,. \tag{2}$$

Доведення. Рівність (2) у випадку $k = 1$ виконується, бо відповідне зображення точне. Якщо $k = 0$, то $M \neq \varnothing$ і $H = IS_n$. Очевидно, що при цьому усі елементи напівгрупи IS_n містяться в одному правому ω–класі, який фіксує підстановка $\varphi(t)$ для кожного $t \in IS_n$. При цьому конгруенція $\varphi \circ \varphi^{-1}$ має один клас еквівалентності і $|\varphi(IS_n)| = 1$. У цьому випадку рівність (2) також виконується. Нехай тепер $k > 1$.

1) Розглянемо спочатку випадок, коли $k = n$ і $H = G \leq S(N)$. Тоді, за твердженням 5 із [2], $|\varphi(IS_{n)}| = 1 + \frac{n!}{m} = 1 + r$, де $m = |G|,\ r = [S(N) : G]$. За теоремою 2 кількість правих ω–класів при цьому дорівнює r. За лемою 4 із [2] образ кожного групового елемента напівгрупи IS_n визначений на всіх правих ω–класах, а образ кожного негрупового елемента — порожня підстановка на множині правих ω–класів за лемою 1. Тому

$$\sum_{\pi \in \varphi(IS_n)} \chi(\pi) + \frac{1}{[IS_n : H]} \cdot \sum_{\pi \in \varphi(IS_n)} def\, \pi = \sum_{\pi \in \varphi(S_n)} \chi(\pi) + \frac{1}{r} \cdot r = 1 + \sum_{\pi \in \varphi(S_n)} \chi(\pi).$$

За лемою 4 із [2], дія образів групових елементів IS_n на множині правих ω–класів за піднапівгрупою H подібна до дії їх образів при підстановочному зображенні групи $S(N)$ за підгрупою G. Тому для обчислення $\sum\limits_{\pi \in \varphi(S_n)} \chi(\pi)$ можна скористатися лемою Бернсайда для груп. Дія групи $S(N)$ на множині правих класів суміжності групи $S(N)$ за підгрупою G транзитивна. Тому

$$\sum_{\pi \in \varphi(S_n)} \chi(\pi) = 1 \cdot |\varphi(S_n)| = |S_n/\, G| = r.$$

Отже, рівність (2) виконується.

2) Нехай тепер $1 < k < n$ і $G = S(M)$. Тоді, за твердженням 5 із [2] маємо

$$|\varphi(IS_n)| = 1 + (C_n^k)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} (C_n^i)^2 \cdot i!.$$

При цьому за теоремою 2 кількість правих ω–класів дорівнює C_n^k. Кожний правий ω–клас містить всі елементи, що переводять множину M в якусь одну з C_n^k k–елементних підмножин множини N. За лемою 1 усі елементи IS_n рангу менше k складають один клас еквівалентності конгруенції $\varphi \circ \varphi^{-1}$. Їх образ діє, як порожня підстановка на C_n^k–елементній множині.

З'ясуємо, як діють на множині правих ω–класів елементи рангу k. Нехай X_1 — правий ω–клас, всі елементи якого переводять k–елементну множину M в деяку M'. За лемами 3 і 4 для елемента $t \in IS_n$ рангу k часткова підстановка $\varphi(t)$ визначена на X_1 тоді і тільки тоді, коли $dom\, t = M'$, і часткова підстановка $\varphi(t)$ фіксує X_1 тоді і тільки тоді, коли $dom\, t = ran\, t = M'$. Тому для кожного елемента $t \in IS_n$ рангу k часткова підстановка $\varphi(t)$ визначена рівно на одному із C_n^k правому ω–класі і $def\, \varphi(t) = C_n^k - 1$. Оскільки один клас еквівалентності конгруенції $\varphi \circ \varphi^{-1}$ складають ті і лише ті елементи рангу k, у яких однакові області визначення і однакові області значень, то кожен правий ω–клас X_1 фіксується рівно одним елементом $\varphi(t)$ із $\varphi(IS_n)$, для якого $dom\, t = ran\, t = M'$.

Розглянемо тепер елемент $t \in IS_n$ рангу $k+1$. В IS_n існує $C_{k+1}^k = k+1$ елемент рангу k, менший за t відносно природного часткового порядку. Тому $\varphi(t)$ визначений на $C_{k+1}^k = k+1$ правому ω–класі. Подібні міркування приводять до того, що для елемента $t \in IS_n$ рангу $i,\ k+1 \leq i \leq n$, образ $\varphi(t)$ визначений на C_i^k правих ω–класах і має дефект $C_n^k - C_i^k$.

Тому другий доданок у рівності (2) має вигляд:

$$\frac{1}{C_n^k}\cdot\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} def\,\pi = \frac{1}{C_n^k}\cdot\Big(C_n^k+\left(C_n^k\right)^2\left(C_n^k-1\right)+\left(C_n^{k+1}\right)^2(k+1)!\left(C_n^k-C_{k+1}^k\right)$$

$$+\ldots+\left(C_n^{n-1}\right)^2(n-1)!\left(C_n^k-C_{n-1}^k\right)+\left(C_n^n\right)^2(n)!\left(C_n^k-C_n^k\right)\Big)$$

$$=1+(C_n^k)^2+\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2 i!-C_n^k-\frac{1}{C_n^k}\cdot\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2\cdot i!\cdot C_i^k.$$

Обчислимо тепер загальну кількість нерухомих точок $\sum\limits_{\pi\in\varphi(IS_n)}\chi(\pi)$. Кожен із C_n^k правих ω–класів може бути нерухомою точкою. Нехай це клас X_1. Позначимо $St(X_1)=\{\pi\in\varphi(IS_n)|X_1^\pi=X_1\}$. Клас X_1 фіксується єдиним елементом $\varphi(t)$ із $\varphi(IS_n)$, для якого $rank\,t=k$. За лемою 3 із [2] усі елементи IS_n рангу більшого за k утворюють одноелементні класи еквівалентності конгруенції $\varphi\circ\varphi^{-1}$. Нехай t має ранг $i>k$ і $X_1^{\varphi(t)}=X_1$. Тоді за лемою 4 маємо $(M')^t=M'$. Існує $k!$ способів задати дію t на k–елементній множині M'. На решті $i-k$ елементах, які можна вибрати C_{n-k}^{i-k} способами, дію t можна задати, вибравши C_{n-k}^{i-k} способами їх образи, а потім задавши взаємно однозначну відповідність між ними $(i-k)!$ способами. Тому

$$|St(X_1)|=1+\sum_{i=k+1}^{n}(C_{n-k}^{i-k})^2\cdot(i-k)!\cdot k!.$$

Отже,

$$\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)}\chi(\pi)=C_n^k\cdot|St(X_1)|=C_n^k\cdot\Big(1+\sum_{i=k+1}^{n}(C_{n-k}^{i-k})^2\cdot(i-k)!\cdot k!\Big).$$

Після нескладних перетворень можна отримати, що

$$\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)}\chi(\pi)=C_n^k+\frac{1}{C_n^k}\cdot\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2\cdot i!\cdot C_i^k.$$

Отже, рівність (2) в цьому випадку також виконується.

3) Нехай тепер $1<k<n$ і G — власна нормальна підгрупа $S(M)$ індексу r. За твердженням 5 із [2] маємо

$$|\varphi(IS_n)|=1+r\cdot(C_n^k)^2+\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2\cdot i!.$$

Кількість правих ω–класів при цьому дорівнює $r\cdot C_n^k$. Всі елементи, що переводять множину M в якусь одну з C_n^k k–елементних підмножин множини N, містяться в r правих ω–класах. Вся множина правих ω–класів розбита на C_n^k підмножин $L_1,\ldots,L_{C_n^k}$ по r класів у кожній.

За лемою 1 усі елементи IS_n рангу менше k утворюють один клас еквівалентності конгруенції $\varphi\circ\varphi^{-1}$. Їх образ діє як порожня підстановка на $r\cdot C_n^k$–елементній множині.

З'ясуємо, як діють на множині правих ω–класів елементи рангу k. Нехай X_1 — правий ω–клас, всі елементи якого переводять M в деяку M'. За лемами 3 і 4 для елемента $t \in IS_n$ рангу k часткова підстановка $\varphi(t)$ визначена на X_1 тоді і тільки тоді, коли $dom\, t = M'$, і часткова підстановка $\varphi(t)$ фіксує X_1 лише тоді, коли $dom\, t = ran\, t = M'$. Тому для кожного елемента $t \in IS_n$ рангу k часткова підстановка $\varphi(t)$ визначена рівно на r правих ω–класах, що входять в одну підмножину L_i. Оскільки елементи рангу k, у яких однакові області визначення і однакові області значень, утворюють r рівнопотужних класів еквівалентності конгруенції $\varphi \circ \varphi^{-1}$, то на кожній підмножині L_i із правих ω–класів визначено рівно r елементів з $\varphi(IS_n)$. У випадку $G = A(M)$, $r = 2$ і один із цих двох елементів фіксує обидва праві ω–класи, а інший їх переставляє. У випадку, коли $k = 4$ і $G = K_4$, кількість правих ω–класів $r = 6$ і можна переконатися, що 6 елементів із $\varphi(IS_n)$ циклічно переставляють 6 правих ω–класів. Тому кожний правий ω–клас фіксується рівно одним елементом з $\varphi(IS_n)$, для якого $dom\, t = ran\, t = M'$.

Аналогічно до попереднього випадку можна показати, що для елемента $t \in IS_n$ рангу i, $k+1 \le i \le n$ образ $\varphi(t)$ визначений на $r \cdot C_i^k$ правих ω–класах і має дефект $r \cdot (C_n^k - C_i^k)$.

Тоді суми з лівої частини рівності (2) матимуть вигляд:

$$\frac{1}{rC_n^k} \sum_{\pi \in \varphi(IS_n)} def\, \pi = \frac{1}{rC_n^k} \cdot \left(rC_n^k + r^2 (C_n^k)^2 (C_n^k) + \sum_{i=k+1}^{n} (C_n^i)^2 i! r (C_n^k - C_i^k) \right)$$

$$= 1 + r(C_n^k)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} (C_n^i)^2 i! - rC_n^k - \frac{1}{C_n^k} \cdot \sum_{i=k+1}^{n} (C_n^i)^2 \cdot i! \cdot C_i^k.$$

Обчислимо тепер загальну кількість нерухомих точок $\sum\limits_{\pi \in \varphi(IS_n)} \chi(\pi)$. Кожен із rC_n^k правих ω–класів може бути нерухомою точкою. Нехай це клас X_1. Позначимо $St(X_1) = \{\pi \in \varphi(IS_n) | X_1^\pi = X_1\}$. Клас X_1 фіксується єдиним елементом $\varphi(t)$ із $\varphi(IS_n)$, для якого $rank\, t = k$. За лемою 3 із [2] усі елементи IS_n рангу більшого за k утворюють одноелементні класи еквівалентності конгруенції $\varphi \circ \varphi^{-1}$. Нехай t має ранг $i > k$ і $X_1^{\varphi(t)} = X_1$. Тоді за лемою 4 маємо $(M')^t = M'$ і $t\big|_{M^x} \in G^x$. Задати дію t на множині M' можна $|G^x| = |G| = m = \frac{k!}{r}$ способами. На решті $i-k$ елементах, які можна вибрати C_{n-k}^{i-k} способами, дію t можна задати, вибравши C_{n-k}^{i-k} способами їх образи, а потім задавши взаємно однозначну відповідність між ними $(i-k)!$ способами. Тому

$$|St(X_1)| = 1 + \sum_{i=k+1}^{n} (C_{n-k}^{i-k})^2 \cdot (i-k)! \cdot \frac{k!}{r}.$$

Отже,

$$\sum_{\pi \in \varphi(IS_n)} \chi(\pi) = rC_n^k \cdot |St(X_1)| = rC_n^k \cdot \left(1 + \sum_{i=k+1}^{n} (C_{n-k}^{i-k})^2 \cdot (i-k)! \cdot \frac{k!}{r} \right)$$

$$= rC_n^k + \frac{1}{C_n^k} \cdot \sum_{i=k+1}^{n} (C_n^i)^2 \cdot i! \cdot C_i^k.$$

Як бачимо, рівність (2) знову виконується.

4) Нехай тепер $1 < k < n$ і G — ненормальна або одинична підгрупа групи $S(M)$ індексу r. За теоремою 4 із [2] маємо $|\varphi(IS_n)| = 1+\sum\limits_{i=k}^{n}(C_n^i)^2\cdot i!$. За теоремою 2, кількість правих ω–класів при цьому дорівнює $r\cdot C_n^k$. Всі елементи, що переводять множину M в якусь одну з C_n^k k–елементних підмножин множини N, містяться в r правих ω–класах. Вся множина правих ω–класів розбита на C_n^k підмножин $L_1,\dots,L_{C_n^k}$ по r класів у кожній.

Аналогічно, з леми 1 випливає, що всі елементи IS_n рангу менше k утворюють один клас еквівалентності конгруенції $\varphi\circ\varphi^{-1}$. Їх образ діє, як порожня підстановка на rC_n^k–елементній множині.

З'ясуємо, як діють на множині правих ω–класів елементи рангу k. Нехай X_1 — правий ω–клас, всі елементи якого переводять M в деяку M'. За лемами 3 і 4 для елемента $t\in IS_n$ рангу k часткова підстановка $\varphi(t)$ визначена на X_1 тоді і тільки тоді, коли $dom\,t = M'$, і часткова підстановка $\varphi(t)$ фіксує X_1 лише тоді, коли $dom\,t = ran\,t = M'$. Тому для кожного елемента $t\in IS_n$ рангу k часткова підстановка $\varphi(t)$ визначена рівно на r правих ω–класах, що входять в одну підмножину L_i.

Аналогічно до попередніх випадків можна показати, що для елемента $t\in IS_n$ рангу $i,\ k+1\le i\le n$ образ $\varphi(t)$ визначений на $r\cdot C_i^k$ правих ω–класах і має дефект $r\cdot(C_n^k-C_i^k)$. Тому

$$\frac{1}{rC_n^k}\cdot\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)} def\,\pi = \frac{1}{rC_n^k}\cdot\Big(rC_n^k+(C_n^k)^2k!r(C_n^k-1)+\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2i!r(C_n^k-C_i^k)\Big)$$

$$= 1+k!(C_n^k)^2+\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2i!-k!C_n^k-\frac{1}{C_n^k}\cdot\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2\cdot i!\cdot C_i^k.$$

Елементів рангу k, у яких однакові області визначення і однакові області значень, буде $k!$ і всі вони містяться в одноелементних класах еквівалентності конгруенції $\varphi\circ\varphi^{-1}$. На кожній підмножині L_i із r правих ω–класів визначено $k!$ різних елементів з $\varphi(IS_n)$, у прообразів яких k–елементна область визначення M' збігається з областю значень. З точністю до подібності можна вважати, що симетрична група $S(M')$ транзитивно діє на множині з r елементів. За формулою орбіт для правого ω–класу X_1 кількість елементів $t\in IS_n$ рангу k, таких що $X_1^{\varphi(t)} = X_1$, дорівнює $\frac{k!}{r} = |G| = m$. Кількість елементів $t\in IS_n$ рангу більшого за k, і таких, що $X_1^{\varphi(t)} = X_1$, обчислюється аналогічно до попереднього випадку. Отже, загальна кількість нерухомих точок дорівнює

$$\sum_{\pi\in\varphi(IS_n)}\chi(\pi) = rC_n^k\cdot\Big(m+\sum_{i=k+1}^{n}(C_{n-k}^{i-k})^2\cdot(i-k)!\cdot m\Big)$$

$$= k!C_n^k+\frac{1}{C_n^k}\cdot\sum_{i=k+1}^{n}(C_n^i)^2\cdot i!\cdot C_i^k.$$

Рівність (2) виконується і в цьому випадку. □

Література

1. Волошина Т.В. *Ефективні транзитивні зображення скінченної інверсної симетричної напівгрупи* // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 1998. – Вип. 2. – С. 16-21.

2. Волошина Т.В. *Конгруенції підстановочних зображень скінченної інверсної симетричної напівгрупи IS_n* // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 9-16.

3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 283 с. – Т. 2. – 422 с.

4. Шайн Б.М. *Представление обобщенных групп* // Изв. вузов. "Математика". – 1962. – Т. 28, № 3. – С. 164-176.

Волинський національний університет імені Лесі Українки,

Луцьк, Україна.

vtv_lutsk@rambler.ru

Надійшло 20.05.2010

Voloshyna T.V. *An analogue of Bernside's lemma for finite inverse symmetric semigroup*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 1 (2010), 15–23.

An analogue of Bernside's lemma for transitive permutation representations of finite inverse symmetric semigroup is obtained.

Волошина Т.В. *Аналог леммы Бернсайда для конечной инверсной симметрической полугруппы* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №1. — С. 15–23.

Получен аналог леммы Бернсайда для транзитивных подстановочных представлений конечной инверсной симметрической полугруппы.