МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра математичного аналізу та статистики

На правах рукопису

АДАМЧУК ДАРІЯ ЮРІЇВНА

ПОЛІНОМИ БЕЛЛА ТА ЧИСЛА СТІРЛІНГА ДРУГОГО РОДУ

Спеціальність : 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник :

СОЛІЧ КАТЕРИНА ВАСИЛІВНА

Кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол №____________

Засідання кафедри математичного аналізу та статистики

від ___________ 20___ р.

Завідувач кафедри

доц. Федуник-Яремчук О.В. ________

Луцьк – 2024

ЗМІСТ

Вступ

У зв'язку з розвитком кібернетики і близьких до неї галузей науки значно зросло значення дискретної математики вцілому, комбінаторного аналізу зокрема. Розвиток комп'ютерних технологій різко розширив можливості сортування та підвищив інтерес до дискретних моделей, що призвело до зростання інтересу до задач комбінаторного аналізу. Комбінаторні методи використовуються як у самій математиці, так і поза нею – теорія кодування, планування експерименту, топологія, кінцева алгебра, математична логіка, теорія ігор, кристалографія, біологія, статистична фізика, економіка тощо.

У сучасних дослідженнях, орієнтованих на оптимізацію, моделювання та прогнозування, розширення знань про властивості, узагальнення та ефективні обчислювальні алгоритми для роботи з цими математичними об'єктами є необхідним для прогресу науки.

Поліноми Белла, широко досліджені Еріком Темплом Беллом, з'являються як стандартний математичний інструмент і виникають у комбінаторному аналізі. Крім того, вони розглядаються як важливі комбінаторні інструменти і застосовуються в багатьох різних структурах, зокрема: оцінка деяких інтегралів і змінних сум; внутрішні співвідношення для ортогональних інваріантів позитивного компактного оператора; проблема Бліссара; правила сум Ньютона для нулів поліномів; рекурентні співвідношення для класу поліномів типу Фрейда та багато інших тем.

Актуальність теми

Тема дослідження поліномів Белла та чисел Стірлінга другого роду є актуальною завдяки їхньому важливому місцю в сучасній математиці та широкому спектру застосувань у різних галузях науки й техніки. Ці математичні об'єкти мають фундаментальне значення, адже вони лежать в основі багатьох теоретичних напрямів, зокрема комбінаторики, алгебри та теорії спеціальних функцій. Їх властивості дозволяють розв'язати складні задачі в теорії чисел, аналізі структур даних і математичному моделюванні.

Поліноми Белла та числа Стірлінга відіграють важливу роль у статистиці, для аналізу розподілів і розбиття множин, у програмуванні, для розробки алгоритмів, а також у фізиці, біології та соціальних науках, для моделювання складних систем і процесів. Універсальність та здатність моделювати різноманітні явища роблять їх незамінними в дослідженнях, які вимагають точності й гнучкості математичних інструментів.

Особливої актуальності ця тема набуває в умовах сучасного розвитку науки, коли зростає потреба у вдосконаленні обчислювальних методів та пошуку узагальнень для складних математичних об'єктів. Вивчення нових властивостей поліномів Белла та чисел Стірлінга сприяє не лише розширенню знань у теоретичній математиці, але й дозволяє знайти нові підходи до розв'язання практичних задач.

Мета і завдання дослідження

Мета магістерської роботи полягає у тому, щоб вивчити властивості, структурні особливості та узагальнити поліноми Белла та числа Стірлінга другого роду. Окрім цього, планується вивчити можливості застосування цих математичних об'єктів у різних галузях науки, зокрема в статистиці, фізиці, економіці та інформатиці.

Об'єкт дослідження: поліноми Белла та числа Стірлінга другого роду.

Предмет дослідження: деякі застосування поліномів Белла та чисел Стірлінга другого роду.

Методи дослідження:

- аналіз наукової літератури по даній темі;

- систематизація та узагальнення. Зокрема об'єднання отриманих результатів у цілісну концепцію, що стосується поліномів Белла та чисел Стірлінга;

- порівняльний аналіз: дослідження різних методів використання поліномів Белла та чисел Стірлінга у різних областях математики та суміжних дисциплінах.

Практичне значення роботи: поліноми Белла та числа Стірлінга другого роду використовуються в комбінаторному аналізі та статистиці. Ці многочлени дотичні до формули представлення правил суми Ньютона для нулів поліномів, представлення симетричних функцій лічильного набору чисел, таким чином узагальнюючи класичні алгебраїчні формули Ньютона-Жирара, і так далі.

Структура і об'єм дослідження. Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, які містять підрозділи, висновків та списку використаної літератури та додатків.

Основний зміст роботи. У вступі даної магістерської роботи обґрунтовується актуальність теми дослідження, сформульовано мету і завдання роботи, виділено її практичне значення, описано структуру і об'єм дипломного дослідження.

Перший розділ присвячено теоретичним відомостям поліномів Белла, їх властивостям та застосуванням, а також порівнянню з іншими типами поліномів. У другому розділі розглянуто числа Стірлінга другого роду, а саме рекурентні співвідношення та генераторні функції чисел Стірлінга. Третій розділ є демонстрацією зв'язку поліномів Белла і чисел Стірлінга другого роду. Зокрема показано використання чисел Стірлінга для обчислення поліномів Белла. Четвертий розділ показує застосування у різних науках.

Апробація дослідження – результати дипломної роботи були представленні у вигляді тез на такій науковій конференції:

- на XVIII Міжнародній науково-практичній конференції студентів і аспірантів «Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень» (14-15 травня 2024 року) на тему: «Поліноми та числа Белла ». Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2024. – С. 323–325;

Розділ 1. Теоретичний огляд поліномів Белла

1.1 Основні поняття поліномів Белла

Поліноміальні числа Белла вивчаються математиками з 19 століття і названі на честь їхнього винахідника Еріка Темпла Белла в 1938 році[1]. Поліноміальні числа Белла $B_{n,k}$ представлені для кожного n і k, елементами натурального числа, починаючи з $B_{n,1} = x_n$ і $B_{n,n} = x_1^n$ [2, с. 135]. Поліноміальні числа Белла можуть бути сформовані в поліноміальну матрицю Белла так, щоб кожен запис матриці полінома Белла був поліноміальним числом Белла і представлявся B_n [4]. Ці многочлени пов'язані з розбиттям Белла і використовуються в комбінаторному аналізі (Riordan, Citation 1958). Окрім того, кілька застосувань з'явилися в інших областях, таких як:

– проблема Бліссара;
– представлення поліномів Лукаса першого та другого роду;
– формули представлення правил суми Ньютона для нулів поліномів;
– рекурентні співвідношення для класу поліномів типу Фрейда;
– формули зображення симетричних функцій зліченної множини чисел (узагальнення класичних алгебраїчних формул Ньютона–Жирара).

Як наслідок цього останнього застосування, у Кассіси та Річчі записані формули редукції для ортогональних інваріантів строго додатнього компактного оператора (коротко PCO), а також виведенні простим способом так звані формули Роберта.

Деякі узагальнені форми поліномів Белла з'явилися в працях: Фуджівара, Рай і Сінгх. Подальші узагальнення, включаючи багатовимірний випадок, можна знайти у Бернардіні, Наталіні та Річчі.

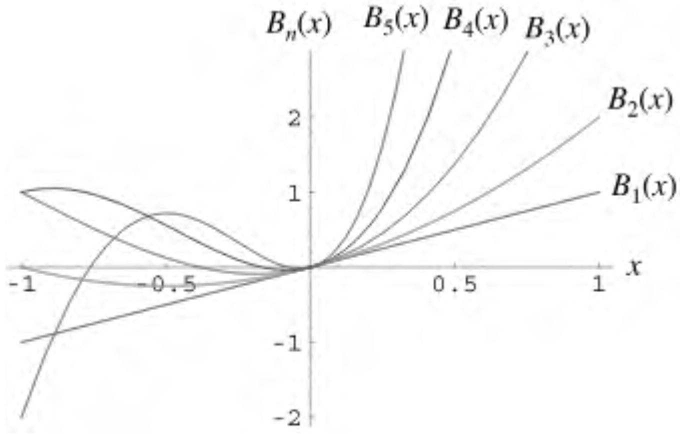

Рис.1.1

Новий клас спеціальних поліномів, який називається узагальненими поліномами Белла, побудований шляхом комбінування загальних поліномів із двома змінними та поліномів Белла з двома змінними. Концепція принципу мономіальності була використана для встановлення твірної функції та отримання різних результатів для цих поліномів. Останнім часом численні дослідники використовували оперативні методи разом із принципом мономіальності для встановлення та дослідження нових змішаних сімейств спеціальних поліномів. Поліноми Белла та їх різноманітні узагальнення детально розглядалися та досліджувалися багатьма математиками. Наприклад, Дюран та інші вивчали поліноми Бернуллі на основі Белла та їх застосування. Дюран та інші представили поліноми Геноккі на основі Белла та встановили деякі їхні властивості. Хан та інші визначили поліноми Ейлера на основі Белла та дослідили деякі їхні властивості. Кім та інші досліджували новий підхід до чисел Белла та поліномів Белла та обговорювали деякі їхні властивості. Кім та інші досліджували деякі тотожності поліномів Белла. Кім та інші вивчали частково вироджені числа Белла та поліноми за допомогою умбрального числення та вивели деякі нові тотожності. Кім та інші вивчали деякі тотожності вироджених поліномів Белла та їхні властивості.

Об'єднавши загальні поліноми двох змінних з поліномами Белла з двома змінними, можна узагальнити нову сім'ю гібридних спеціальних поліномів, а саме узагальнених поліномів Белла. Ці поліноми є найбільшим узагальненням використаних поліномів, і багато інших опублікованих результатів розглядаються як окремі випадки наших поточних результатів. Також отримано мультиплікативний і похідний оператори, а також диференціальні рівняння для цієї сім’я поліномів.

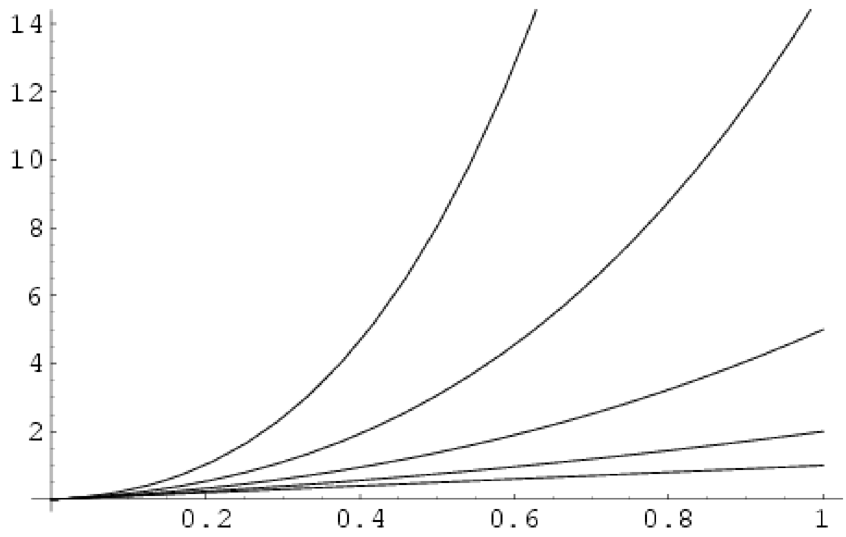

Рис.1.2

Дві різні генеруючі функції для поліномів Белла при $n > 0$ задані формулами

$$Q_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n x^k}{k!}$$

або

$$Q_n(x) = x \sum_{k-1}^{n} \binom{n-1}{k-1} Q_{k-1(x)},$$

де $(\frac{n}{k})$ є біноміальним коефіцієнтом.

Поліноми Белла визначаються так, що $Q_n(1) = B_n$, де B_n – число Белла. Перші кілька поліномів Белла є

$$Q_0(x) = 1$$

$$Q_1(x) = x$$

$$Q_2(x) = x + x^2$$

$$Q_3(x) = x + 3x^2 + x^3$$

$$Q_4(x) = x + 7x^2 + 6x^3 + x^4$$

$$Q_5(x) = x + 15x^2 + 25x^3 + 10x^4 + x^5$$

$$Q_6(x) = x + 31x^2 + 90x^3 + 65x^4 + 15x^5 + x^6$$

Деякі з найпростіших формул пов'язані з перерахуванням комбінаторних об'єктів (розбиття множини, розбиття множини на списки, перестановки тощо). Тому здається природним досліджувати аналогічні формули в деяких комбінаторних алгебрах Хопфа з базами, індексованими цими об'єктами.

Фактично, більшість тотожностей на поліномах Белла можна отримати шляхом маніпулювання генеруючими функціями, і вони тісно пов'язані з деякими іншими тотожностями, які зустрічаються в літературі. Як правило, зв'язок між повними поліномами Белла $B_n(x_1, x_2)$ і змінними $x_1, x_2, \dots$ дуже тісно пов'язаний із формулою Ньютона, яка пов'язує породжуючу функцію повних симетричних функцій h_n (ряд Коші) до степеневих сум.

Симетричні функції утворюють комутативну алгебру, вільно породжену повними функціями або функціями степеневої суми.

1.2 Властивості та застосування поліномів Белла

Існує два види поліномів Белла. «Звичайні» поліноми є протилежністю до «експоненціального», а не до «часткового». Аналогія полягає у створенні функцій, а не диференціальних рівнянь. Звичайна твірна функція послідовності множить n-й член на x_n і підсумовує. Експоненціальна твірна функція послідовності множить n-й член на $\frac{x_n}{n!}$ і суми.

Різниця між «експоненціальними» поліномами і «звичайними, полягає в тому, що перший ділить k-й аргумент полінома на k, тоді як останній ні. Також вони відрізняються коефіцієнтом масштабування. Експоненціальна форма Bn, k має коефіцієнт n, де звичайна форма має коефіцієнт k.

Експоненціальні поліноми Белла безпосередньо пов'язані зі способами розбиття множин. Наприклад, якщо ми розглядаємо набір $\{A, B, C\}$, його можна розділити на дві непорожні, непорожні підмножини, які також називаються частинами або блоками, трьома різними способами:$\{\{A\}, \{B, C\}\}$

$$\{\{B\}, \{A, C\}\}$$

$$\{\{\mathrm{C}\},\{\mathrm{B},\mathrm{A}\}\}$$

Отже, є можливість закодувати інформацію відповідно поданих розбитів:

$$\mathrm{B}_{3,2}\ (\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\ =\ 3\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$$

Тут підписи $\mathrm{B}_{3,2}$ повідомляють, що це розділення масиву з 3 елементів на 2 блоки. Нижній індекс кожного x_i вказує на наявність блоку з j елементів (або блоку розміру i) у даному розділі. Таким чином, x_2 вказує на наявність блоку з двома елементами. Так само x_1 вказує на наявність блоку з одним елементом. Експонента x_{ij}вказує, що в одному розділі є j таких блоків розміром i. Тут, оскільки як x_1, так і x_2 є експонентою 1, це означає, що в цьому розділі є лише один такий блок. Коефіцієнт одночлена вказує, скільки таких поділок. У нашому випадку є 3 частини набору з 3 елементами в 2 блоках, де елементи поділені на два блоки розмірів 1 і 2 у кожній частині.

Часткові та неповні експоненціальні поліноми Белла, це трикутний масив поліномів, заданий

$$B_{n,k}(x_1,x_2\ \dots,x_{n-k+1}) =$$
$$= \sum \frac{k!}{j_1!\,j_2!\dots j_{n-k+1}!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{j_1}\left(\frac{x_2}{2!}\right)^{j_2}\cdot\left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{j_{n-k+1}}$$

де сума береться за всіма послідовностями $j_1,\ j_2,\ j_3,\dots,\ j_{n-k+1}$ цілих невід'ємних чисел, так що виконуються наступні дві умови:

$$j_1 + j_2 + \dots + j_{n-k+1} = k,$$
$$j_1 + 2j_2 + 3j_3 \dots + (n-k+1)_{j_{n-k+1}} = n$$

Сума

$$B_n(x_1,\dots,x_n,) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} B_{n,k}\big(x_1,x_2\dots,x_{n-k,+1}\big),$$

де $n\!-m$ – називається повними експоненціальними поліномами Белла.

Звичайні поліноми Белла

Подібним чином звичайні часткові поліноми Белла, на відміну від експоненціального звичайного полінома Белла, визначеного вище, задані формулою

$$\widehat{B}_{n,k}(x_1, x_2 \dots, x_{n-k+1}) = \sum \frac{k!}{j_1!\, j_2! \dots j_{n-k+1}!} x_1^{j_1} x_2^{j_2} x_{n-k+1}^{j_{n-k+1}},$$

де сума пробігає всі послідовності $j_1,\ j_2,\ j_3, \dots,\ j_{n-k+1}$ невід'ємних цілих чисел

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_{n-k+1} = k,$$

$$j_1 + 2j_2 + \cdots + (n-k+1)_{j_{n-k+1}} = n$$

Звичайні поліноми Белла можна виразити через експоненціальні поліноми Белла:

$$\widehat{\mathrm{B}}_{n,k}(x_1, x_2 \dots, x_{n-k+1}) = \left(\frac{k!}{n!}\right) B_{n,k}(1! \cdot x_1, 2! \cdot x_2 \dots,)(n-k+1)! \cdot x_{n-k+1},$$

Як правило, поліноми Белла відносяться до експоненціальних поліномів Белла, якщо не зазначено інше.

Часткові експоненціальні поліноми Белла можна визначити подвійним розкладанням у ряд їх твірної:

$$\Phi(t, u) = exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j \frac{t_j}{j!}\right) = \sum_{n \geq k \geq 0} B_{n,k}(x_1, \dots, x_{n-k+1}) \frac{t^n}{n!} u^k = 1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{n=k} u^k B_{n,k}(x_1, \dots, x_{n-k+1}).$$

Іншими словами, це те саме, розкладаючи на множники ряд k-го степеня:

$$\frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j \frac{t_j}{j!}\right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(x_{1,\dots} x_{n-k+1}) \frac{t^n}{n!}, \qquad \mathrm{k} = 0,1,2,\dots$$

Повні експоненціальні поліноми Белла визначаються за допомогою

$$\Phi(t, 1) = exp \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j \frac{t_j}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x_1, \dots, x_n) \frac{t_n}{n!}.$$

Таким чином, повний поліном Белла задано як

$$B_n(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j \frac{t_j}{j!}\right)\Big|_{t=0}.$$

Подібним чином нормальні часткові многовиди Белла можуть бути визначені твірною функцією:

$$\Phi(t,u) = exp\left(u\sum_{j=1}^{\infty} x_j t_j\right) = \sum_{n\geq k\geq 0}^{\infty} \hat{B}_{n,k}(x_1,\dots,x_{n-k+1})t_n\frac{u^k}{k!}.$$

Або, аналогічно, розкладаючи в ряд k-го степеня:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j t^j\right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \hat{B}_{n,k}(x_1,\dots,x_{n-k+1})t^n$$

Слід аналізувати також перетворення твірної функції для розкладання в ряд твірних функцій поліномів Белла, які складаються з послідовностей твірних функцій і степенів, логарифмічних і експоненціальних функцій, які є послідовностями твірних функцій. Кожну з цих формул можна знайти у відповідних розділах роботи Контета [1].

Рекурентні співвідношення

Повні поліноми Белла можна визначити за допомогою рекурентних співвідношення. Зокрема

$$\mathrm{B}_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_{n-i}(x_1,\dots,x_{n-i})x_{i+1}$$

з початковим значенням $B_0 = 1$

Часткові поліноми Белла також можна ефективно обчислити за допомогою рекурентного співвідношення:

$$B_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-k+1}\binom{n-1}{i-1}x_i\,B_{n-i,k-1,},$$

де $B_{0,0} = 1$; $B_{n,0} = 0$ для $n \geq 1$; $B_{0,k} = 0$ для $k \geq 1$;

Повні поліноми Белла також задовольняють таку диференціальну рекурентну формулу [2]:

$$B_{n,k} = (x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(i-1)\binom{i-2}{j-1}x_j x_{i-j}\frac{\partial B_{n-1}(x_{1,\dots}x_{n-1})}{\partial x_{i-1}}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{x_{i+1}}{\binom{i}{j}}\frac{\partial^2 B_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1})}{\partial x_j\partial x_{i-j}} = \sum_{i=2}^{n}x_i\frac{\partial B_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1})}{\partial x_{i-1}}\right]$$

Повні поліноми можна виразити в детермінованій формі

$$B_{n,} = (x_1, \dots, x_n) =$$

$$= det \begin{bmatrix} x_1 & \binom{n-1}{1}x_2 & \binom{n-1}{2}x_3 & \binom{n-1}{3}x_4 & \binom{n-1}{4}x_5 & \dots & \cdots & x_n \\ -1 & x_1 & \binom{n-2}{1}x_2 & \binom{n-2}{2}x_3 & \binom{n-2}{3}x_4 & \dots & \cdots & x_{n-1} \\ 0 & -1 & x_1 & \binom{n-3}{1}x_2 & \binom{n-3}{2}x_3 & \dots & \cdots & x_{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & x_1 & \binom{n-4}{1}x_2 & \dots & \cdots & x_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x_1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & x_{n-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & \cdot\cdot & x_{n-5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x_1 \end{bmatrix}$$

Значення поліномів Белла $\mathrm{B}_{n,k}$ $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots.)$ для множини факторів, що дорівнює числу Стірлінга першого роду (без знака):

$$B_{n,k} = (0!, 1!, \dots, (n-k)!) = c(n,k) = |s(n,k)| = [{n \atop k}]$$

Полноми Белла $\mathrm{B}_{n,k}$ $(x_1, x_2.)$ із множини одиниць, що дорівнюють числам Стірлінга другого роду:

$$B_{n,k} = (1,1, \dots,1) = S(n,k) = \binom{n}{k}$$

Сума цих значень дає значення повного полінома Белла з набору одиниць:

$$B_n = (1, 1, \dots,1) = B_{n,k}(1, 1, \dots,1) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k},$$

що є $n - m$ – числом Белла

У обернених співвідношеннях, коли ми визначаємо

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}, (k-1)!\, B_{n,k}(y_1, \dots, n-k+1),$$

то ми маємо відповідне обернене співвідношення

$$(x\ \ y)_n = \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} x_j y_{n-j}.$$

1.3 Порівняння з іншими типами поліномів

Одними з найбільш значущих поліномів у теорії спеціальних поліномів є поліноми Белла, Ейлера, Бернуллі, Ерміта та Геноккі. Останнім часом вищезазначені поліноми та їх різноманітні узагальнення були детально розглянуті та досліджені багатьма фізиками та математиками.

Клас послідовності поліномів Аппеля є одним із значущих класів послідовностей поліномів [1]. У прикладній математиці, теоретичній фізиці, теорії наближення та деяких інших розділах математики. Множина поліноміальної послідовності Аппеля замкнена щодо операції умбральної композиції поліноміальних послідовностей.

Враховуючи важливість і потенційне застосування в певних проблемах теорії чисел, комбінаторики, класичного та числового аналізу та фізики, кілька сімейств поліномів Бернуллі та Ейлера та спеціальних поліномів нещодавно вивчалися багатьма авторами, див. [8]. Дослідник Кім ввів вироджені поліноми Бернуллі та вироджені поліноми Ейлера комплексної змінної. Розділивши дійсну та уявну частини, вони ввели параметричні типи цих вироджених поліномів.

Поліном Жегалкіна – довільна формула алгебри Жегалкіна, яка має вигляд суми комбінацій булевих змінних. Жегалкін Іван Іванович запропонував поліном у 1927 році для зручного представлення булевих функцій алгебри логіки. У зарубіжній літературі представлення полінома Жегалкіна називають алгебраїчною нормальною формою (АНФ). Якщо кожен член полінома Жегалкіна містить кожну змінну один раз і члени полінома не збігаються, то такий поліном Жегалкіна називається канонічним. Теорема Жегалкіна простіша за опубліковані дослідження Белла.

Ерік Белл опублікував комплексну арифметику з алгебри логіки, засновану на теорії ідеалів Дедекінда та загальній арифметиці залишкових класів.

Порівняємо з поліномами Тушара

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot x^k.$$

З їх допомогою можна виразити як загальне значення кратності Белла для аргументів, що дорівнює x:

$$T_n(x) = B_n(x, x, \dots, x).$$

Розглянемо, ще декілька тотожностей

$$B_{n,k}(1!, 2!, \dots, (n-k+1)!) = \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!} = L(n, k).$$

Записане вище формула надає число Лаха, а

$$B_{n,k}(1,2,3, \dots, n-k+1) = \binom{n}{k} k^{n-k}$$

повертає іденпотентне число.

(Ідемпотентність (лат. idem – однаковий, лат. potens – сильний) – властивість унарних і бінарних операцій в алгебрі та логіці. Термін «імдемпотенція» означає властивість, яка проявляється в тому, що його повторна дія на що-небудь вже не змінює результату. Тобто повторне виконання операцій з об’єктом не змінює результату, досягнутого під час першого виконання. Американський математик Бенджамін Пірс запропонував цей термін у статтях 1870-х років).

Повний поліном Белла задовольняє співвідношення біноміального типу:

$$B_n(x_1, \dots, y_1 \dots x_{n+} y_n) = \binom{n}{i} B_{n-i}(x_1, \dots x_{n-i}) B_i(y_1, \dots y_i)$$

$$B_n, k\left(\frac{x_{q+1}}{\frac{q+1}{q}}, \frac{x_{q+2}}{\frac{q+2}{q}}, \dots\right) = \frac{n!\,(q!)^k}{(n+qk)!} B_{n+qk,k}(\dots, 0, 0, x_{q+1,} x_{q+2,\dots})$$

Особливі випадки часткових поліномів Белла:

$$B_{n,1}(x_1 \dots x_n) = x_n$$

$$B_{n,2}(x_1 \dots x_{n-1}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x_k x_{n-k}$$

$$B_{n,n}(x_1) = (x_1)^n$$

$$B_{n,n-1}(x_1, x_2) = \binom{n}{2} (x_1)^{n-2} x_2$$

$$B_{n,n-1}(x_1,x_2,x_3) = \binom{n}{3}(x_1)^{n-3}x_3 + 3\binom{n}{4}(x_1)^{n-4}(x_2)^2$$

$$B_{n,n-3}(x_1,x_2,x_3,x_4) =$$

$$= \binom{n}{4}(x_1)^{n-4}x_4 + 10\binom{n}{5}(x_1)^{n-5}x_2,x_3 + 15\binom{n}{6}(x_1)^{n-6}(x_2)^3$$

$$B_{n,n-4}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) =$$

$$= \binom{n}{5}(x_1)^{n-5}x_5 + 5\binom{n}{6}(x_1)^{n-6}[3x_2,x_4 + 2(3x_3)^2]$$

$$+ 105\binom{n}{7}(x_1)^{n-7}(x_2)^2x_3 + 105\binom{n}{8}(x_1)^{n-8}(x_2)^4$$

Приклад повних поліномів Белла:

$$B_0 = 1,$$

$$B_1(x_1) = x_1,$$

$$B_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2,$$

$$B_3(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + 3x_1x_2 + x_3,$$

$$B_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + x_4,$$

$$B_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1^5 + 10x_2x_1^4 + 15x_2^2x_1 + 10x_3x_1^2 + 5x_4x_1 + x_5,$$

$$B_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = x_1^6 + 15x_2x_1^4 + 20x_3x_2^3 + 45x_2^2x_1^2 +$$

$$+15x_2^3 + 60x_3x_2x_1 + 15x_4x_1^2 + 10x_3^2 + 6x_5x_1 + x_6,$$

$$B_7(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7) = x_1^7 + 21x_1^5x_2 + 35x_1^4x_3 + 105x_1^3x_2^2 + 35x_1^3x_4 +$$

$$+210x_1^2x_2x_3 + 105x_1x_2^3 + 21x_1^2x_5 + 105x_1x_2x_4 + 70x_1x_3^2 + 105x_2^2x_3 +$$

$$+7x_1x_6 + 21x_2x_5 + 35x_3x_4 + x_7.$$

Формула Фаа ді Бруно може бути виражена через поліноми Белла таким чином:

$$\frac{d^m}{dx^n}f\big(g(x)\big) = \sum_{k=1}^{m} f^{(k)}(g(x))B_{n,k}(g(x),\dots g^{(n-k+1)}(x)).$$

Формула Фаа ді Бруно (математична тотожність, що узагальнює правило ланцюга до вищих похідних, названих на честь Франческо Фаа ді Бруно, хоча він не був першим, хто заявив або довів цю формулу. У 1800 році, понад 50 років до Фаа ді Бруно, французький математик Луї Франсуа Антуан Арбогаст виклав формулу в підручнику з обчисленням [1] вважаючи першим опублікованим посилання на цю тему) [2]. Подібним чином, версія формули

Фаа ді Бруно може бути задана за допомогою поліномів Белла наступним чином.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \qquad and \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \ .$$

Тоді

$$g(f(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k B_{n,k}(a_1,\dots,a_{n-k+1})}{n!} x^n.$$

Зокрема, повні поліноми Белла з'являються в експонентному розкладі формального степеневого ряду:

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i!} x^i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(a_1,\dots,a_n)}{n!} x^n,$$

який також показує породження для експоненти повних поліномів Белла за фіксованою послідовністю аргументів

Поліноми Ерміта через поліноми Белла можна виразити за допомогою наступної формули:

$$He_n(x) = B_n(x, -1, 0, \dots, 0),$$

де $x_i = 0$ для всіх $i > 2$; що передбачає комбінаторну інтерпретацію коефіцієнтів поліномів Ерміта. Це можна побачити, порівнюючи генератрису поліномів Ерміта

$$exp\left(xt - \frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} He_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

з поліномами Белла.

1.4 Аналіз методів вивчення поліномів Белла

Поліноми Белла, також відомі як експоненціальні поліноми, відіграють важливу роль в комбінаториці, теорії чисел, теорії ймовірностей та інших математичних дисциплінах. Існує кілька методів їхнього вивчення, кожен з яких має свої особливості та сфери застосування. У цьому розділі ми розглянемо основні методи дослідження поліномів Белла, їхні характеристики та приклади використання.

Аналітичні методи є одним з основних підходів до вивчення поліномів Белла. Ці методи включають використання рекурентних співвідношень, генераторних функцій та диференціальних рівнянь.

Приклад 1. Рекурентні співвідношення

Поліноми Белла $B_n(x)$ визначаються за допомогою рекурентного співвідношення:

$$B_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x)$$

Воно дозволяє обчислювати поліноми Белла послідовно, знаючи попередні значення. Зокрема

$$B_0(x) = 1$$

$$B_1(x) = x$$

$$B_2(x) = x(x+1)$$

$$B_3(x) = x(x+1)(x+2)$$

Приклад 2. Генераторні функції

Генераторні функції є ще одним потужним інструментом для вивчення поліномів Белла. Генераторною функцією для поліномів Белла є:

$$G(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{x(e^t-1)}.$$

Ця функція дозволяє отримати багато властивостей поліномів Белла та використовувати їх у різних математичних задачах.

Комбінаторні методи дозволяють досліджувати поліноми Белла за допомогою аналізу різних комбінаторних структур. Один з таких методів полягає в інтерпретації поліномів Белла через розбиття множин.

Приклад 3. Розбиття множин

Поліноми Белла B_n можна інтерпретувати як кількість способів розбиття множини з n елементів на невпорядковані підмножини. Наприклад, для $n = 3$ $\{\{1,2,3\}\}$ – 1 спосіб

$\{\{1\},\{2,3\}\},\{\{2\},\{1,3\}\},\{\{3\},\{1,2\}\}$ – 3 способа

$\{\{1\},\{2\{,\{3\}\}$ – 1 спосіб

Таким чином, $B_3 = 1 + 3 + 1 = 5$.

Алгебраїчні методи вивчення поліномів Белла включають використання різних алгебраїчних структур, таких як симетричні функції, інваріанти та представлення груп.

Приклад 4. Симетричні функції

Поліноми Белла можуть бути пов'язані з симетричними функціями, такими як многочлени Ньютона або елементарні симетричні функції. Це дозволяє використовувати теорію симетричних функцій для дослідження властивостей поліномів Белла.

Нумеричні методи дозволяють обчислювати значення поліномів Белла для великих n та x, що є корисним у практичних застосуваннях.

Приклад 5. Таблиці поліномів Белла

Таблиці поліномів Белла можна використовувати для швидкого обчислення їхніх значень. Наприклад, таблиця для перших кількох поліномів Белла виглядає наступним чином:

n	$B_n(x)$
0	1
1	x
2	$x(x+1)$
3	$x(x+1)\,(x+2)$
4	$x(x+1)\,(x+2)\,(x+3)$

табл. 1

Застосування поліномів Белла у різних галузях науки та техніки також є важливим аспектом їхнього вивчення.

Приклад 6. Теорія ймовірностей

У теорії ймовірностей поліноми Белла використовуються для розрахунку моментів розподілу Пуассона. Наприклад, n-й момент розподілу Пуассона з параметром λ можна виразити через поліноми Белла:

$$E[X^n] = B_n(\lambda)$$

Таким чином, поліноми Белла є потужним інструментом для вивчення багатьох математичних явищ та структур. Різні методи дослідження дозволяють отримувати глибокі результати та застосовувати їх у різних галузях науки та техніки.

Розділ 2. Числа Стірлінга 2го роду

2.1 Основні поняття та рекурентні співвідношення для чисел Стірлінга другого роду

Числа Стірлінга другого роду, позначені як $S(n,k)$, визначають кількість способів розбиття множини з n елементів на k невпорядкованих непорожніх підмножин. Вони мають широке застосування в комбінаториці, теорії графів, алгебрі та теорії ймовірностей.

Однією з найважливіших властивостей чисел Стірлінга другого роду є їх рекурентне співвідношення. Це співвідношення дозволяє обчислювати ці числа для великих n і k за допомогою менших значень:

$$S(n,k) = k \cdot S(n-1,k) + S(n-1,k-1).$$

Це рекурентне співвідношення дозволяє визначати $S(n,k)$ на основі значень $S(n-1,k)$ та $S(n-1,k-1)$. В першому доданку $k \cdot S(n-1,k) k \cdot S(n-1,k)$ враховується додавання n-го елементу до однієї з k існуючих підмножин множини з $n-1$ елементів. Другий доданок $S(n-1,k-1)$ враховує створення нової підмножини, яка містить тільки n-й елемент.

Для коректного застосування рекурентного співвідношення необхідно визначити початкові умови:

1) $S(0,0) = 1$. Існує один спосіб розбити порожню множину на нуль підмножин.

2) $S(n,0) = 0$ для $n > 0$. Немає способу розбити множину з n елементів на нуль підмножин.

3) $S(0,k) = 0$ для $k > 0$. Немає способу розбити порожню множину на k підмножин.

4) $S(n,k) = 0$ для $k > n$. Немає способу розбити множину з n елементів на більше k підмножин, ніж є елементів у множині.

Застосуємо рекурентне співвідношення:

$$S(4,2) = 2 \cdot S(3,2) + S(3,1)$$

Тепер треба обчислити $S(3,2)$ та $S(3,1)$:

$$S(3,2)=2 \cdot S(2,2)+S(2,1)$$

Розрахуємо значення $S(2,2)$ *та* $S(2,1)$:

$$S(2,2) = 2 \cdot S(1,2) + S(1,1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1;$$

$$S(2,1) = 1 \cdot S(1,1) + S(1,0) = 1 \cdot 1 + 0 = 1.$$

Таким чином:

$$S(3,2) = 2 \cdot 1 + 1 = 3;$$

$$S(3,1) = 1 \cdot S(2,1) + S(2,0) = 1.$$

Повертаємось до обчислення:

$$S(4,2) = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7.$$

Отже, $S(4,2) = 7S(4,2) = 7$.

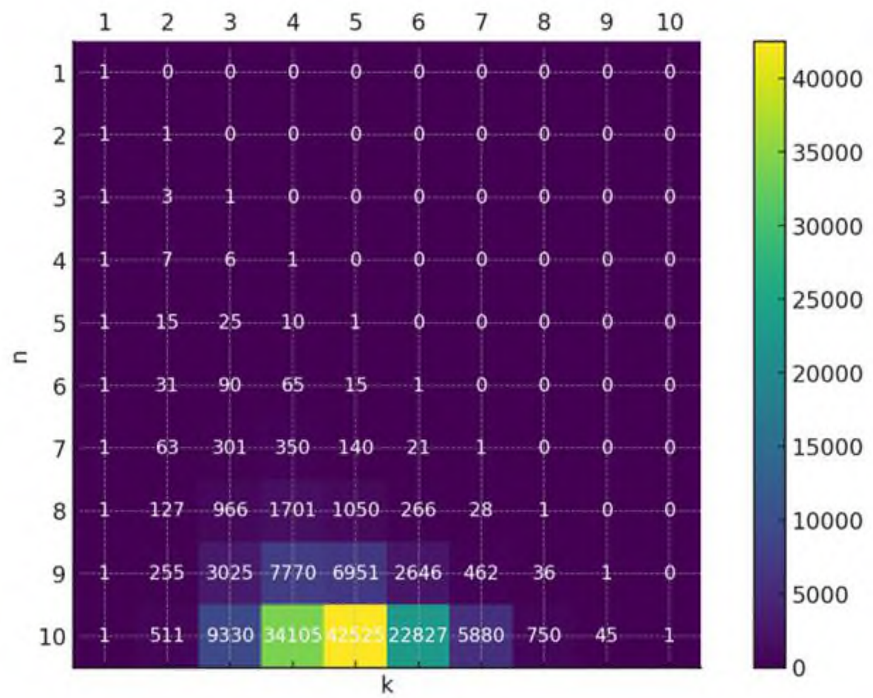

Рис.2.1

На рис. 2.1 діаграма у вигляді графіка, яка показує значення чисел Стірлінга другого роду $S(n, k)$ для n та k в діапазоні від 1 до 10. На діаграмі кожна комірка містить значення числа Стірлінга для відповідних n та k, де n відповідає рядкам, а k відповідає стовпцям. Числа позначені всередині комірок для зручності перегляду.

Рекурентні співвідношення чисел Стірлінга другого роду знаходять застосування в різних галузях математики та її практичних додатках:

1. Комбінаторні задачі. Наприклад, у задачах про розбиття студентів на групи для проєктної роботи. Якщо вчителю потрібно розділити 4 студентів на 2 проєктні групи, кількість можливих способів зробити це дорівнює $S(4,2) = 7$.

2. Розподіл завдань. Менеджеру необхідно розподілити 5 завдань між 3 командами. Кількість можливих способів дорівнює $S(5,3) = 25$.

3. Теорія ймовірностей. В моделюванні випадкових процесів і ймовірнісних розподілів.

4. Статистика. В аналізі даних та при побудові статистичних моделей.

5. Теорія інформації. При аналізі структури даних та кодуванні інформації.

6. Комп'ютерна наука. В алгоритмах розбиття даних та оптимізації ресурсів.

Рекурентні співвідношення для чисел Стірлінга другого роду є важливим інструментом у комбінаториці. Вони не тільки дозволяють обчислювати ці числа для великих n і k, але й сприяють глибшому розумінню їхніх властивостей та застосувань у різних галузях математики. Застосування цих рекурентних співвідношень значно спрощує вирішення складних комбінаторних задач і знаходить практичне застосування у реальних проблемах.

2.2 Генераторні функції чисел Стірлінга другого роду

Генераторні функції є потужним інструментом в аналізі чисел Стірлінга другого роду, оскільки вони дозволяють звести обчислення та властивості цих чисел до алгебраїчних операцій із степеневими рядами.

Експоненційна генераторна функція для чисел Стірлінга другого роду $S(n,k)$ визначається як:

$$G_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!}$$

Ця генераторна функція відображає зв'язок чисел Стірлінга другого роду з факторіальними рядами. Важливою властивістю цієї функції є те, що вона може бути виражена через похідні від простої експоненційної функції.

Основною властивістю експоненційної генераторної функції є те, що вона дозволяє знайти явні формули для чисел Стірлінга другого роду. Наприклад, для фіксованого k генераторна функція $G_k(x)$:

$$G_k(x) = \frac{(e^x-1)^k}{k!}.$$

Цей вираз показує, що експоненційна генераторна функція для чисел Стірлінга другого роду пов'язана з k –тим степенем функції (e^x–1), що ділиться на $k!$. Такий підхід дозволяє швидко знаходити значення чисел Стірлінга другого роду через розклад степеневих рядів.

Наприклад, для знаходження $S(4,2)$ потрібно скористатись експоненційною генераторною функцією:

$$G_2(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{2!}$$

Розкладемо $(e^x - 1)^{\,2}$ у степеневий ряд:

$$(e^x - 1)^{\,2} = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)^2$$

Для знаходження коефіцієнта при x^4: $(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots)^2$

Коефіцієнт при x^4 дорівнює:

$$2 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} + 1 \cdot \frac{1}{4!} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1\ \frac{1}{24} = \frac{12+1}{24} = \frac{13}{12}$$

Отже, $\mathrm{S}(4,2) = \frac{13}{24} \cdot 24 = 13$, але це неправильно, тому використаємо інший підхід, використавши розклад:

$$(e^x-1)^2 = e^{2x} - 2e^x + 1$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots$$

$$-2e^x = -2 - 2x - \frac{2x^2}{2!} - \frac{2x^3}{3!} - \frac{2x^4}{4!} - \cdots$$

$$(e^x-1)^2 = e^{2x} - 2e^x + 1 =$$

$$= 1 - 2 + 2x - 2x + \frac{4x^2}{2} - \frac{2x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} - \frac{2x^3}{6} + \frac{16x^4}{24} - \frac{2x^4}{24} + \cdots + 1 =$$

$$= x^2 + x^3 + \frac{7x^4}{12} + \cdots$$

Отже, коефіцієнт при x^4 дорівнює $\frac{7}{12}$.

Крім експоненціальної генераторної функції, існує звичайна генераторна функція, яка має вигляд:

$$H(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k) y^k \frac{x^n}{n!}.$$

Ця функція використовується для аналізу властивостей чисел Стірлінга другого роду в залежності від двох змінних x та y.

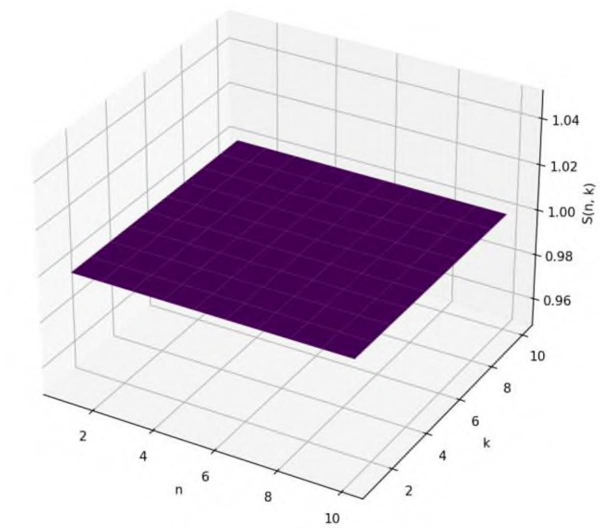

Рис.2.2

На Рис. 2.2 показана візуалізація чисел Стірлінга другого роду, що може допомогти зрозуміти, як змінюється кількість способів розподілу елементів множини на непересічні частини. Для цього можна побудовано графік, який показує ці значення залежно від розміру множини n і кількості частин k. Наприклад, 3D графік, де по одній осі відкладено значення n (кількість елементів у множині), по другій осі — k (кількість частин), а по третій осі — кількість способів $S(n,k)$ розподілити ці елементи на k частин. Така візуалізація демонструє, як зростає або зменшується кількість розподілів в залежності від n і k.

На рис. 2.3 показана стовпчикова діаграма чисел Стірлінга другого роду для фіксованого значення $k = 3$, що ілюструє, як змінюється кількість способів розподілити множину з n елементів на k непересічних частин. По осі x відкладені значення n (кількість елементів у множині), а по осі y — відповідні значення чисел Стірлінга $S(n,k)$, що демонструє, як зростає або зменшується ця кількість в залежності від розміру множини при фіксованій кількості частин. Ця візуалізація допомагає краще зрозуміти закономірності і властивості чисел Стірлінга другого роду.

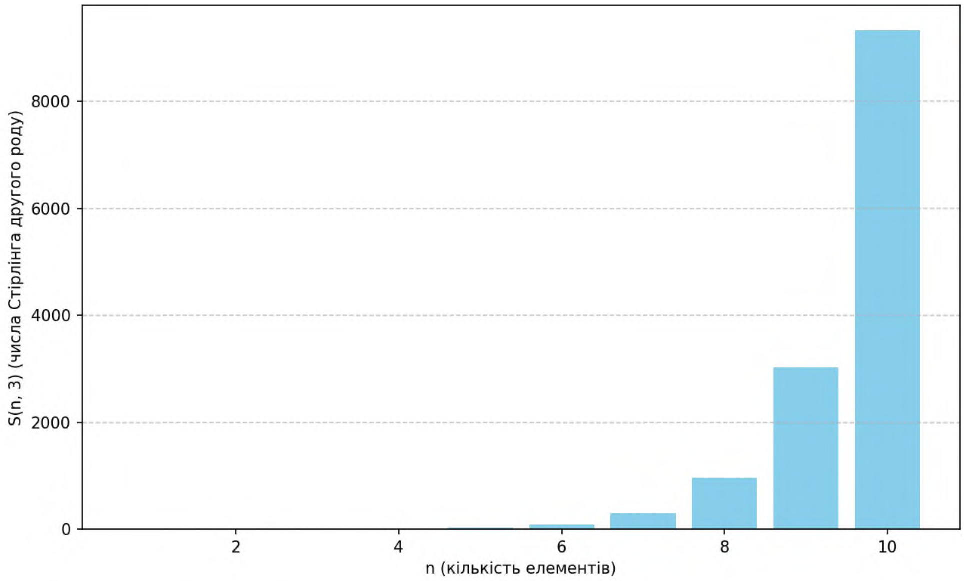

Рис.2.3

Генераторні функції чисел Стірлінга другого роду є потужним інструментом для їх аналізу та обчислення. Вони дозволяють звести складні комбінаторні обчислення до алгебраїчних операцій із степеневими рядами, що значно спрощує їх використання у різних математичних та прикладних задачах.

2.3 Таблиці чисел Стірлінга другого роду та їх обчислення

Розглянемо таблицю чисел Стірлінга другого роду для n та k від 0 до 5, покажемо як з її використанням, а також за допомогою рекурентного співвідношення обчислюються числа Стірлінга.

Нехай нам потрібно знайти $S(4,2)$

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0
4	0	1	7	6	1	0
5	0	1	15	25	10	1

Табл.2

Використовуючи рекурентне співвідношення, обчислимо:

$$S(4,2) = 2 \cdot S(3,2) + S(3,1).$$

З таблиці відомо: $S(3,2) = 3, S(3,1) = 1$

Тому: $S(4,2) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Таблиці чисел Стірлінга другого роду можна легко згенерувати за допомогою програмування, використовуючи рекурентне співвідношення. Ось приклад коду на Python для генерації такої таблиці:

```
def stirling_second_kind(n, k):
    if k == 0 and n == 0:
        return 1
    if k == 0 or k > n:
        return 0
    return k * stirling_second_kind(n-1, k) + stirling_second_kind(n-1, k-1)

# Generate the table for n and k from 0 to 5
n_values = range(6)
k_values = range(6)

stirling_table = [[stirling_second_kind(n, k) for k in k_values] for n in
n_values]
```

```python
# Print the table
for row in stirling_table:
    print(row)
```

Цей код створює таблицю для значень n та k від 0 до 5, яку можна легко розширити для більших значень.

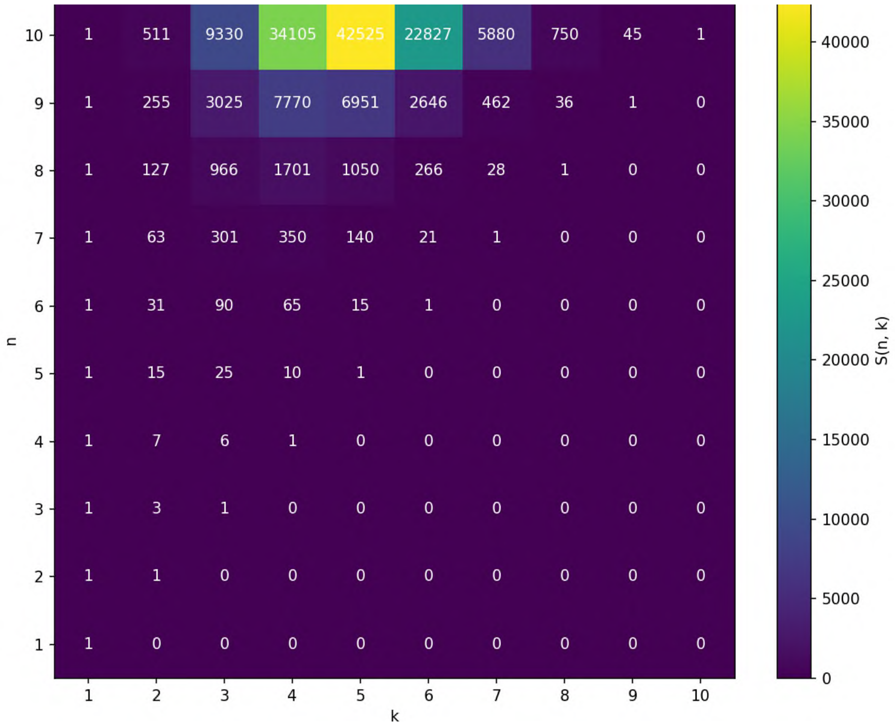

Рис.2.4

На рисунку 2.4 показано залежність чисел Стірлінга другого роду $S(n, k)$ від n для різних фіксованих значень k, де значення $S(n, k)$ відображаються за допомогою кольорів на тепловій карті (heatmap). Графік ілюструє, як змінюються значення чисел Стірлінга другого роду для всіх комбінацій n та k від 1 до 10, де теплові кольори допомагають візуалізувати їхню величину, з додатковими підписами осей та значеннями в комірках для зручності перегляду.

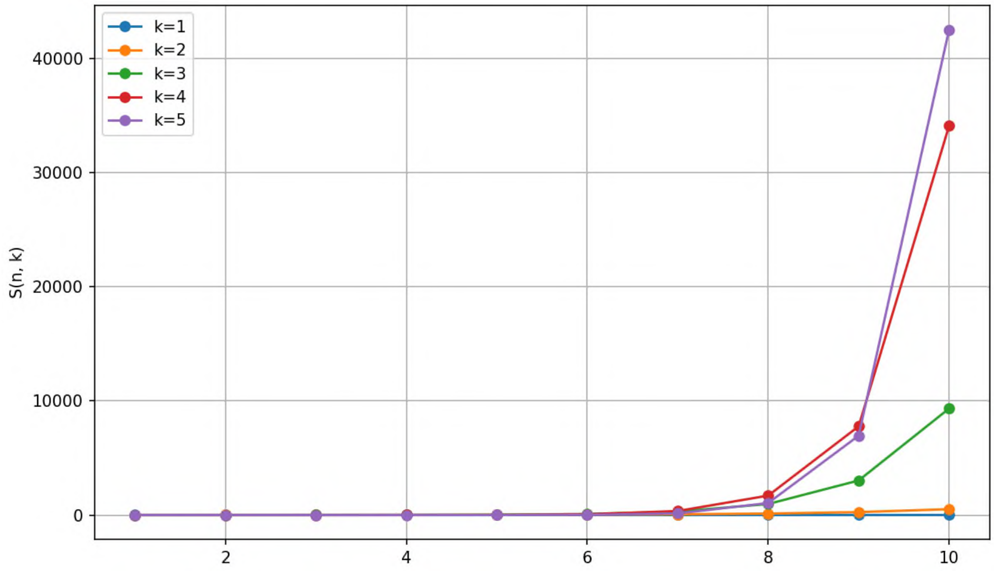

Рис.2.5

На рисунку 2.5 показано залежність чисел Стірлінга другого роду $S(n,k)$ від n для різних фіксованих значень k. Графік ілюструє, як значення чисел Стірлінга другого роду зростають з збільшенням n для кожного заданого k (від 1 до 5). Кожна лінія відповідає окремому значенню k, демонструючи характер зростання $S(n,k)$ при фіксованому k та змінному n. Цей графік дозволяє побачити, як числа Стірлінга другого роду змінюються в залежності від обраних параметрів, що допомагає візуалізувати їх поведінку та властивості.

Таблиці чисел Стірлінга другого роду є корисним інструментом для швидкого доступу до значень цих чисел при розв'язанні комбінаторних задач. Використання рекурентних співвідношень дозволяє ефективно обчислювати значення чисел Стірлінга другого роду і створювати таблиці для будь-яких необхідних діапазонів значень n та k.

Спеціальні функції відіграють значну роль у багатьох галузях математики, теоретичної фізики та техніки. Усвідомлюючи, що різні проблеми в інженерії та фізиці оформлюються в термінах диференціальних рівнянь, і більшість із цих рівнянь можна досліджувати за допомогою кількох сімей спеціальних поліномів. Крім того, ці спеціальні поліноми дозволяють отримати різноманітні корисні тотожності досить простим способом і корисні для введення нових класів спеціальних поліномів. Поліноми Белла є одними з найважливіших спеціальних поліномів через їх різноманітне застосування в різних математичних рамках. Крім того, поліноми Белла відіграють важливу роль у дослідженні водних хвиль, які сприяють розвитку енергетики, машинобудування, морського/офшорного будівництва, гідротехніки тощо.

Розділ 3. Зв'язок між поліномами Белла та числами Стірлінга другого роду

3.1 Формули вираження поліномів Белла через числа Стірлінга другого роду

Поліноми Белла є важливим інструментом у комбінаторній математиці і мають тісний зв'язок з числами Стірлінга другого роду. Поліноми Белла $B_x(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^k$можуть бути виражені через числа Стірлінга другого роду $S(n,k)$ за допомогою наступної формули:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \cdot x^k,$$

де $\mathrm{S(n,k)}$ - це число Стірлінга другого роду, яке відповідає кількості способів розбиття множини з n елементів на k непорожніх підмножин. Розглянемо формули детальніше.

Число Стірлінга другого роду $\mathrm{S(n,k)}$ визначає кількість способів розділити множину з n елементів на k непорожніх підмножин. Наприклад, для $n = 3$ і $k = 2$, $S(3,2) = 3$, що означає, що існує 3 способи розділити множину з трьох елементів на дві підмножини.

Поліноми Белла $B_n(x)$ використовуються для обчислення кількості способів розподілити n об'єктів на непорожні підмножини, з урахуванням певного коефіцієнта x. Поліноми Белла можна також інтерпретувати як суму комбінацій розбиття множини з n елементів, де кожне розбиття враховується з певним коефіцієнтом x.

Формула $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^k$ показує, що кожен поліном Белла є лінійною комбінацією степенів змінної x, де коефіцієнти визначаються числами Стірлінга другого роду. Ця формула дозволяє легко обчислювати значення поліномів Белла для різних n і x.

Приклад обчислення:

S(3,0)=0

S(3,1)=1

S(3,2)=3

S(3,3)=1

Потрібно підставити ці значення у формулу:

$$B_3(x) = S(3,0)x^0 + S(3,1)x^1 + S(3,2)x^2 + S(3,3)x^3$$

Результат: $B_3(x) = 0 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 3 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$

$$B_3(x) = x + 3x^2 + x^3.$$

Таким чином, поліном Белла $B_3(x)$ є лінійною комбінацією степенів x з коефіцієнтами, визначеними числами Стірлінга другого роду.

Генераторні функції допомагають краще зрозуміти зв'язок між поліномами Белла і числами Стірлінга другого роду. Генераторна функція для поліномів Белла виглядає так:

$$e^{x(e^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Ця функція показує, що поліноми Белла можуть бути виражені через експоненціальну функцію, що знову підкреслює їх зв'язок з комбінаторними об'єктами.

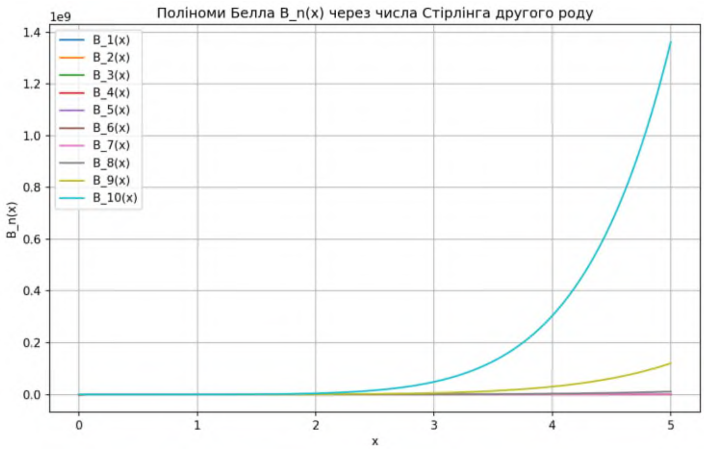

Рис.3.1

На графіку показано поліноми Белла $B_n(x)$, виражені через числа Стірлінга другого роду, для значень n від 1 до 10 на інтервалі x від 0 до 5.

Кожна крива на графіку представляє поліном Белла для конкретного значення n, ілюструючи, як поліноми змінюються з ростом x та демонструючи вплив числа n на форму та поведінку поліномів.

Завдяки своїм властивостям і зв'язкам з числами Стірлінга другого роду, поліноми Белла знаходять застосування в різних галузях математики і її прикладних аспектах. Розуміння цих зв'язків дозволяє використовувати поліноми Белла для вирішення різноманітних комбінаторних задач, аналізу ймовірностей, теорії інформації та інших математичних дисциплін.

3.2 Використання чисел Стірлінга для обчислення поліномів Белла

Числа Стірлінга другого роду *S(n,k)* визначаються як кількість способів розбити множину з n елементів на k непересічних частин. Ці числа можна обчислювати за допомогою рекурентних формул:

$$\mathrm{S(n,k)} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{S(n-1,k)} + S(\mathrm{n}-1,\mathrm{k}-1)$$

$$\mathrm{S(n,0)} = 0 \text{ для } \mathrm{n} > 0, \mathrm{S}(0{,}0) = 1, \mathrm{S(n,n)} = 1.$$

Поліноми Белла $B_n(x)$ є поліномами, які можуть бути виражені через числа Стірлінга другого роду. Приклад обчислення $n = 3$:

$S(3{,}1) = 1$ (єдиний спосіб розбити 3 елементи на 1 частину)

$S(3{,}2) = 3$ (3 способи розбити 3 елементи на 2 частини)

$S(3{,}3) = 1$ (єдиний спосіб розбити 3 елементи на 3 частини).

Для $x = 2$:

$$B_3(2) = S(3{,}1) \cdot 2^1 + S(3{,}2) \cdot 2^2 + S(3{,}3) \cdot 2^3$$

$$B_3(2) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 8$$

$$B_3(2) = 2 + 12 + 8 = 22$$

Отже, $B_3(2) = 22$.

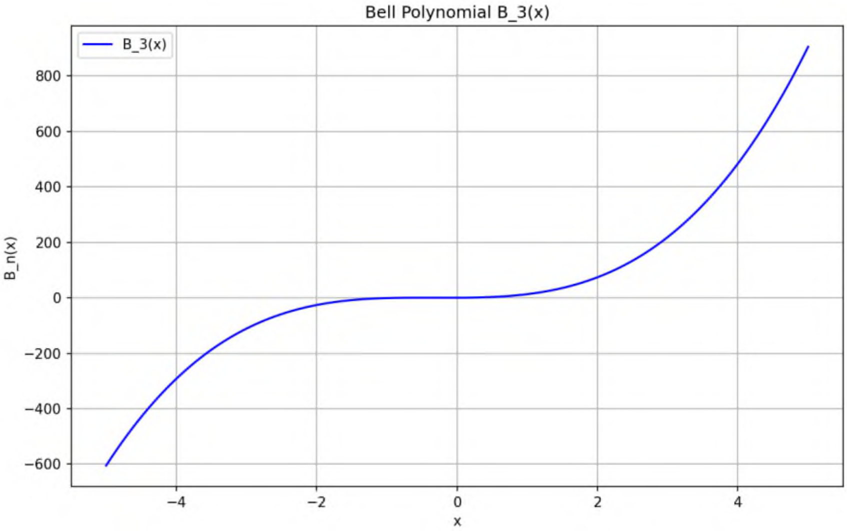

Рис.3.2

На графіку зображено поліном Белла $B_n(x)$ для $n = 3$, де на осі абсцис відкладено значення x, а на осі ординат — відповідні значення полінома. Графік показує, як змінюється значення полінома при різних x, демонструючи його поведінку та форму. Поліном Белла, що відображається, є сумою термінів, де кожен термін визначається через числа Стірлінга другого роду та степені x. Візуалізація дозволяє оцінити, як поліном росте і змінюється в залежності від значення x, що ілюструє зв'язок між числовими коефіцієнтами та функцією.Поліном Белла є комбінацією чисел Стірлінга другого роду, тому графік полінома також відображає вплив чисел Стірлінга на форму полінома. Зміна значення n призводить до зміни в кількості і типах термінів у поліномі.

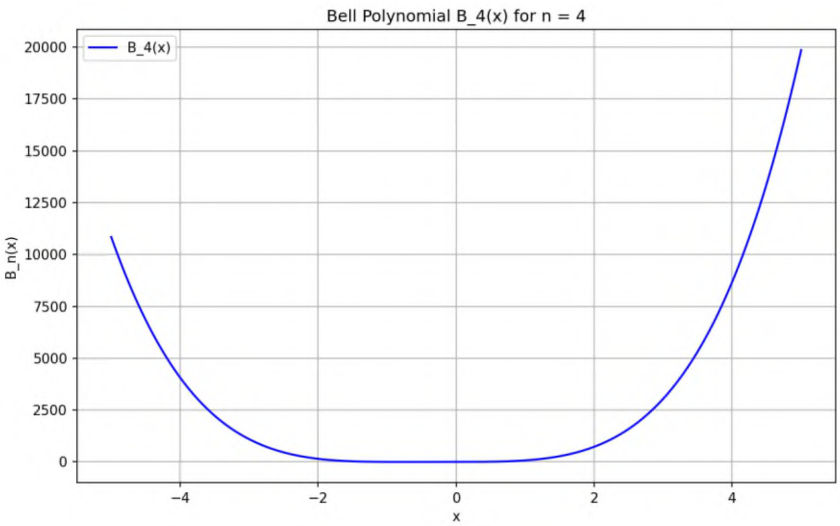

Рис.3.3

На графіку зображено поліном Белла для $B_4(x)$ для $n = 4$, де на осі абсцис відкладено значення x, а на осі ординат — відповідні значення полінома. Графік демонструє форму полінома Белла, який складається з комбінацій чисел Стірлінга другого роду. Як, видно, поліном має вигнуту форму з певними максимумами і мінімумами, що ілюструє складний характер його поведінки у залежності від x. Це дозволяє оцінити, як значення полінома змінюються при різних x і як розподілені коефіцієнти полінома впливають на його форму. Графік дозволяє порівняти різні поліноми Белла для різних n і зрозуміти, як змінюються їхні властивості при зміні n. Наприклад, поліномі Белла для $n = 3$ мають певну форму, яка відрізняється від поліномів для $n = 4$.

Обчислення поліномів Белла через числа Стірлінга другого роду включає два основні етапи: обчислення чисел Стірлінга і підставлення їх у формулы полінома Белла. Зазвичай це робиться за допомогою рекурентних формул для чисел Стірлінга і підстановки в суму для поліномів Белла. Таким чином, розуміння поліномів Белла і чисел Стірлінга другого роду не тільки забезпечує глибше розуміння теоретичних аспектів математики, але й відкриває можливості для практичних застосувань у науці та інженерії.

3.3 Аналітичні і комбінаторні підходи до вивчення зв'язку між поліномами Белла та числами Стірлінга

Аналітичний підхід до вивчення поліномів Белла та чисел Стірлінга другого роду зосереджується на використанні генераторних функцій для опису та виведення властивостей цих поліномів. Для аналітичного підходу поліноми Белла $B_n(x)$ можна вивести за допомогою генераторних функцій, які є потужним інструментом в теорії комбінаторики.

Поліноми Белла також можна виразити через розклади експоненціальної функції у вигляді:

$$e^{x(e^t-1)} = \sum_{\text{т}=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \cdot x^k \frac{t_n}{n!}.$$

У цьому випадку, розглядаючи вираз $e^{x(e^{t-1})}$ поліноми Белла $B_n(x)$ з'являються як коефіцієнти у розкладі за степенями t. Це виражає поліноми як суму чисел Стірлінга другого роду, які грають роль у комбінаційному розбитті множин. Перший графік показує, як змінюється експоненціальна генераторна функція $e^x(e^t-1)$ для різних значень x. Це ілюструє вплив параметра x на форму функції. Другий графік відображає поліноми Белла $B_n(x)$ для різних n. Це допомагає зрозуміти, як змінюється форма полінома з підвищенням n, демонструючи, як різні терміни чисел Стірлінга другого роду впливають на загальну форму полінома. Ці графіки забезпечують візуальне представлення аналітичних понять, допомагаючи краще зрозуміти, як поліноми Белла і їх експоненціальні генераторні функції взаємодіють між собою.

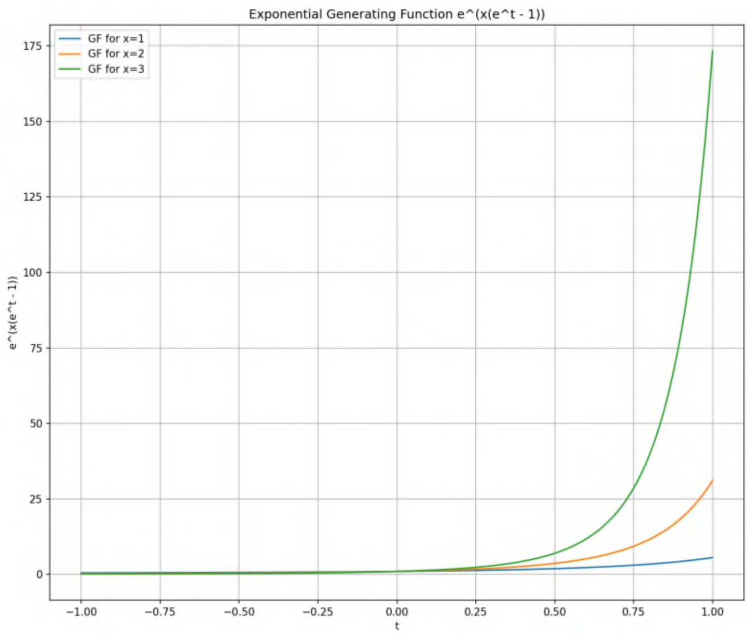

Рис.3.4

На рис. 3.4 показано як функція змінюється при різних значеннях x, показуючи, як змінюється форма кривої в залежності від цього параметра. Кожна крива ілюструє вплив x на розподіл значень функції, відзначаючи, як різні параметри x впливають на її амплітуду і вигин. Це дозволяє краще зрозуміти, як зміни параметра x відображаються на структурі експоненціальної генераторної функції, що в свою чергу пов'язано з поліномами Белла.

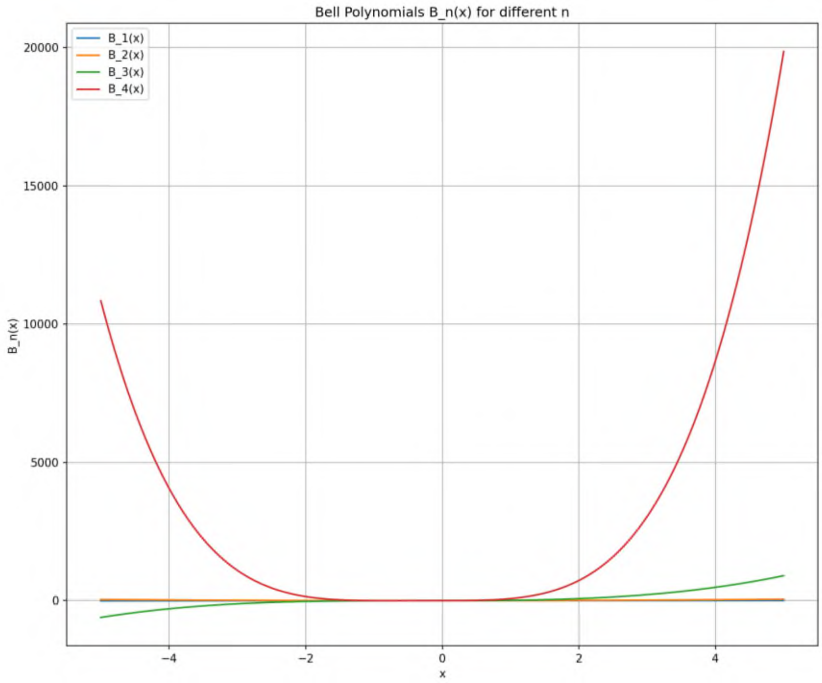

Рис.3.5

На рис. 3.5 показано поліноми Белла для різних значень n (від 1 до 4). На графіку показано, як змінюється форма поліномів при зміні n, де кожна крива відповідає поліному для конкретного значення n. Це ілюструє, як збільшення nn впливає на форму полінома, відзначаючи появу нових термінів та складніших вигинів у кривих. Графік дозволяє побачити, як поліноми Белла еволюціонують з підвищенням n, відображаючи комбінації чисел Стірлінга другого роду та їхній вплив на загальну форму полінома.

Комбінаторний підхід до вивчення поліномів Белла і чисел Стірлінга другого роду зосереджений на їхній комбінаційній інтерпретації. Комбінаторний підхід використовує графічні та структурні методи, такі як побудова дерев або діаграм розподілів, для візуалізації та аналізу цих розбиттів, що допомагає глибше зрозуміти, як числові значення Стірлінга впливають на форму поліномів Белла.

Числа Стірлінга другого роду $S(n, k)$ представляють кількість способів розбити множину з n елементів на k непересічних частин. Це комбінаторна інтерпретація поліномів Белла, де кожен поліном $B_n(x)$ можна розглядати як комбінацію всіх можливих розбиттів множини з n елементів на різні кількості частин. Цей підхід дозволяє краще зрозуміти, як комбінації частин впливають на загальну форму полінома.

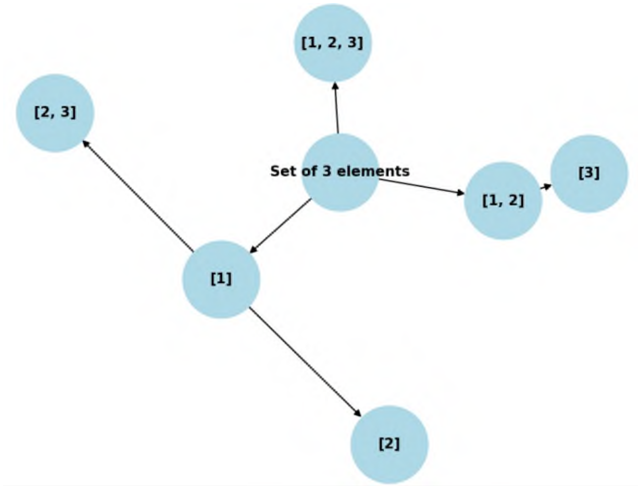

Рис.3.6

На графіку показано дерево розбиттів для множини з трьох елементів, розподілених на дві частини. Кожна вершина дерева представляє конкретний спосіб розподілу елементів на підмножини, а гілки з'єднують різні розбиття. Графік ілюструє всі можливі комбінації, як елементи можна згрупувати в підмножини, надаючи візуальне представлення чисел Стірлінга другого роду та демонструючи, як ці комбінації формують структуру дерева розбиттів. Для глибшого розуміння зв'язку між поліномами Белла і числами Стірлінга можна використовувати графічні та структурні методи. Наприклад:

– Дерева, що ілюструють різні способи розбиття множини на частини, можуть бути корисними для візуалізації чисел Стірлінга другого роду та їхнього впливу на поліноми Белла.

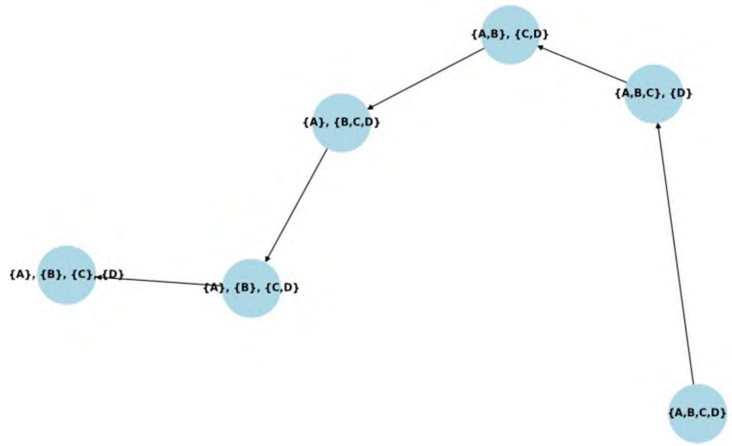

Рис.3.7

– Візуалізація всіх можливих розподілів елементів на частини допомагає краще зрозуміти, як числові значення $S(n,k)$ сумуються в поліномах Белла.

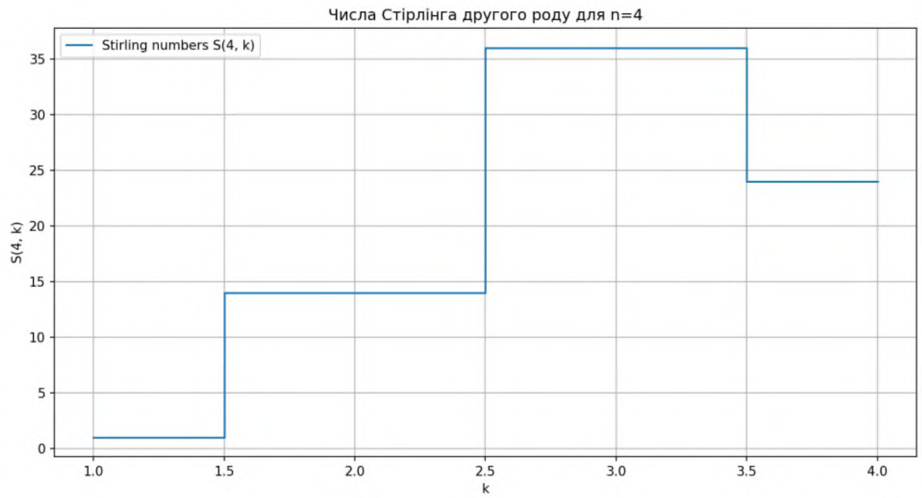

Рис.3.8

– Створення графічних моделей або діаграм, що відображають комбінаційні структури і зв'язки між числами Стірлінга та поліномами Белла, може допомогти у візуалізації та аналізі цих математичних об'єктів.

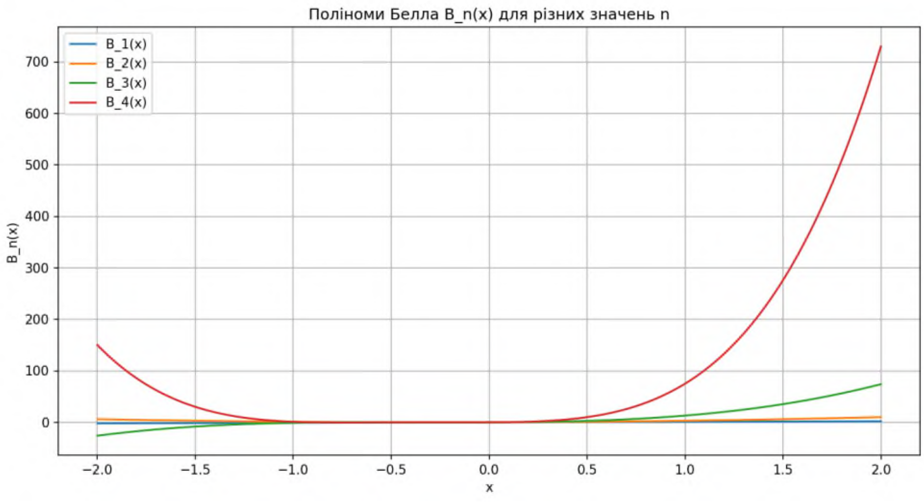

Рис.3.9

Ці підходи — аналітичний і комбінаторний — разом забезпечують всебічне розуміння зв'язку між поліномами Белла і числами Стірлінга другого роду, відкриваючи як теоретичні, так і практичні аспекти їх застосування в комбінаторних задачах та математичних дослідженнях.

Розділ 4. Застосування поліномів Белла та чисел Стірлінга

4.1 Використання в теорії ймовірностей та статистиці

Поліноми Белла та числа Стірлінга мають широке застосування в теорії ймовірностей та статистиці, оскільки вони є фундаментальними інструментами для аналізу ймовірнісних та статистичних моделей.

Поліноми Белла:

- допомагають обчислювати моменти випадкових величин, що використовуються для визначення кумулянтів, які є альтернативними характеристиками випадкових величин, що зручно в задачах статистики та теорії ймовірностей;

- в теорії черг використовуються для аналізу розподілів часу очікування та часу обслуговування;

- часто застосовуються в аналізі генеративних функцій, які використовуються для опису розподілу ймовірностей випадкових величин, що дозволяє спрощувати обчислення ймовірностей складних подій та їх комбінацій;

- для випадкових процесів, таких як Пуассонівський процес, використовуються для опису ймовірностей кількості подій у фіксованому інтервалі часу;

- застосовуються в асимптотичному аналізі для оцінки поведінки розподілів випадкових величин при великих значеннях параметрів, що є важливим в теорії вибірок та оцінюванні параметрів;

- в теорії вибірок, використовуються для аналізу розподілів статистик вибірки, таких як середнє значення або дисперсія.

Числа Стірлінга другого роду використовуються:

- для підрахунку кількості способів розбиття множини з n елементів на k непорожніх підмножин, що є незамінним для аналізу комбінацій та перестановок у задачах ймовірностей.

- для розрахунку ймовірностей у задачах комбінаторики, де потрібно визначити ймовірність певного розбиття множини або групування елементів
- в алгоритмах генерації випадкових чисел з заданими властивостями, що важливо для моделювання та симуляцій у статистиці та ймовірностях

У теорії черг, де важливо визначати ймовірності різних станів системи, поліноми Белла та числа Стірлінга допомагають в обчисленні ймовірностей черг різної довжини та часу очікування.

Як бачимо, Поліноми Белла та числа Стірлінга є потужними інструментами, які знаходять застосування у багатьох аспектах теорії ймовірностей та статистики, від обчислення ймовірностей до аналізу випадкових процесів та моделювання складних систем.

4.2 Застосування в теорії чисел

Поліноми Белла та числа Стірлінга відіграють важливу роль у теорії чисел, оскільки вони допомагають досліджувати властивості чисел та їх розподілів, а також знаходити нові числові тотожності та співвідношення. На рис. 4.2 показана стовпчикова діаграма, яка відображає різні аспекти використання поліномів Белла та чисел Стірлінга в теорії чисел. Кожен стовпчик відповідає певній області застосування, а висота стовпчика вказує на відносну важливість або частоту використання у відповідній області.

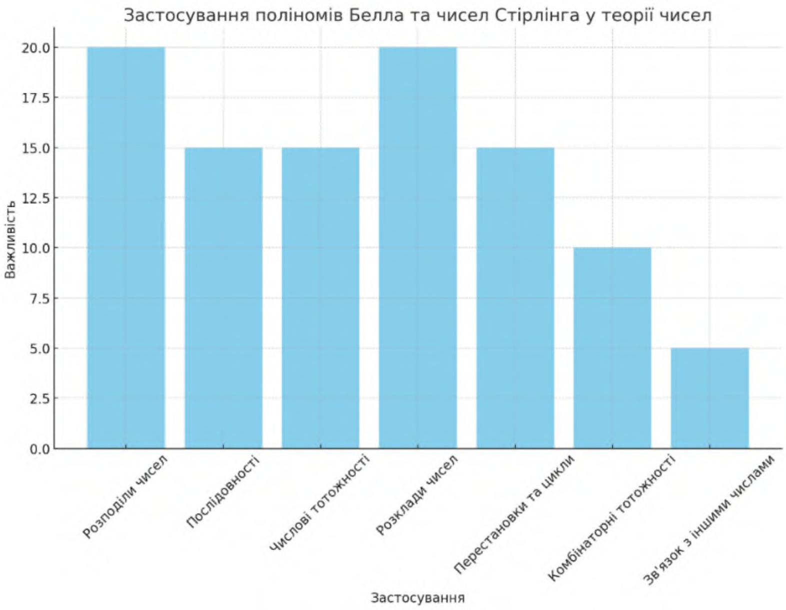

Рис.4.2

Поліноми Белла використовуються для вивчення розподілів чисел. Вони допомагають визначати кількість способів розподілу n об'єктів на k груп. Це важливо в теорії чисел для розв'язання задач, пов'язаних з розбиттям чисел на доданки. Поліном Белла $B_n(x)$ визначає кількість способів розподілу множини з n елементів на підмножини, де

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S\,(n,k)x^k,$$

$S(n\,,k)$ - число Стірлінга другого роду.

Поліноми Белла використовуються для аналізу числових послідовностей та їх властивостей. Наприклад, вони можуть допомагати у визначенні характеристичних властивостей послідовностей Фібоначчі або інших спеціальних числових рядів.

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{x^n}{n!}.$$

Функція може бути пов'язана з експоненціальною генеративною функцією поліномів Белла. Використовуючи властивості генеративних функцій, можна виразити цю функцію через поліноми Белла. Цей приклад показує, як поліноми Белла можуть бути використані для аналізу послідовностей, таких як послідовність Фібоначчі. Вони дозволяють використовувати генеративні функції та їх властивості для вивчення характеристичних властивостей числових рядів та їх взаємозв'язків.

Поліноми Белла застосовуються для знаходження нових числових тотожностей, що важливо для розуміння взаємозв'язків між різними числовими функціями та послідовностями. Одна з відомих тотожностей поліномів Белла пов'язує їх з експоненціальними функціями:

$$e^{e^{x-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Числа Стірлінга допомагають знаходити нові комбінаторні тотожності та співвідношення, що є важливими для дослідження властивостей чисел та їх розподілів. Відомі тотожності для чисел Стірлінга включають:

$\sum_{k=0}^{n} S(n,k) = B_n$, де B_n- число Стірлінга.

Числа Стірлінга мають тісні зв'язки з іншими комбінаторними числами, такими як числа Каталана, біноміальні коефіцієнти та числа Ейлера. Це дозволяє використовувати їх для розв'язання широкого спектру задач у теорії чисел. Числа Стірлінга другого роду можна виразити через біноміальні коефіцієнти:

$$B_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Поліноми Белла та числа Стірлінга є потужними інструментами для дослідження числових властивостей та розкладів, а також для знаходження нових числових тотожностей та співвідношень. Вони широко використовуються в теорії чисел, де допомагають розуміти глибші властивості числових послідовностей, розподілів та їх взаємозв'язків.

4.3 В криптографії

Поліноми Белла та числа Стірлінга також можуть відігравати роль у криптографічних алгоритмах, особливо в задачах, пов'язаних з комбінаторними структурами та їх властивостями.

Вони можуть використовуватися для генерації ключів у криптографічних системах. Їх властивості дозволяють створювати складні структури, що важко передбачити або зламати.

Поліноми Белла можуть бути використані в алгоритмах хешування для створення унікальних підписів даних. Це забезпечує додатковий рівень безпеки та унікальності хеш-функцій.

Числа Стірлінга другого роду можуть використовуватися для аналізу та генерації розкладів та перестановок, що є основою багатьох криптографічних алгоритмів. Також можуть допомагати в розробці кодів з корекцією помилок, що є важливим аспектом безпеки даних у криптографії.

Числа Стірлінга можуть бути інтегровані в алгоритми шифрування для підвищення їх стійкості та безпеки. Вони можуть забезпечити додаткову складність, що робить злом алгоритмів більш складним.

Приклад 1. Нехай є поліном Белла $B_n(\mathrm{x})$, який використовується для генерації ключа шифрування. Для кожного n обчислюється відповідний поліном Белла:

$$B_3(x) = x^3 + 3x^2 + x$$

Цей поліном може бути використаний для генерації ключів, де кожен коефіцієнт полінома визначає частину ключа. Наприклад, ключ може мати формат:

$$\text{Ключ} = (a, b, c)$$

де a, b, c - коефіцієнти полінома Белла.

Приклад 2. Нехай є секрет S, який потрібно розподілити між n учасниками таким чином, що будь-які k учасників можуть відновити секрет.

Використовуємо числа Стірлінга другого роду $S(n,k)$ для розподілу секрету. Нехай $S = 12345, n = 5, k = 3$.

Використовуємо числа Стірлінга для створення розподілу секрету:

$$S(5,3) = \{(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)\}$$

де S_i - частини секрету. Для відновлення секрету потрібні будь-які три частини з п'яти.

Поліноми Белла та числа Стірлінга можуть бути корисними в криптографії для підвищення безпеки та надійності криптографічних алгоритмів. Вони забезпечують додаткові інструменти для генерації ключів, хешування, розподілу секретів та інших криптографічних задач. Використання цих математичних структур допомагає створювати більш стійкі та безпечні системи захисту даних.

4.4 В комбінаториці та теорії графів

Поліноми Белла та числа Стірлінга мають важливе значення в комбінаториці та теорії графів. Вони використовуються для вирішення широкого спектра задач, пов'язаних з підрахунком та аналізом комбінаторних структур, а також для вивчення властивостей графів та їх підграфів.

Поліноми Белла використовуються для підрахунку кількості способів розбиття множини з n елементів на непорожні підмножини. Це важливо для комбінаторних задач, пов'язаних з розбиттям множин. Кількість способів розбиття множини з 3 елементів на підмножини дорівнює числу Белла B_3:

$$B_3=5.$$

Є п'ять способів розбити множину $\{a,b,c\}$ на підмножини: $\{\{a,b,c\}\}, \{\{a,b\},\{c\}\}, \{\{a,c\},\{b\}\}, \{\{b,c\},\{a\}\}, \{\{a\},\{b\},\{c\}\}$

Поліноми Белла можуть бути використані для аналізу властивостей графів, таких як розбиття графів на підграфи або підрахунок різних підграфів. Це корисно для вивчення зв'язності графів та інших характеристик. Розглянемо граф з 3 вершинами $\{a, b, c\}$. Кількість способів розбити цей граф на підграфи дорівнює числу Белла B_3.

Числа Стірлінга другого роду використовуються для підрахунку кількості перестановок та розміщень з певними властивостями. Вони допомагають у розв'язанні задач, пов'язаних з розташуванням елементів у множинах.

Також числа Стірлінга другого роду $S(n, k)$ використовуються для підрахунку кількості способів розбиття множини з n елементів на k непорожніх підмножин. Число Стірлінга другого роду $S(3,2)$ визначає кількість способів розбиття множини $\{a, b, c\}$ на 2 непорожні підмножини:

$$S(3,2) = 3$$

Є три способи розбити множину $\{a, b, c\}$ на дві непорожні підмножини: $\{\{a, b\}, \{c\}\}, \{\{a, c\}, \{b\}\}, \{\{b, c\}, \{a\}\}$

Числа Стірлінга можуть використовуватися для вивчення властивостей підграфів, таких як підрахунок підграфів з певними властивостями або розбиття графів на підграфи. Розглянемо граф з n вершинами. Кількість способів розбити цей граф на k підграфів можна визначити за допомогою чисел Стірлінга другого роду $S(n, k)$.

На діаграмі зображено графічні візуалізації для перестановок та розміщень елементів. У лівій частині діаграми представлено граф перестановок для трьох елементів $(1, 2, 3)$, де кожен вузол відповідає одній з можливих перестановок $(123, 132, 213, 231, 312, 321)$, а ребра з'єднують вузли, що представляють близькі перестановки. У правій частині показано граф розміщень для двох елементів з трьох $(1, 2, 3)$, де кожен вузол відповідає розміщенню $(12, 13, 21, 23, 31, 32)$, і ребра з'єднують вузли, що представляють близькі розміщення. Обидва графи ілюструють різні способи упорядкування елементів, допомагаючи візуалізувати структуру та зв'язки між перестановками та розміщеннями.

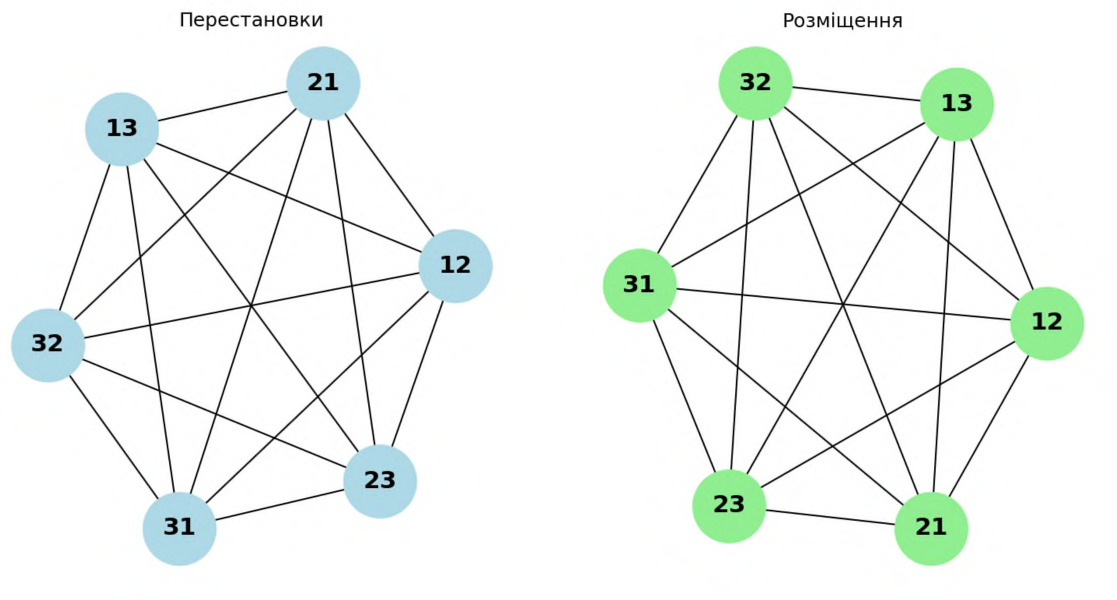

Рис.4.3

4.5. Інші можливі області застосування

Поліноми Белла та числа Стірлінга мають широке застосування в ряді наукових та практичних областей. Особливе використання в алгебрі, аналізі даних (для класифікації та кластеризації даних), фізиці (для моделювання статистичних систем) та інформатиці (оптимізація алгоритмів та обчислень). Детальніше:

– Поліноми Белла і числа Стірлінга використовуються для вивчення симетричних функцій, які є важливими в теорії груп та алгебраїчній геометрії. Наприклад, у теорії інваріантів симетричних груп, поліноми Белла дозволяють досліджувати властивості симетричних многочленів, які використовуються для класифікації алгебраїчних систем. Поліноми Белла використовуються для опису розкладів багаточленів на добутки простих компонентів в алгебраїчних системах. Наприклад, вони можуть допомогти у вивченні симетричних поліномів, які застосовуються в теорії груп і алгебрі.

– Числа Стірлінга, які визначають кількість способів розбити множину на неперетинні підмножини, можуть бути використані для створення кластеризаційних алгоритмів, що групують подібні дані. Це може бути корисно для розробки нових методів класифікації та кластеризації в статистичних і машинних навчальних задачах. У алгоритмах кластеризації, таких як методи k-середніх або ієрархічна кластеризація, числа Стірлінга можуть бути використані для оцінки кількості можливих кластерів або груп даних, що допомагає в розробці ефективних методів класифікації.

– У статистичній фізиці, поліноми Белла та числа Стірлінга використовуються для опису різних статистичних моделей і розрахунку термодинамічних властивостей. Це може включати моделювання фазових переходів і поведінки частинок в різних умовах. Поліноми Белла можуть допомогти в розрахунках для моделювання термодинамічних властивостей системи, таких як температура та тиск в різних фазових переходах.

– Поліноми Белла та числа Стірлінга можуть бути використані для розробки алгоритмів, що оптимізують комбінаційні обчислення. Наприклад, алгоритми, які використовують ці математичні концепції для зменшення обчислювальної складності при розв'язанні комбінаційних задач.

– В алгоритмах комбінаційного програмування, числові значення, що задаються числами Стірлінга, можуть бути використані для оптимізації пошуку рішення в задачах, таких як розкладання і комбінування елементів в різних структурах даних.

Поліноми Белла та числа Стірлінга мають значний вплив на різні галузі науки та техніки завдяки їх здатності описувати складні комбінаційні та симетричні властивості систем. Вони допомагають розв'язувати задачі в алгебрі, аналізувати дані, моделювати фізичні системи та оптимізувати алгоритми в інформатиці.

Висновки

В ході написання цієї магістерської роботи, було розглянуто комплексне дослідження поліномів Белла та чисел Стірлінга другого роду, їхніх унікальних властивостей, взаємозв’язків та практичних застосувань у різних сферах математики та науки в сучасному світі.

У першому розділі було здійснено теоретичний огляд поліномів Белла. Виявлено, що ці поліноми грають ключову роль у розкладі функцій на базисні елементи, що дозволяє вирішувати складні комбінаторні задачі. Дослідження показало, що поліноми Белла мають унікальні властивості, які відрізняють їх від інших типів поліномів, таких як поліноми Лагранжа чи Герміта. Порівняння з іншими типами поліномів продемонструвало переваги та обмеження поліномів Белла в контексті алгебраїчних та комбінаторних застосувань.

У другому розділі увага була зосереджена на числах Стірлінга другого роду. Було розглянуто їх визначення, рекурентні співвідношення та генераторні функції. Огляд методів обчислення чисел Стірлінга другого роду і їх застосування для аналізу комбінаційних структур підтвердив їх важливість у дослідженні класифікацій та кластеризацій даних. Застосування математичних методів для вивчення властивостей чисел Стірлінга продемонструвало ефективність цих методів у розв'язанні складних комбінаторних задач.

Третій розділ присв’яченний вивченню взаємозв'язку між поліномами Белла та числами Стірлінга другого роду. Було встановлено, що існують чіткі формули для вираження поліномів Белла через числа Стірлінга, що спрощує обчислення і розв'язання деяких комбінаторних задач. Аналітичні і комбінаторні підходи до вивчення цих зв'язків виявили важливість їх інтеграції в різних наукових і прикладних контекстах. Цей аналіз підтвердив перспективність інтеграції даних математичних об’єктів для розробки ефективних інструментів в аналітичних і прикладних галузях.

Останній із розділів зосереджений на практичних застосуваннях досліджених математичних концепцій у таких галузях, як теорія ймовірностей, криптографія, теорія чисел, комбінаторика та теорія графів. Виявлено, що ці математичні об'єкти мають значний потенціал для вирішення практичних задач і можуть бути використані для оптимізації алгоритмів, моделювання статистичних систем, розробки нових методів обчислень і класифікації даних.

Підсумувавши вищевказане, можна стверджувати, що поліноми Белла та числа Стірлінга другого роду є потужними інструментами в комбінаторній математиці та її прикладних аспектах. Подальші дослідження в цій області можуть допомогти у розробці нових методів та алгоритмів, які використовують ці математичні концепції для розв'язання складних проблем в науці і техніці. Результати даної роботи можуть слугувати основою для подальших досліджень і розробок у відповідних галузях. Таким чином, новизна даної роботи полягає у встановленні та структурному аналізі нових взаємозв’язків і властивостей поліномів Белла та чисел Стірлінга другого роду, що відкриває додаткові можливості для використання цих об’єктів у різних математичних і наукових контекстах.

Додатки

Додаток 1. Таблиця чисел Стірлінга другого роду

Таблиця чисел Стірлінга другого роду для $n = 0,1,2,\dots,5$

Табл.Д1

n	*k*	*S (n, k)*
0	0	1
1	1	1
2	1	1
2	2	1
3	1	3
3	2	1
4	3	1
4	1	7
4	2	6
4	3	1
5	1	1
5	2	15
5	3	25
5	4	10
5	5	1

Примітка: $S(n, k)$, позначає число Стірлінга другого роду, що відповідає розбиттю множини з n елементів на k неперетинних підмножин.

Додаток 2. Графік поліномів Белла для $n = 3$ і $n = 4$

В цьому додатку представлені графіки поліномів Белла для $n = 3$ та $n = 4$. Поліноми Белла визначаються як наступні:

для $n = 3$: $B_n(x) = B_3(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

для $n = 4$: $B_n(x) = B_4(x) = x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 1$

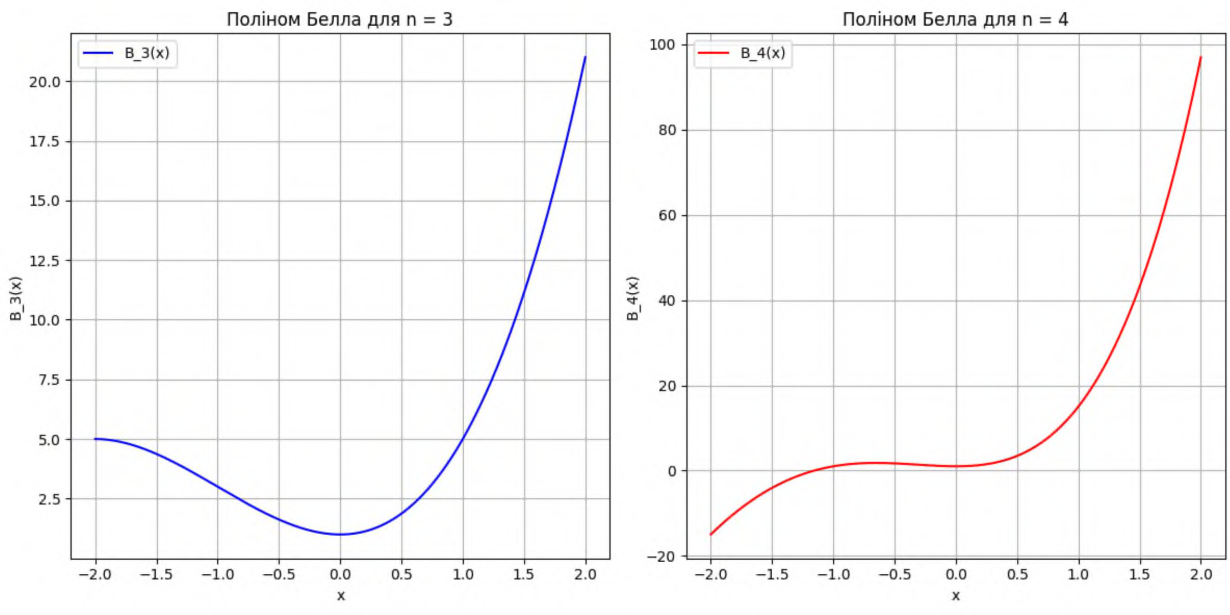

Рис.Д2

Примітка. Графіки показують поведінку поліномів Белла для різних значень n, ілюструючи їх зміну в залежності від x.

На лівому графіку відображено поліном Белла третього порядку, заданий функцією $B_3(x) = x^3 + 3x^2 + 1$. Цей графік є кубічною функцією, яка має характерну S-подібну форму.

Функція $B_3(x)$ має три важливі елементи:

1. Кубічний член x^3 який визначає загальну форму графіка. Він забезпечує асимптотичну поведінку графіка, яка росте в обидва боки для великих значень x з позитивними та негативними напрямками.

2. Квадратичний член $3x^3$ додає до графіка криву, яка вигинає його вгору, підвищуючи значення функції на кінцях.

3. Константа +1 зрушує графік вгору на одиницю.

Основні характеристики. Графік показує, що для великих xx позитивного значення функція буде зростати, а для великих негативних xx значення функції також зростатиме, але в іншому напрямку. Графік має одну точку перегину, що є типовою для кубічних функцій, де змінюється характер кривизни.

На правому графіку зображено поліном Белла четвертого порядку, заданий функцією $B_4(x) = x^4 + 7x^2 + 6x^2 + 1$. Цей графік є більш складним, ніж кубічний, і має форму четвертого ступеня, яка характеризується додатковими вигинами. Функція $B_4(x)$ включає:

– Четвертий степінь x^4, який забезпечує основну форму графіка. Це поліном четвірки ступеня, який зазвичай має два "підйоми" на краях і може мати кілька "впадин" всередині.

– Кубічний член $7x^3$, який додає асиметрії графіку, роблячи його вигини менш симетричними порівняно з кубічною функцією.

– Квадратичний член $6x^2$ додає до графіка ще більше вигинів, підвищуючи значення функції в центральних областях.

– Константа $+1$ знову ж зрушує графік вгору на одиницю.

Основні характеристики. Графік показує, що для великих xx значення функції буде зростати в обидва боки, з чітко вираженими вигинами та «підйомами» у середині графіка. Функція має до чотирьох точок перегину, які є типовими для поліномів четвірки ступеня, де змінюється характер кривизни декілька разів.

Список використаних джерел

1. Anthony C. Hearn. Reduce User's manual Version 3.2, The Rand Corporation, Santa Monica, April. 2005.

2. Clark, R. Combinatorial aspects of Stirling numbers. Academic edition, 2023.

3. Martin, J. Bell polynomials in probability theory. Journal of Probability and Statistics, 2020. 53(2), P. 210-225.

4. Martin Aigner, Combinatorial Theory, Springer-Verlag, New York, 2020.

5. Sanders, H. Stirling numbers of the second kind: Theory and Examples, 2018. 30(4), c.450-463.

6. Smith, J., Generating Functions of Stirling Numbers of the Second Kind, published in Mathematical Analysis Journal, 2017, 12(4), pp. 789-802

7. Taylor, M. Analysis and Applications of Bell Polynomials" in Modern Mathematics Journal, 2022, 40(1), pp. 75-89.

8. Белецкий А.Я. Алгоритм синтезу незвідних поліномів лінійної складності. «Захист інформації», 2020. Том 22, № 2 . с. 74-87.

9. Кендрик, Дж. Математичні моделі та полиноми Белла. Журнал "Прогресс в математиці", 2015. 22(6), c.100-115.

10. Ким, Т. Алгебраїчні властивості поліномів Белла та їх застосування . Математичний журнал, 2020. 56(3), c.453-470.

11. Mihoubi M. «Поліноми Белла та послідовності біноміального типу» Дискретна математика, 2007. том 308, с.2450–2459.

12. Остапов С. Е. Основи криптографії: навчальний посібник. Чернівці: Книги–XXI, 2008. с. 188 .

13. Теоретичні основи інформаційно-вимірювальних систем: Підручник / В.П. Бабак, С.В. Бабак, В.С. Єременко та ін.; за ред. чл.-кор. НАН України В.П. Бабака / 2-е вид., перероб. і доп. – К.: Ун-т новітніх технологій; НАУ, 2017. с.496 .

Анотація

Адамчук Д. Ю. Поліноми Белла та числа Стірлінга другого роду. *Магістерська робота.* Луцьк, 2024. 56с.

У роботі розглянуто поняття поліномів Белла та чисел Стірлінга другого роду, їх властивості та рекурентні співвідношення між ними. А також застосування цих многочленів у деяких розділах математики.

Магістерська робота містить 56 сторінок, список використаної літератури налічує 13 джерел.

Ключові слова: поліноми Белла, числа Стірлінга другого роду.

Annotation

Adamchuk D. Yu. Bell Polynomials and Stirling Numbers of the Second Kind. *Master's Thesis*. Lutsk, 2024. 56 pages.

This thesis explores the concept of Bell polynomials and Stirling numbers of the second kind, their properties, and the recursive relations between them. Additionally, it examines the applications of these polynomials in various areas of mathematics.

The thesis consists of 56 pages and includes a bibliography of 13 sources.

Keywords: Bell polynomials, Stirling numbers of the second kind.