15. Rainich G. Y. Elektrodunamics in the General Relativity Theory / G. Y. Rainich // Proc. Nat. Akad. Sci., (USA). – 1924. – Vol. 10. – P. 124–127.
16. Rainich G. Y. Elektrodinamics in the General Relativitu Theory / G. Y. Rainich // Trans. Am. Math. Soc. – 1925. – Vol. 27. – P. 106–136.

Хоровец Владимир. Кантовая геометродинамика и однородность пространства-времени. Однородно стационарная спиновая Вселенная. Предложено квантовую геометродинамику – вариант единой физической теории. Сформулировано принципы построения квантовой геометродинамики, на основании которых физика должна выводиться с 4-мерной римановой геометрии и пространство-время в случае отсутствия материи должно быть однородным. Рассмотрено примеры пространственно-временных континуумов, а именно однородно стационарную вращательную Вселенную. Показано, что анизотропии и вращения Вселенной в простейших наблюдениях мы не заметим. Указано, что вращение Вселенной с планковской частотой (однородно стационарная спиновая Вселенная) дает возможность ввести в 4-мерную риманову геометрию постоянную Планка. Предложено уравнения квантовой геометродинамики, в которых левая часть есть тензор Риччи пространства-времени с материей, а правая – тензор Риччи однородного пространства-времени. Компоненты этих тензоров постоянные для фундаментальных систем отсчета.

Ключевые слова: единая физическая теория, квантовая геометродинамика, однородность пространства-времени, однородно стационарная спиновая Вселенная, уравнения квантовой геометродинамики.

Khorovets Volodymyr. Quantum Geometrodynamics and Homogeneity of Space and Time. Homogeneous and Stationary Spin Universe. Quantum geometrodynamics us one of unified physical theory is proposed. The principles of quantum geometrodynamics are formulated. They based on the physics of which must be derived from a 4-dimensional Riemannian geometry and space and time of matter must be uniform in the absence. The example of the space and time continuum are considered namely uniformly fixed rotational universe. It is shown that the anisotropy and the rotation of the universe in a simplest observation we do not notise. The rotation of the Universe with the Planck frequency (homogeneous stationary spin Universe) gives you the opportunity to enter into a 4-dimensional Riemannian geometry Planck's constant. Equations of quantum geometrodynamics are proposed, where the left side is the of the Ricci tensor of the space and time and matter, and right is Ricci tensor of the homogeneity of space and time. The components of these tensors are constant for fundamental reference systems.

Key words: common physical theory, quantum heometrodynamics, homogeneity of space and time, homogeneous stationary spin Universe, equations of quantum heometrodynamics.

Стаття надійшла до редколегії
24.06.2014 р.

УДК 517.984

Олександр Сировацький

Про збурення самоспряжених операторів при умові кратного спектра

Одне з найважливіших завдань теорії збурень полягає у вивченні спектра збуреного оператора й опису спектральних проекторів цього оператора. У роботі вивчено випадки одновимірного і двовимірного збурення лінійного самоспряженого оператора при умові кратного спектра, а також розв'язано зворотню задачу − знайдено збурення по заданому спектрові.

Ключові слова: скінченномірне збурення, самоспряжений оператор, зворотня задача теорії збурення.

Постановка наукової проблеми та її значення. Спектральну теорію збурень у своїх роботах започаткували Г. Вейль (1909) [9], Ф. Релліх (1936) [8] і К. Фрідріхс (1939) [6]. Одне з найважливіших завдань теорії збурень полягає у вивченні спектра збуреного оператора та описі спектральних проекторів цього оператора. У скінченномірному гільбертовому просторі для самоспряженого оператора з простим спектром задачу одновимірного збурення розв'язав К. Льовнер [7].

Мета роботи − вивчити збурення самоспряжених операторів, що діють у скінченномірному гільбертовому просторі при умові кратного спектра.

Завдання статті – вирішити пряму і зворотню задачу збурення спектра самоспряжених операторів у скінченномірному гільбертовому просторі, причому розглянути випадок одновимірного і двовимірного збурення оператора з кратним спектром. Під зворотньою задачею розуміється відновлення збурення (можливо, не єдиного) по двох спектрах − спектрові початкового і спектру збуреного операторів.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження

1. Попередні відомості

Нехай, A − лінійний самоспряжений оператор, що діє в скінченномірному гільбертовому просторі. Розглянемо збурений оператор:

$$Bh = Ah + c\left\langle h, \varphi \right\rangle \varphi, \tag{1.1}$$

де h та φ з H, а $c \in \mathbb{R}$ $\|\varphi\| = 1$.

Власні значення оператора B є особливостями резольвенти $R_\lambda(B)$. Знайдемо формулу для $R_\lambda(B)$.

Оскільки:

$$\left(B - \lambda I\right)h = \left(A - \lambda I\right)h + c\left\langle h, \varphi \right\rangle \varphi \quad \left(h \in H, \lambda \in \mathbb{C}\right),$$

то, вважаючи, що $h = R_\lambda\left(A\right)f$ $\left(R_\lambda\left(A\right) = \left(A - \lambda I\right)^{-1},\ f \in H\right)$ та, множачи на $R_\lambda\left(B\right) = \left(B - \lambda I\right)^{-1}$ (де λ не належить спектрові A і B), ми отримаємо:

$$R_\lambda\left(A\right)f = R_\lambda\left(B\right)f + c\left\langle R_\lambda\left(A\right)f,\ \varphi \right\rangle R_\lambda\left(B\right)\varphi. \tag{1.2}$$

Нехай, $f = \varphi$, тоді:

$$R_\lambda\left(B\right)\varphi = R_\lambda\left(A\right)\varphi - c\left\langle R_\lambda\left(A\right)\varphi,\ \varphi \right\rangle R_\lambda\left(B\right)\varphi.$$

Тому:

$$R_\lambda\left(B\right)\varphi = \frac{1}{1 + c\left\langle R_\lambda\left(A\right)\varphi, \varphi \right\rangle} R_\lambda\left(A\right)\varphi.$$

Підставляючи це вираження в (1.2), ми остаточно отримаємо

$$R_\lambda\left(B\right)f = R_\lambda\left(A\right)f - \frac{\left\langle R_\lambda\left(A\right)f, \varphi \right\rangle}{\frac{1}{c} + \left\langle R_\lambda\left(A\right)\varphi, \varphi \right\rangle} R_\lambda\left(A\right)\varphi. \tag{1.3}$$

Знайдемо резольвенту при умові двовимірного збурення:

$$B = A + c_1\left\langle \cdot, \varphi_1 \right\rangle \varphi_1 + c_2\left\langle \cdot, \varphi_2 \right\rangle \varphi_2, \tag{1.4}$$

де $c_1, c_2 \neq 0, \varphi_1, \varphi_2 -$ неколінеарні вектори.

Оскільки^

$$B - \lambda I = A - \lambda I + c_1\left\langle \cdot, \varphi_1 \right\rangle \varphi_1 + c_2\left\langle \cdot, \varphi_2 \right\rangle \varphi_2,$$

то, помноживши останню рівність ліворуч на $R_\lambda(B)$ та праворуч − на $R_\lambda(A)$, отримаємо

$$R_\lambda\left(A\right) = R_\lambda\left(B\right) + c_1\left\langle R_\lambda\left(A\right)\ \cdot, \varphi_1 \right\rangle R_\lambda\left(B\right)\varphi_1 + c_2\left\langle R_\lambda\left(A\right)\ \cdot, \varphi_2 \right\rangle R_\lambda\left(B\right)\varphi_2,$$

тому:

$$\begin{cases} R_\lambda\left(B\right)\varphi_1 = R_\lambda\left(A\right)\varphi_1 - c_1 R_{11} R_\lambda\left(B\right)\varphi_1 - c_2 R_{12} R_\lambda\left(B\right)\varphi_2 \\ R_\lambda\left(B\right)\varphi_2 = R_\lambda\left(A\right)\varphi_2 - c_1 R_{21} R_\lambda\left(B\right)\varphi_1 - c_2 R_{22} R_\lambda\left(B\right)\varphi_2 \end{cases},$$

де $R_{ij} = \left\langle R_\lambda\left(A\right)\varphi_i, \varphi_j \right\rangle$ $i, j = 1, 2.$

Вирішуючи систему рівнянь, знаходимо, що:

$$R_\lambda\left(B\right)\varphi_1 = \frac{\left(1 + c_2 R_{22}\right) R_\lambda\left(A\right)\varphi_1 - c_2 R_{12} R_\lambda\left(A\right)\varphi_2}{\left(1 + c_2 R_{22}\right)\left(1 + c_1 R_{11}\right) - c_1 c_2 R_{12} R_{21}},$$

$$R_\lambda\left(B\right)\varphi_2 = \frac{\left(1 + c_1 R_{11}\right) R_\lambda\left(A\right)\varphi_2 - c_1 R_{21} R_\lambda\left(A\right)\varphi_1}{\left(1 + c_2 R_{22}\right)\left(1 + c_1 R_{11}\right) - c_1 c_2 R_{12} R_{21}},$$

Підставляємо отримані значення для $R_\lambda(B)\varphi_1$, $R_\lambda(B)\varphi_2$ у вираження для $R_\lambda(B)$, отримуємо, що для $\forall f \in H$:

$$R_\lambda(B)f = R_\lambda(A)f - \frac{\langle R_\lambda(A)f, \varphi_1\rangle\left[(m_2 + R_{22})R_\lambda(A)\varphi_1 - R_{12}R_\lambda(A)\varphi_2\right]}{(m_2 + R_{22})(m_1 + R_{11}) - R_{12}R_{21}} - \\ - \frac{\langle R_\lambda(A)f, \varphi_2\rangle\left[(m_1 + R_{11})R_\lambda(A)\varphi_2 - R_{21}R_\lambda(A)\varphi_1\right]}{(m_2 + R_{22})(m_1 + R_{11}) - R_{12}R_{21}}, \tag{1.5}$$

де $m_k = \dfrac{1}{c_k}$ $(k = 1;\ 2)$.

Отже, доведена теорема.

Теорема 1.1. *Нехай A − лінійний оператор, що діє в гільбертовому просторі H(dimH < ∝), оператор B − його одновимірне збурення (1.1). Тоді резольвента оператора Вмає вигляд (1.5).*

2. Випадок кратності одного власного значення

Нехай, A − лінійний самоспряжений оператор, що діє в гільбертовому просторі $H(\dim H < \propto)$. Розглянемо випадок, коли одне власне значення оператора A має кратність більшу, ніж 1. Нехай, оператор A має власні значення $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$, де $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_k \neq \alpha_j$, $(k \neq j : k, j > 2)$ та $\alpha_1 < \alpha_3 <... < \alpha_n$. Знайдемо власні значення оператора:

$$B = A + c\langle\cdot, \varphi\rangle\varphi, \tag{2.1}$$

де φ з H, а $c \in \square$ $\|\varphi\| = 1$.

Справедливо, що:

Твердження 2.1. *Нехай, самоспряжений лінійний оператор A має власні значення $\alpha_1, \alpha_3,..., \alpha_n$ і кратність власного значення α_1 дорівнює 2, а всі інші власні значення α_k $(k > 1)$ оператора A прості, тоді число α_1 є простим власним значенням оператора B, що має вигляд (2.1). Усі інші власні значення оператора B перемежатимуться з числами $\alpha_1, \alpha_3,..., \alpha_n$.*

Д о в е д е н н я. Позначимо через $A(\varepsilon)$ оператор, власними значеннями якого є числа α_1, $\alpha_1 + \varepsilon$, $\alpha_3,..., \alpha_n$ $(\varepsilon > 0,\ \alpha_3 - \alpha_1 > \varepsilon)$. Тобто в деякому базисі оператор $A(\varepsilon)$ набуває вигляду:

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & 0 \\ & \alpha_1 + \varepsilon & & & \\ & & \alpha_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Нехай, $B(\varepsilon) = A(\varepsilon) + c\langle\cdot, \varphi\rangle\varphi$.

Очевидно, що $A(\varepsilon)h \to Ah$ при $\varepsilon \to 0$ для $\forall h \in H$.

Тоді $B(\varepsilon)h \to Bh = Ah + c\langle h, \varphi\rangle\varphi$ при $\varepsilon \to 0$ для $\forall h \in H$.

Позначимо через $\beta_1(\varepsilon)$ одне із власних значень оператора $B(\varepsilon)$. Тоді $\beta_1(\varepsilon)$ прагне при $\varepsilon \to 0$ до деякого власного значення β_1 оператора B.

У [4] показано, що між двома сусідніми різними власними значеннями оператора А завжди існує власне значення оператора $B = A + c\langle\cdot, \varphi\rangle\varphi$.

Отже, $\forall \varepsilon > 0$ в інтервалі $(\alpha_1, \alpha_1 + \varepsilon)$ існує власне значення оператора $B(\varepsilon)$.

Нехай, наприклад, $\alpha_1 < \beta_1(\varepsilon) < \alpha_1 + \varepsilon$.

Переходячи до межі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо, що $\alpha_1 \le \beta_1 \le \alpha_1$. Звідки $\beta_1 = \alpha_1$, тобто одне із власних значень оператора B, збігатиметься з кратним власним значенням оператора A.

■

Зауваження 2.1. *Твердження 2.1 можна довести й іншим способом. Якщо виписати вираження для резольвенти оператора B в базисі з власних векторів оператора A, то можна переконатися, що резольвента має особливість в α_1.*

Твердження 2.2. *Нехай, числа* α_1, α_{k+1}, $\alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n$ *є власними значеннями самоспряженого оператора A. Кратність власного значення* α_1 *дорівнює* $k > 1$.

Тоді оператор $B = A + c\langle \cdot, \varphi \rangle \varphi$ *має власними значеннями числа* α_1, β_k, $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n$, *де кратність власного значення* α_1 *оператора B дорівнює* $k - 1$, *числа* β_k, $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n$ *перемежаються з числами* α_1, α_{k+1}, $\alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n$.

Д о в е д е н н я. Це твердження очевидне, оскільки, які б ми не брали власні значення оператора A, що скільки завгодно мало відрізняються один від одного $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$, то на інтервалі (α_1, α_k) завжди існуватиме $k - 1$ власне значення оператора $B = A + c\langle \cdot, \varphi \rangle \varphi$. Отже, при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$ одне з власних значень оператора B збігатиметься з α_1, і кратність цього власного значення дорівнює $k - 1$.

Те, що всі інші власні значення оператора B перемежатимуться з числами α_1, $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ випливає з того, що їх знаходимо з рівняння:

$$\frac{1}{c} + \frac{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_k|^2}{\alpha_1 - \lambda} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{|\xi_i|^2}{\alpha_i - \lambda} = 0.$$

(див., наприклад, доведення теореми 2 [5]).

■

3. Збурення кратного власного значення оператором рангу 2

Нехай, числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є власними значеннями самоспряженого оператора A та $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_k \neq \alpha_j$ ($k \neq j$, $k, j > 2$).

Вище показано, що який би ми не взяли проектор P рангу 1 в скінченномірному гільбертовому просторі H, число α_1 є власним значенням оператора $B = A + P$. Спробуємо збурювати власні значення оператора A проектором рангу 2 так, щоб число α_1 не було власним значенням оператора $B = A + P$, $P = c_1\langle \cdot, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + c_2\langle \cdot, \varphi_2 \rangle \varphi_2$, де $c_1, c_2 \neq 0$, φ_1, φ_2 − неколінеарні вектори. Виберемо у просторі H ортонормований базис, що складається з власних векторів $\{h_k\}_{k=1}^n$ оператора A, відповідних власним значенням $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$. Нехай, $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ координати вектора φ_1 в цьому базисі $\left(\xi_k \neq 0 \;\; \forall k = \overline{1,n}\right)$, $(\eta_1, \eta_2, 0, \dots, 0)$ − координати вектора φ_2 в цьому базисі ($\eta_1 \neq 0$, $\eta_2 \neq 0$).

Тоді:

$$R_\lambda(A)\varphi_2 = \frac{\eta_1 h_1 + \eta_2 h_2}{\alpha_1 - \lambda}, \quad R_\lambda(A)\varphi_1 = \frac{\xi_1 h_1 + \xi_2 h_2}{\alpha_1 - \lambda} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\xi_k h_k}{\alpha_k - \lambda}, \quad R_{22} = \frac{|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2}{\alpha_1 - \lambda},$$

$$R_{11} = \frac{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}{\alpha_1 - \lambda} + \sum_{k=3}^{n} \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda}, \quad R_{12} = \frac{\xi_1 \overline{\eta}_1 + \xi_2 \overline{\eta}_2}{\alpha_1 - \lambda}, \quad R_{21} = \frac{\overline{\xi}_1 \eta_1 + \overline{\xi}_2 \eta_2}{\alpha_1 - \lambda}.$$

Знаменник у формулі (1.5) дорівнює:

$$m_1 m_2 + m_1\left(\frac{|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2}{\alpha_1 - \lambda}\right) + m_2\left(\frac{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}{\alpha_1 - \lambda} + \sum_{k=3}^{n} \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda},\right) + \frac{\left(|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2\right)\left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\right)}{(\alpha_1 - \lambda)^2} +$$

$$+ \frac{|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2}{\alpha_1 - \lambda} \sum_{k=3}^{n} \frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k - \lambda} - \frac{\left(\xi_1 \overline{\eta}_1 + \xi_2 \overline{\eta}_2\right)\left(\overline{\xi}_1 \eta_1 + \overline{\xi}_2 \eta_2\right)}{(\alpha_1 - \lambda)^2} = m_1 m_2 + \frac{\left[m_1\left(|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2\right) + m_2\left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2\right)\right] \prod_{k=2}^{n} \alpha_k - \lambda}{\prod_{k=1}^{n} \alpha_k - \lambda}.$$

Нехай, f − довільний вектор простору H, $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ − його координати в базисі $\{h_k\}_{k=1}^n$.

Тоді:

$$R_\lambda(A) f = \frac{\nu_1 h_1 + \nu_2 h_2}{\alpha_1 - \lambda} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\nu_k h_k}{\alpha_k - \lambda}, \quad \left\langle R_\lambda(A) f, \varphi_1 \right\rangle = \frac{\nu_1 \overline{\xi}_1 + \nu_2 \overline{\xi}_2}{\alpha_1 - \lambda} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\nu_k \overline{\xi}_k}{\alpha_k - \lambda}, \quad \left\langle R_\lambda(A) f, \varphi_2 \right\rangle = \frac{\nu_1 \overline{\eta}_1 + \nu_2 \overline{\eta}_2}{\alpha_1 - \lambda}.$$

Підставляємо отримані вирази у формулу (1.5). Праву частину цієї формули приводимо до спільного знаменника. Легко показати, що в отриманому дробі чисельник не має особливості в α_1.

Знаменник цього дробу дорівнює:

$$m_1m_2\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k-\lambda)+\left[m_1\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)+m_2\left(|\xi_1|^2+|\xi_2|^2\right)\right]\prod_{k=2}^{n}(\alpha_k-\lambda)+m_2\sum_{k=3}^{n}|\xi_k|^2\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(\alpha_i-\lambda)+$$

$$+|\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1|^2\prod_{k=3}^{n}(\alpha_k-\lambda)+\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)\sum_{k=3}^{n}|\xi_k|^2\prod_{\substack{i=2\\i\neq k}}^{n}(\alpha_i-\lambda). \qquad (3.1)$$

Знайдемо, при яких значеннях η_1, η_2 число α_1 не є нулем знаменника.

Нехай, знаменник в α_1 перетворюється на нуль, тоді, підставивши число α_1 замість λ у вираз (3.1), отримаємо, що:

$$|\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1|^2\prod_{k=3}^{n}(\alpha_k-\alpha_1)=0.$$

Оскільки $\left(\alpha_k\neq\alpha_1\cdot\forall k=\overline{3,n}\right)$, то $|\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1|=0\Rightarrow\dfrac{\xi_1}{\xi_2}=\dfrac{\eta_1}{\eta_2}$.

Отже, при $\dfrac{\xi_1}{\xi_2}\neq\dfrac{\eta_1}{\eta_2}$ число α_1 не є коренем знаменника, а значить, не є особливістю всього дробу, тобто α_1 не є особливістю $R_\lambda(B)$.

Усі інші числа $\alpha_k\cdot\left(k=\overline{3,n}\right)$ також не є особливостями $R_\lambda(B)$.

Особливостями $R_\lambda(B)$ будуть лише ті λ, при яких:

$$m_1m_2+\frac{m_1\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)+m_2\left(|\xi_1|^2+|\xi_2|^2\right)}{\alpha_1-\lambda}+m_2\sum_{k=3}^{n}\frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}+\frac{|\eta_1|^2+|\eta_2|^2}{\alpha_1-\lambda}\sum_{k=3}^{n}\frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}+\frac{|\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1|^2}{(\alpha_1-\lambda)^2}\equiv$$

$$\equiv\frac{P_n(\lambda)}{\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k-\lambda)}=0$$

З'ясуємо, за яких умов вирішення цього рівняння $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ перемежатимуться з числами α_1, α_3, $\alpha_4,\ldots,\alpha_n$,тобто $\beta_1<\alpha_1<\beta_2<\alpha_3<\ldots<\beta_{n-1}<\alpha_n<\beta_n$.

Легко показати, що для того, щоб на кожному інтервалі (α_k,α_{k+1}) $\left(k=\overline{2,n}\right)$ існував єдиний корінь рівняння $P_n(\lambda)=0$, потрібно, щоб числа $P_n(\alpha_k)$ і $P_n(\alpha_{k+1})$ мали різні знаки при $\forall k=\overline{2,n}$.

Оскільки $P_n(\alpha_2)=P_n(\alpha_1)=|\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1|^2\prod_{k=3}^{n}(\alpha_k-\alpha_1)>0$, то $P_n(\alpha_3)$ має бути менше нуля, а $P_n(\alpha_4)$ більше нуля і так далі.

Тобто:

$$P_n(\alpha_k)\begin{cases}>0,\ k=2i,\ i\in\mathbb{N}\\<0,\ k=2i+1,\ i\in\mathbb{N}_0\end{cases}$$

При $k>2$ маємо:

$$P_n(\alpha_k)=m_2|\xi_k|^2\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(\alpha_i-\alpha_k)+\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)|\xi_k|^2\prod_{\substack{i=2\\i\neq k}}^{n}(\alpha_i-\alpha_k).$$

Оскільки:

$$\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(\alpha_i-\alpha_k)\begin{cases}<0,\ k=2r,\ r\in\mathbb{N}\\>0,\ k=2r+1,\ r\in\mathbb{N}_0\end{cases}$$

Тому для $\forall k=\overline{3,n}$ має виконуватися: $\dfrac{P_n(\alpha_k)}{\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(\alpha_i-\alpha_k)}<0.$

Але:

$$\frac{P_n(\alpha_k)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(\alpha_i-\alpha_k)}=m_2|\xi_k|^2+\frac{\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)|\xi_k|^2}{\alpha_1-\alpha_k}<0.$$

Або:

$$m_2+\frac{\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)}{\alpha_1-\alpha_k}<0.$$

Для того, щоб існував єдиний корінь рівняння $P_n(\lambda) = 0$ менший α_1 і єдиний корінь цього рівняння, більший, ніж α_n, потрібно виконати умови:

$$P_n(\alpha_1)P_n(-\infty)<0 \text{ і } P_n(\alpha_n)P_n(+\infty)<0.$$

Оскільки $P_n(\alpha_1) > 0$, то має бути $P_n(-\infty) < 0$. Але знак $P_n(-\infty)$ збігається зі знаком m_1m_2. Отже, для того, щоб існував єдиний корінь рівняння $P_n(\lambda) = 0$ менший α_1, потрібно, щоб виконувалося $m_1m_2 < 0$.

Знак виражения $P_n(\alpha_n)$ дорівнює $(-1)^n$. Знак $P_n(+\infty)$ збігається зі знаком $(-1)^n m_1m_2$.

Отже, для того, щоб існував єдиний корінь рівняння $P_n(\lambda) = 0$ більший α_n, потрібно, щоб $m_1m_2 < 0$.

Отже, твердження доведено.

Твердження 3.1. *Нехай, самоспряжений оператор A діє в скінченномірному гільбертовому просторі і має власні значення* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$; *кратність власного значення* α_1 *дорівнює 2, усі інші власні значення* $\{\alpha_k\}_2^{n-1}$ *прості. Нехай, в ортонормованому базисі, що складається з власних векторів оператора A, відповідних власним значенням,* $\varphi_1 = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $\varphi_2 = (\eta_1, \eta_2, 0, ..., 0)$ *і* $\frac{\xi_1}{\eta_1}\neq\frac{\xi_2}{\eta_2}$..

Тоді число α_1 *не є власним значенням оператора* $B=A+c_1\langle\cdot,\varphi_1\rangle\varphi_1+c_2\langle\cdot,\varphi_2\rangle\varphi_2$, *де* c_1, $c_2 \neq 0$ *і власні числа* $\beta_1, \beta_2,..., \beta_n$ *оператора B перемежатимуться з числами* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$ *(тобто* $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < ... < \alpha_{n-1} < \beta_n$*) тоді і лише тоді, коли числа* c_1, c_2, η_1, η_2 *задовольнятимуть таку систему нерівностей*

$$\begin{cases} m_1m_2<0\\ m_2+\dfrac{|\eta_1|^2+|\eta_2|^2}{\alpha_1-\alpha_3}<0\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ m_2+\dfrac{|\eta_1|^2+|\eta_2|^2}{\alpha_1-\alpha_{n-1}}<0\end{cases}.$$

де $m_k=\dfrac{1}{c_k}\ (k=1,2)$.

Нехай, маємо числа $\beta_1, \beta_2,..., \beta_n$ такі, що $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_3 < ... < \alpha_n < \beta_n$, де числа $\alpha_1, \alpha_3, ..., \alpha_n$ є власними значеннями самоспряженого оператора A, що діє в скінченномірному гільбертовому просторі H, кратність власного значення α_1 дорівнює 2, усі інші власні значення α_k $\left(k=\overline{3,n}\right)$ прості.

Знайдемо оператора $B=A+c_1\langle\cdot,\varphi_1\rangle\varphi_1+c_2\langle\cdot,\varphi_2\rangle\varphi_2$, ($c_1$, $c_2 \neq 0$, φ_1, φ_2 − неколлінеарні) такий, що числа $\beta_1, \beta_2,..., \beta_n$ є його власними значеннями.

У просторі H виберемо базис $\{h_k\}_{k=1}^n$ такий, що $Ah_k = \alpha_k h_k$ для $\forall k=\overline{1,n}$. Вектори φ_1, φ_2 шукатимемо у вигляді $\varphi_1=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k h_k$, $\varphi_2=\eta_1h_1+\eta_2h_2$, де $\frac{\xi_1}{\xi_2}\neq\frac{\eta_1}{\eta_2}$, $\xi_k,\eta_i\in$ $\overline{\quad,n}$, $i=1,2$. Оскільки числа $\{\beta_k\}_1^n$ є власними значеннями оператора B, то вони є коренем рівняння:

$$m_1m_2+\frac{m_1\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)+m_2\left(|\xi_1|^2+|\xi_2|^2\right)}{\alpha_1-\lambda}+m_2\sum_{k=3}^{n}\frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}+\frac{|\eta_1|^2+|\eta_2|^2}{\alpha_1-\lambda}\sum_{k=3}^{n}\frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}+\frac{|\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1|^2}{(\alpha_1-\lambda)^2}\equiv$$

$$\equiv\frac{P_n(\lambda)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k-\lambda)}=0, \tag{3.2}$$

де $m_k=\dfrac{1}{c_k}$ $(k=1,2)$, $\alpha_1=\alpha_2$.

Числа $\{\beta_k\}_1^n$ не збігаються з числами $\{\alpha_k\}_1^n$. Отже, числа $\{\beta_k\}_1^n$ є коренем рівняння $P_n(\lambda)=0$. Звідки $P_n(\lambda)=m_1m_2\prod\limits_{k=1}^{n}(\beta_k-\lambda)$.

Вираз $\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\beta_k-\lambda}{\alpha_k-\lambda}$ завжди можна записати у вигляді суми:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\beta_k-\lambda}{\alpha_k-\lambda}=1+\frac{\delta_1}{(\alpha_1-\lambda)^2}+\frac{\delta_2}{\alpha_1-\lambda}+\sum_{k=3}^{n}\frac{\delta_k}{\alpha_k-\lambda}. \tag{3.3}$$

Очевидно, що:

$$\frac{\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)|\xi_k|^2}{(\alpha_1-\lambda)(\alpha_k-\lambda)}=\frac{\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)|\xi_k|^2}{(\alpha_k-\alpha_1)}\left(\frac{1}{\alpha_1-\lambda}-\frac{1}{\alpha_k-\lambda}\right),$$

для $\forall k=\overline{3,n}$.

Тоді ліву частину рівняння (3.2) можна записати у вигляді:

$$m_1m_2+\frac{m_1\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)+m_2\left(|\xi_1|^2+|\xi_2|^2\right)+\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)\sum\limits_{k=3}^{n}\dfrac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\alpha_1}}{\alpha_1-\lambda}+$$

$$+m_2\sum_{k=3}^{n}\frac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\lambda}-\sum_{k=3}^{n}\frac{\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)|\xi_k|^2}{(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\lambda)}+\frac{|\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1|^2}{(\alpha_1-\lambda)^2}=m_1m_2\left(1+\frac{\delta_1}{(\alpha_1-\lambda)^2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{\delta_k}{\alpha_k-\lambda}\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\dfrac{1}{(\alpha_1-\lambda)^2}$, $\dfrac{1}{\alpha_1-\lambda}$, $\dfrac{1}{\alpha_k-\lambda}$ $\left(k=\overline{3,n}\right)$, отримуємо систему, щоб знайти m_1, m_2, η_1, η_2, ξ_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$.

Вона має вигляд:

$$\begin{cases}|\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1|^2=m_1m_2\delta_1\\ \left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)\left(m_1+\sum\limits_{k=3}^{n}\dfrac{|\xi_k|^2}{\alpha_k-\alpha_1}\right)+m_2\left(|\xi_1|^2+|\xi_2|^2\right)=m_1m_2\delta_2\\ -\dfrac{\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)|\xi_3|^2}{(\alpha_3-\alpha_1)}+m_2|\xi_3|^2=m_1m_2\delta_3\\ \dots\;\dots\;\dots\;\dots\;\dots\;\dots\;\dots\;\dots\;\dots\;\dots\\ -\dfrac{\left(|\eta_1|^2+|\eta_2|^2\right)|\xi_n|^2}{(\alpha_n-\alpha_1)}+m_2|\xi_n|^2=m_1m_2\delta_n\end{cases} \tag{3.4}$$

Виберемо числа m_1, m_2 такі, що $m_1 m_2 < 0$ і η_1, η_2 − довільно. Тоді із системи легко знаходяться $|\xi_k|^2 \left(k = \overline{3,n}\right)$:

$$|\xi_k|^2 = \frac{m_1 m_2 \delta_k}{m_2 - \dfrac{|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2}{\alpha_k - \alpha_1}} \quad \left(k = \overline{3,n}\right). \tag{3.6}$$

Числа $|\xi_1|^2, |\xi_2|^2$ знаходяться з першого і другого рівняння системи (3.4):

$$\begin{cases} |\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1|^2 = m_1 m_2 \delta_1 \\ |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = m_1 \delta_2 - \dfrac{|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2}{m_2} \left(m_1 + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{|\xi_1|^2}{\alpha_k - \alpha_1} \right) \end{cases}.$$

Отже, доведена така теорема:

Теорема 3.1. *Нехай, маємо числа $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ такі, що $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < ... < \alpha_{n-1} < \beta_n$, де $\alpha_1, \alpha_3, ..., \alpha_{n-1}$ − власні значення самоспряженого оператора A, що діє в скінченномірному гільбертовому просторі H, кратність власного значення α_1 дорівнює 2, усі інші власні значення αk $\left(k = \overline{2, n-1}\right)$ прості.*

Тоді існує оператор $B = A + c_1 \langle \cdot, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + c_2 \langle \cdot, \varphi_2 \rangle \varphi_2$, ($c_1 > 0$, $c_2 < 0$, φ_1, φ_2 − неколінеарні) такий, що числа $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ є його власними значеннями, де c_1, c_2 і модулі компонент векторів φ_1, φ_2 знаходяться неєдиним способом із системи (3.4).

Висновки та перспективи подальшого дослідження. Отже, у роботі вивчено питання одновимірного і двовимірного збурення власних значень лінійного оператора. Вирішено і пряму задачу знаходження спектра збуреного оператора, і зворотню задачу − відновлення збурення по спектрах початкового і збуреного операторів.

Джерела та література

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею / Н. И. Ахиезер. − М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 310 с.
2. Ахиезер Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 1 / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. − Х. : Вища шк., 1977. – 316 с.
3. Като Т. Теория возмущения линейных операторов / Т. Като. − М. : Мир, 1972. – 740 с.
4. Сыровацкий А. Н. О двумерном возмущении самосопряженных операторов с простым спектром / А. Н. Сыровацкий (в печати).
5. Сыровацкий А. Н. Об одномерном возмущении самосопряженных операторов с простым спектром / А. Н. Сыровацкий // Вісн. Харк. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. – 2010. – № 922. – С. 20−31.
6. Friedrichs K. O. Über die Spektralzerlegung eines Integral-operators / K. O. Friedrichs // Math. Ann. – 1938. – № 115. – P. 259−272.
7. Löwner K. Über monotone Matrixfunctionen / K. Löwner // Mathematische Zeitschrift. – 1934. – № 38. – P. 177−216.
8. Rellich F. Störumgtheory der Spektralzerlegung. I / F. Rellich // Math. Ann. – 1936. – № 113. – P. 600−619.
9. Weyl H. Über beschränkte quadratishe Formen, deren Differenz vollstetig ist, Rend / H. Weyl // Circolo mat. Palermo. – 1909. – № 27. – P. 373−392.

Сыровацкий Александр. О возмущении самосопряженных операторов в случае кратного спектра. Одна из важнейших задач теории возмущений заключается в изучении спектра возмущенного оператора и описания спектральных проекторов этого оператора. Классическим результатом, который решает эту задачу в конечномерном случае для операторов с простым спектром, является теорема Лёвнера. Неожиданным и нетривиальным утверждением в этом случае является то, что по двум спектрам исходного и возмущенного операторов всегда можно найти такое одномерное возмущение, что спектр возмущения будет иметь предписанные значения. Данная работа обобщает этот нетривиальный факт для операторов с кратным спектром. Изучаются прямые и обратные задачи одномерного и двухмерного возмущения линейного самосопряженного оператора в случае кратного спектра, действующего в конечномерном гильбертовом пространстве. Под обратной задачей понимается нахождение возмущения (возможно неоднозначного) по двум спектрам возмущенного и невозмущенного операторов.

Ключевые слова: конечномерное возмущение, самоспряжений оператор, обратная задача теории возмущения.

Syrovatsky Oleksandr. About Perturbation of Selfadjoint Operators in Case of Multiple Spectrum. One of major tasks of perturbation theory is to study spectrum of the perturbed operator and to describe spectral projectors of it. A classic result which gives the solution of this task in finite-dimensional case for operators with a simple spectrum is the Lowner theorem. In this case the fact that it is always possible to find such one-dimensional perturbation on two spectrums of original and perturbed operators, that the spectrum of perturbation will have the prescribed values is an unexpected and nontrivial statement. This work devoted to generalization of this non-trivial fact for operators with a multiple spectrum. In the paper perturbation of linear selfadjoint operator under one-dimensional and two-dimensional perturbation in case of multiple spectrum in finite-dimensional Gilbert space is described and the reverse task is solved. Reverse task in the work is the task of finding the perturbation by the given spectrums of original and perturbed operators.

Key words: finite-dimensional perturbation, selfadjoint operator, reverse task of perturbation theory.

Стаття надійшла до редколегії
02.06.2014 р.

УДК 517.983

Віталій Сировацький

Про функціональні моделі комутативних систем операторів у просторах Л. де Бранжа

Для комутативної системи лінійних обмежених операторів T_1, T_2, які діють в Гільбертовому просторі H, і не один з операторів T_1, T_2 не є стискуванням, розглянуто окремий випадок функціональної моделі, яка будується в просторі Л. де Бранжа для круга.

Ключові слова: функціональна модель, простор Л. де Бранжа, комутативна система операторів.

Постановка наукової проблеми та її значення. Функцінальну модель оператора стискування T, який діє у гільбертовому просторі H, уперше отримав Б.-С. Надь та Ч. Фояш [6]. Ця модель дає змогу реалізувати оператор T як оператор множення на незалежну змінну в спеціальному просторі функцій [5, с. 2]. Дослідження спектральних характеристик цієї моделі привело до нетривіальних завдань і функціонального аналізу, і теорії функції, серед яких: питання інтерполяції, завдання базісності й повноти тощо [1].

Якщо використовувати техніки дилатацій Надя–Фояша [6], то побудова аналогічних функціональних моделей для комутативних систем операторів $\{T_1, T_2\}$, заданих у гільбертовому просторі H, зазнало істотних труднощів, оскільки не вдалося вирішити поставлене вище завдання навіть при умові стисливості T_1, і T_2. Вихід з цієї ситуації знайдено в роботі [2], яка заснована на узагальненні поняття вузла для комутативних систем операторів і посуті висловив її М. С. Лівшиць.

У роботі [9] побудована функціональна модель пари комутативних операторів, коли один із них є стискуванням. Ці побудови засновані на техніці перетворень Фур'є. Якщо ж жоден з операторів $\{T_1, T_2\}$ не є стискуванням, цей метод не застосовний.

Мета роботи − побудувати функціональні моделі для комутативних систем операторів $\{T_1, T_2\}$, заданих у гільбертовому просторі H, якщо жоден із операторів $\{T_1, T_2\}$ не є стискуванням. Тоді функціональна модель, отримана в роботі [3], будується у просторі Л. де Бранжа, що відповідає одиничному кругу.

Завдання статті − побудувати функціональні моделі для комутативних систем операторів $\{T_1, T_2\}$ для окремого випадку, причому ні T_1, ні T_2 не є такими, що стискують.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження

1. Попередні відомості

Основним інваріантом вузла Δ (1), що описує прості вузли, є введена в 1946 р. [5] М. С. Лівшицем характеристична оператор-функція:

$$S_\Delta = K + \Psi(zI - T)^{-1}\Phi, \tag{1.1}$$