МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра математичного аналізу та статистики

На правах рукопису

ПРИЙМАК АННА ОЛЕКСАНДРІВНА

МНОГОЧЛЕНИ ТА РЯДИ ЧЕБИШЕВА

Спеціальність : 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник :

ФЕДУНИК–ЯРЕМЧУК ОКСАНА

ВОЛОДИМИРІВНА,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол №____________

Засідання кафедри математичного

аналізу та статистики

від ___________ 20___ р.

Завідувач кафедри
доц. Федуник-Яремчук О.В. ________

Луцьк – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми

Декілька останніх десятиліть многочлени Чебишева займають важливе місце в математиці. Вони мають безліч властивостей і на даний момент використовуються як один із методів дослідженнях в різних питаннях математики, фізики та механіки.

Одним із ключових способів представлення функцій і їх обчислення є розклад у ряд за многочленами Чебишева, які мінімально відхиляються від нуля, а саме за многочленами Чебишева першого роду. Властивості цих многочленів забезпечують швидшу збіжність розкладів функцій у порівнянні з розкладами у степеневі ряди на основі інших спеціальних многочленів.

Сьогодні багато комп’ютерних програм використовують многочлени Чебишева, що дозволяє досягти високої ефективності обчислень. Чебишев займався дослідженням різних областей, зокрема приділяв велику увагу розробці шарнірних механізмів та їх теоретичному обґрунтуванню. Одним із важливих напрямів його роботи було вдосконалення механізму паралелограма Уатта, призначеного для перетворення кругового руху в прямолінійний. Основна проблема полягала в тому, що цей механізм, важливий для парових двигунів та інших машин, був недосконалим і призводив до виникнення криволінійного руху замість прямолінійного. Це створювало зайві навантаження, що призводило до зношування механізмів.

Чебишев поставив перед собою задачу розробити механізми, в яких криволінійний рух якомога менше відхилявся від прямолінійного. Важливість цієї роботи для історії математики полягає в тому, що вона стала відправною точкою для створення нового розділу — теорії найкращого наближення функцій многочленами. Першим кроком у цьому напрямку стало дослідження паралелограма Уатта і пошук многочлена певного ступеня, який найменше відхилявся б від нуля на визначеному інтервалі аргументу. У 1854 році Чебишев знайшов такі многочлени, які згодом були названі його ім’ям.

Мета дослідження.

Метою даної магістерської роботи є вивчення основних властивостей многочленів і рядів Чебишева, а також дослідження можливостей їх практичного застосування.

Об’єктом дослідження є многочлени та ряди Чебишева і їхні властивості.

Предмет дослідження – окремі аспекти використання многочленів і рядів Чебишева.

Методи дослідження включають аналіз наукової літератури за темою роботи.

Структура і обсяг роботи: вона складається зі вступу, двох основних розділів із підрозділами, висновків, інформації про згаданих математиків і списку використаних джерел.

Апробація дослідження: результати роботи були представлені у формі тез на XVIII Міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів і молодих науковців «Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень» (14-15 травня 2024 року) на тему «Многочлени Чебишева та рекурентні співвідношення між ними». Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2024. – С. 392–395.

РОЗДІЛ І. МНОГОЧЛЕНИ ЧЕБИШЕВА

1.1. Означення та основні формули

Перш ніж ввести поняття многочленів Чебишева, розглянемо наступну теорему:

Теорема 1.1.1 Будь-який тригонометричний многочлен порядку n

$$f(x) = a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \cdots$$
$$+(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (a_n^2 + b_n^2 \neq 0)$$

представляє собою раціональний многочлен степеня n відносно пари змінних.

Достатньо встановити цей факт до простіших тригонометричних многочленів виду $\cos nx$ і $\sin nx$ (де n - довільне ціле додатне число).

Спочатку доведемо, що існують такі раціональні многочлени

1) $T_n(u)$ степеня n відносно $u = \cos x$ і

2) $U_n(u)$ степеня $n-1$ відносно u, що задовольняють рівності відносно x:

$$\cos nx = T_n(\cos x), \tag{1.1.1}$$

$$\sin nx = U_n(\cos x)\sin x \tag{1.1.2}$$

Вияснимо, що отримується при значеннях $n = 1, 2, 3$.

Якщо $n = 1$, то поклавши

$$T_1(u) = u, U_1(u) = 1 \tag{1.1.3}$$

Якщо $n = 2$, то маємо:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1,$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cos x\sin x\,, \tag{1.1.4a}$$

Отже,

$$T_2(u) = 2u^2 - 1, U_2(u) = 2u \tag{1.1.4}$$

Якщо $n = 3$, то аналогічно одержимо, що

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x =$$
$$=(2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x\sin^2 x =$$

$$=(2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x\,(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

$$\sin 3x = \sin(2x + x)\sin 2x\ \cos x + \cos 2x \sin x =$$

$$= 2\cos^2 x \sin x + (2\cos^2 x - 1)\sin x = (4\cos^2 x - 1)\sin x\,, \qquad 1.1.5a)$$

Отже,

$$T_3(u) = 4u^3 - 3u, \qquad U_3(u) = 4u^2 - 1 \qquad (1.1.5)$$

Наступним кроком скористаємося методом повної індукції. Вважаємо, що існування многочленів $T_n(u), U_n(u)$ встановлено, і вони вже визначені; з'ясуємо, як встановити існування многочленів $T_{n+1}(u)$ і $U_{n+1}(u)$ і як їх визначити.

Користуючись формулами (1.1) і (1.2), які припущені доведеними:

$$\cos(n+1)\,x = \cos(nx + x) =$$

$$= \cos nx \cos x - \sin nx \sin x =$$

$$T_n(\cos x)\cos x - -U_n(\cos x)\sin^2 x =$$

$$= T_n(\cos x)\cos x - U_n(\cos x)(1-\cos^2 x)$$

і, з іншого боку,

$$\sin(n+1)\,x = \sin(nx + x) = \sin nx \cos x + \cos nx + \sin x =.$$

$$= U_n(\cos x)\sin x \cos x + +T_n(\cos x)\sin x = \{U_n(\cos x)\cos x + T_n(\cos x)\}\sin x.$$

Так як $T_n(u)$ і $U_n(u)$, за припущенням многочлени відповідно степенів n і $n-1$, то, очевидно, вирази

$$T_n(u)u - U_n(u)(1-u^2) \text{ і } U_n(u)u + T_n(u)$$

будуть також многочленами степенів відповідно $n+1$ і n. Позначимо їх через $T_{n+1}(u)$ і $U_{n+1}(u)$:

$$T_{n+1}(u) = uT_n(u) + (u^2 - 1)U_n(u),$$

$$U_{n+1}(u) = T_n(u) + uU_n(u) \qquad (1.1.6)$$

Одержимо ті рівності, що й потрібно було довести

$$\cos(n+1)\,x = T_{n+1}(\cos x),$$

$$\sin(n+1)x = U_{n+1}(\cos x)\sin x.$$

Існування многочленів $T_1(u), U_1(u)$, що визначаються формулами (1.1.3), та що задовольняють рівності (1.1.1) та (1.1.2) при $n = 1$ було перевірено раніше. Многочлени $T_n(u), U_n(u)$ при $\mathrm{n} \geq 2$ визначаються за рекурентною формулою (1.1.6).

Отримаємо:

$$T_4(u) = 8u^4 - 8u^2 + 1,$$
$$T_5(u) = 16u^5 - 20u^3 + 5u,$$
$$T_6(u) = 32u^5 - 48u^4 + 18u^2 - 1,$$
$$U_4(u) = 8u^3 - 4u,$$
$$U_5(u) = 16u^4 - 12u^2 + 1,$$
$$U_6(u) = 32u^5 - 32u^3 + 6u.$$

Одержані многочлени $T_n(u)$ називають многочленами Чебишева першого роду, а $U_n(u)$ - многочленами Чебишева другого роду.

Зауваження. Беручи до уваги, що на початку цього пункту многочлени Чебишева другого роду степеня $n-1$ були позначені як $U_n(u)$, необхідно внести коригування і значення многочленів Чебишева другого роду потрібно перепозначити наступним чином:

$$U_0(u) = 1, U_1(u) = 2u, U_2(u) = 4u^2 - 1, U_3(u) = 8u^3 - 4u,$$
$$U_4(u) = 16u^4 - 12u^2 + 1,\ U_5(u) = 32u^5 - 32u^3 + 6u, \dots$$

Перейдемо до іншого способу виведення многочленів Чебишева.

Позначаємо через $P_{n-1}^*(x)$ многочлен степеня $n-1$, який мінімально відхиляється від функції $f(x) = x^n$ на сегменті $[-1; 1]$. Тоді, для будь-якого многочлена $P_{n-1}(x)$ степеня $n-1$, завжди виконується

$$\|x^n - P_{n-1}^*(x)\|_c \leq \|x^n - P_{n-1}(x)\|_c$$

З цього отримуємо, що різниця $x^n - P_{n-1}^*(x)$, що є алгебраїчним многочленом степеня n виду

$$x^n + a_1^* x^{n-1} + \dots + a_n^*, \tag{1.1.7}$$

приймає по нормі найменше значення на $[-1;1]$ порівняно з іншими многочленами степеня n зі старшим коефіцієнтом, який дорівнює одиниці. Тому, такий многочлен називають многочленом степеня n, який мінімально відхиляється від нуля на $[-1;1]$.

Тепер перевіримо, що

$$x^n + a_1^* x^{n-1} + \cdots + a_n^* = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x \qquad (1.1.8)$$

як результат, маємо:

$$E_{n-1}(x^n) = \|x^n - P_{n-1}^*(x)\|_c = \|x^n + a_1^* x^{n-1} + \cdots + a_n^*\|_c = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (1.1.8')$$

Дійсно, так як

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} = \frac{(\cos t + \sqrt{\cos^2 t - 1})^n + (\cos t - \sqrt{\cos^2 t - 1})^n}{2},$$

то, взявши $\cos t = x, t = \arccos x, x \in [-1;1]$, знайдемо

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x = \frac{1}{2^n} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n] \qquad (1.1.9)$$

Розкривши дужки, отримаємо многочлен степеня n з коефіцієнтом при старшому члені, який рівний одиниці, бо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1} x^n} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^n} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n \right] = 1 \qquad (1.1.10)$$

Цей многочлен згідно з формулою (1.1.8) при всіх $x \in [-1;1]$ приймає по модулю значення не більше ніж $\frac{1}{2^{n-1}}$ і в той же час в $(n-1) + 2 = n + 1$ точках $x_0 = \cos 0, x_1 = \cos \frac{\pi}{n}, \ldots, x_n = \cos \pi$ змінно дорівнює $\pm \frac{1}{2^{n-1}}$.

Отже, серед усіх можливих алгебраїчних многочленів степеня $n-1$ функцію x^n найточніше наближається многочленом $P_{n-1}^*(x)$, що

$$x^n - P_{n-1}^*(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x,$$

і цей многочлен є єдиним.

Означення. Многочлен степеня n

$$\cos n \arccos x = \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right], x \in [-1;1], \qquad (1.1.11)$$

називають $n -$ м поліномом Чебишева і позначають його через $T_n(x)$.

Многочлени Чебишева першого і другого роду задаються за допомогою таких формул:

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x \qquad (1.1.12)$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \ \ n = 2,3, \dots \qquad (1.1.13)$$

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x \qquad (1.1.14)$$

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), n = 2,3, \dots \qquad (1.1.15)$$

Щоб спростити запис численних формул, розширимо визначення многочленів Чебишева на цілі від'ємні значення n. Вважатимемо, що многочлени Чебишева з такими індексами обчислюються відповідно до початкових формул (1.12) або (1.14), а також за рекурентним співвідношенням (1.1.13) або (1.1.15), поданими у вигляді

$$T_{n-2}(x) = 2xT_{n-1}(x), \qquad n = 1, 0, -1, \dots. \qquad (1.1.16),$$

$$U_{n-2}(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_n(x), \ \ n = 1,0,-1, \dots \qquad (1.1.17).$$

Зв'язок між поліномами з від'ємними та невід'ємними індексами дуже простий.

Теорема 1.1.2. Для довільного цілого n мають місце формули:

$$T_n = T_{-n} \qquad (1.1.18)$$

$$U_n = -U_{-(n+2)} \qquad (1.1.19)$$

Доведення. Із (1.1.16) маємо, що $T_{-1}(x) = 2x\,T_0(x) - T_1(x) = x = T_1(x)$. Многочлени $T_{-2}, T_{-3}, \dots$ отримуємо із многочленів $T_0, T_{-1} = T$ таким ж способом, як і многочлени $T_2, T_3, \dots$ із $T_0, T_1, \dots$. Звідси слідує (1.1.18).

З $(1.1.17)$ отримуємо, що

$$U_{-1}(x) = 2xU_0(x) - U_1(x) = 0,$$

$$U_{-2}(x) = 2xU_{-1}(x) - U_0(x) = -U_0(x),$$
$$U_{-3}(x) = 2xU_{-2}(x) - U_{-1}(x) = 2xU_0(x) = -U_1(x)$$

…………………………………………………………………………..

Звідси, многочлени $U_{-2}, U_{-3}, \dots$ відрізняються від многочленів $U_0, U_1, \dots$ лише знаком.

Многочлени Чебишева можна подати у декількох явних формах. Найбільш поширеною серед усіх є перша. Якщо обмежитися дійсною областю, то даний тип многочленів і кілька наступних справедливі лише при додаткових припущеннях про змінну.

Теорема 1.1.3. Якщо $|x| \le 1$, то

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad n = 0, \pm 1, \dots \qquad (1.1.20)$$

Якщо $|x| < 1$, то

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)} =$$
$$= (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \sin((n+1)\arccos x), n = 0, \pm 1, \dots . \qquad (1.1.21)$$

Для будь-якого x виконується формула

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x), \;\; n \ne -1. \qquad (1.1.22)$$

Доведення. В даній теоремі потрібно довести відповідність цих формул відповідно з формулами (1.1.12), (1.1.13), і (1.1.14), (1.1.15).

Для многочленів першого роду перевіримо, що

$$\cos(0 \arccos x) = \cos 0 = 1 = T_0(x),$$
$$\cos(1 \arccos x) = x = T_1(x).$$

Справедливість рекурентної формули (1.1.13) випливає з тригонометричної тотожності

$$\cos nt + \cos(n-2)\,t = 2\cos t \cos(n-1)t,$$

якщо підставити в неї $t = \arccos x$.

Таким же чином можна перевірити і рівність (1.1.21). Оскільки

$$\arccos x = \begin{cases} \pi - \arcsin(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, & -1 \le x \le 0, \\ \arcsin(1-x^2)^{\frac{1}{2}}, & 1 \le x \le 0, \end{cases}$$

то $\sin(\arccos x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\sin(2\arccos x) = 2\sin(\arccos x)\cos(\arccos x) = 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Те, що функція (1.1.21) задовольняє рекурентну формулу (1.1.15), випливає із тотожності $\sin nt + \sin(n-2)\,t = 2\cos t\sin(n-1)t$.

Рівність (1.1.22) одержується шляхом диференціювання обох частин формули

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos x).$$

З того факту, що рівність (1.1.22) виконується при $|x| < 1$, випливає тотожність між відповідними коефіцієнтами многочленів U_n і $(n+1)^{-1}T'_{n+1}$, тому формула (1.1.22) залишається дійсною для будь-якого x.

Теорема 1.1.4. Многочлени T_n, U_n є парними функціями при парному n і непарними при непарному n $(n = 0, \pm 1, \dots)$:

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x), \tag{1.1.23}$$

$$U_n(-x) = (-1)^n U_n(x). \tag{1.1.24}$$

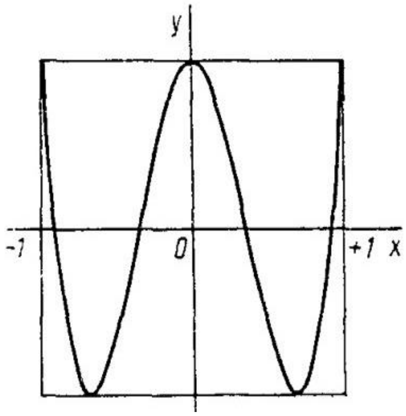
Теорема 1.1.5. Якщо $|x| > 1$, то

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right), \quad n = 0, \pm 1, \dots. \tag{1.1.25}$$

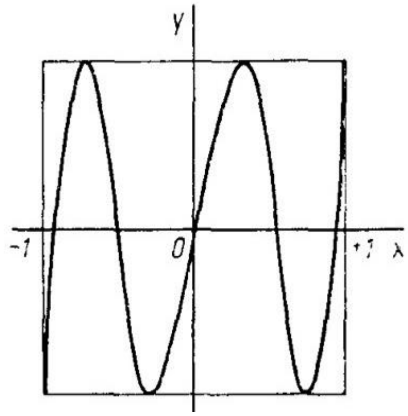
Якщо $|x| > 1$, то

$$U_n(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}}, \;\; n = 0, \pm 1, \dots \tag{1.1.26}$$

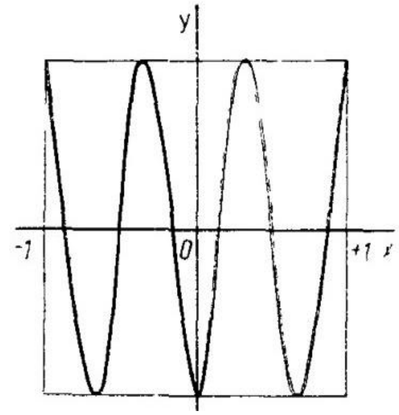
Нижче подано графіки многочленів Чебишева першого роду:



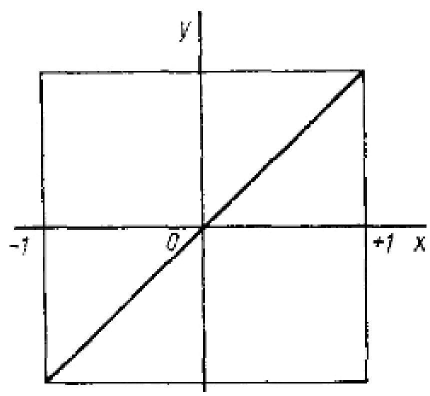
$T_1(x)$



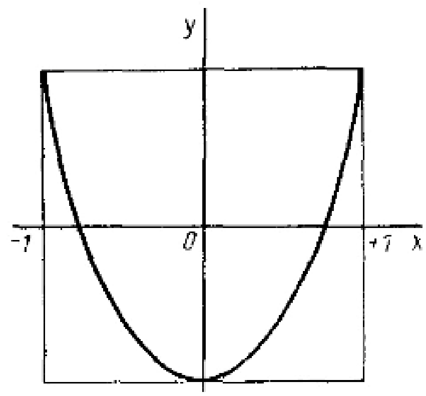
$T_2(x)$



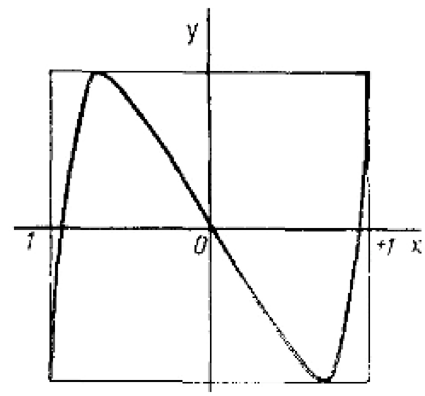
$T_3(x)$



$T_4(x)$



$T_5(x)$



$T_6(x)$

Теорема 1.1.6. Многочлени Чебишева можна представити у вигляді формул:

$$T_n(x) = \begin{vmatrix} x & 2x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

$$U_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

Доведення. У цьому випадку узгодженість з формулами

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$$

та $U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x$ майже очевидна. Для перевірки рекурентних співвідношень

$$T_т(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n = 1,2,3 \dots$$

та

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), n = 1,2,3 \dots$$

використовують вирази для визначника трьохдіагональної матриці порядку n через визначники матриці порядку $n-1$ і $n-2$, які отримують шляхом викреслення останнього рядка та стовпця, або останніх двох рядків та стовпців з початкової матриці.

Обчисливши похідні многочленів Чебишева першого роду, результати для перших п'яти многочленів виглядатимуть так:

n	$T_n(x)$	$T'_n(x)$
1	x	1
2	$2x^2 - 1$	$4x$
3	$4x^3 - 3x$	$12x^2 - 3$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$	$3x^3 - 16x$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$	$80x^4 - 60x^2 + 5$

Можна помітити, що похідні многочленів Чебишева першого роду мають певні закономірності. Ось деякі з їх властивостей:

1) При всіх $k = \overline{0, n}$ мають місце нерівності

$$\left|T_n^{(k)}(x)\right| \leq T_n^{(k)}(1), x \in [-1, 1].$$

Дійсно, так як $T_n(x) = \cos\theta$, де $\theta = \arccos x$, то

$$T'_n(x) = n\frac{\sin n\theta}{\sqrt{1 - x^2}} = n\frac{\sin n\theta}{sin\theta} = 2n[\cos(n-1)\,\theta + \cos(n-3)\,\theta + \cdots]$$

і тому

$$T_n^{(k)}(x) = \sum_j^{n-k} \lambda_j \cos j\theta,$$

де всі $\lambda_j = \lambda_j(k) \geq 0$. Звідси слідує, що

$$\left|T_n^{(k)}(x)\right| \leq \sum_j^{n-k} \lambda_j = T_n^{(k)}(1).$$

2) Має місце формула:

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\dots[n^2-(k-1)^2}{(2k-1)!!}, k = \overline{1, n}.$$

1.2. Нулі та значення многочленів Чебишева

Перейдемо до коренів многочленів Чебишева першого роду. Маємо многочлен

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{1.2.1}$$

Потрібно довести, що на сегменті $[-1, 1]$ даний многочлен має n різних дійсних коренів.

$$T_n(x) = 0, \text{ якщо } n \arccos x = (2k-1)\frac{\pi}{2},$$

Звідки

$$x = \cos\frac{(2k-1)}{2n}\pi\,. \tag{1.2.2}$$

У випадку, якщо k надати значень $1,2, \dots n$, тоді отримаємо n різних значень кореня многочлена $T_n(x)$:

$$x = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \tag{1.2.3}$$

Справді, якщо $k < l$ – будь-які два числа із значень $1, 2, \dots n$, то

$$0 < \frac{2k-1}{2n}\pi < \frac{2l-1}{2n}\pi < \pi,$$

а ми знаємо, що на інтервалі $[0, \pi]$ косинус монотонно спадає від 1 до -1, то

$x_k > x_l$, а $T_n(x)$ - многочлен степеня n, то будь-яких інших коренів, окрім (1.2.3) він мати ніяк не може. Цей факт можна довести із загальної формули коренів (1.2.2):

$$x_{n+p} = \cos\frac{2n+2p-1}{2n}\pi = \cos\left(\pi + \frac{(2p-1)}{2n}\pi\right) =$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{(2p-1)}{2n}\pi\right) = x_{n-p+1}.$$

Доведемо, що корені розташовані симетрично відносно середини. Для парного n всі корені многочлена $T_n(x)$ утворюють пари, рівновіддалені від кінців відрізка $[-1,1]$. У випадку непарного n єдиним коренем буде число 0, яке є серединою відрізка $[-1,1]$. Розглянемо довільне число k із набору $1,2,\dots n$. Якщо ми рахуватимемо корені від кінця відрізка до початку, то на k-му місці від кінця буде стояти число $n-(k-1) = n-k+1$, і

$$\cos\frac{2(n-k+1)}{2n}\pi = \cos\left(\pi - \frac{2k-1}{2n}\pi\right) = -\cos\frac{(2k-1)}{2n}\pi,$$

тобто,

$$x_{n-k+1} = -x_k,$$

що і потрібно було довести.

Доведемо наступну теорему про властивість коренів сусідніх многочленів Чебишева.

Теорема 1.2.1. Між двома сусідніми коренями $x_k^{(n)}$ *і* $x_{k+1}^{(n)}$ многочлена $T_n(x)$ обов'язково знаходиться один і лише один корінь $x_k^{(n-1)}$ многочлена $T_{n-1}(x)$.

Доведення. Дійсно, k-й корінь многочлена $T_{n-1}(x)$ є

$$x_k^{(n-1)} = cos\frac{(2k-1)}{2n-2}\pi.$$

З'ясуємо, що

$$x_k^{(n)} > x_k^{(n-1)} > x_{k+1}^{(n)}, \tag{1.2.4}$$

(ми знаємо, що косинус- це спадна функція (при $0 \leq \theta \leq \pi$), тоді корені $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ розміщені у спадному порядку), або що те саме

$$\frac{2k-1}{2n} < \frac{2k-1}{2n-2} < \frac{2k+1}{2n}.$$

Але перша частина даної нерівності очевидна, не потребує додаткового доведення, а друга еквівалентна нерівності $2k < 2n-1$, що випливає з того, що $k < n$. Таким чином, нерівність (1.2.4) встановлено. Оскільки, між кожними двома n коренями $x_k^{(n)}$ є $n-1$ інтервал, у якому міститься корінь полінома $T_{n-1}(x)$, то очевидно, що в кожному інтервалі знаходиться рівно один корінь, бо всього їх є $n-1$. Теорему доведено.

Наслідок. Два сусідніх многочлена $T_n(x)$ та $T_{n-1}(x)$ не мають однакових коренів.

Якщо взяти до уваги екстремальні точки $\{\xi_k^{(n)}\}$ многочлена $T_n(x)$, то з (1.2.1) випливає, що такі точки можна визначити умовами $n \arccos \xi_k^{(n)} = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, з яких знаходимо $n+1$ неоднакових точок.

$$\xi_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{n}, k = 0,1,2, \dots n. \tag{1.2.5}$$

У зв'язку з тим, що $T_n(\xi_k^{(n)}) = (-1)^k$, то знаки сусідніх екстремумів протилежні. Тепер, якщо точок (1.2.5) всього маємо $n+1$, то похідна $T_n'(x)$ на інтервалі $(-1, 1)$ має $n-1$ нулів і тому, можна стверджувати, що за межами сегмента $[-1, 1]$ многочлен Чебишева першого роду буде змінюватись монотонно.

Завдяки формулі

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

маємо рівність

$$U_n(x) = \left(\frac{1}{n+1}\right) T_{n+1}'(x) \tag{1.2.6}$$

із якої випливає, що екстремальні точки многочлена $T_{n+1}(x)$ є нулями многочлена $U_n(x)$, які отримуємо із формули (1.2.5) шляхом заміни n на $n+1$.

У результаті, нулі многочлена $U_n(x)$ матимуть вигляд:

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \qquad k = 0, 1, 2 \dots, n.$$

За формулою (1.2.6) можна також визначити деякі частинні значення многочленів Чебишева і їх похідних:

$$T_n(1) = 1, \qquad T_n(-1) = (-1)^n,$$
$$T_{2n}(0) = (-1)^n, \qquad T_{2n+1}(0) = 0,$$
$$T_n'(1) = n^2, \qquad T_n'(-1) = (-1)^n n^2,$$
$$T'_{2n}(0) = 0, \qquad T'_{2n+1}(0) = (2n+1)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

1.3. Оцінки та рекурентні співвідношення

Маючи тригонометричну рівність,

$$\cos(n+1)\,\theta + \cos(n-1)\,\theta = 2\cos\theta\cos n\theta,$$

і покладаючи в ній $\theta = \arccos x$, для функції

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x), \qquad x \in [-1, 1], n = 0, 1, 2, \tag{1.3.1}$$

одержимо рекурентне співвідношення для многочленів Чебишева першого роду:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \tag{1.3.2}$$

Для розгляду певних оцінок многочленів Чебишева, запишемо ортонормовані многочлени Чебишева, що виражаються через многочлени (1.3.1) за допомогою наступних формул:

$$\widehat{T_n}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x), n \geq 1,$$

$$\widehat{T_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \tag{1.3.3}$$

Так як, старший коефіцієнт многочлена $T_n(x)$ є 2^{n-1}, то із формули (1.3.2) маємо, що многочлени Чебишева з одиничним старшим коефіцієнтом матимуть наступний вигляд:

$$\widetilde{T_n}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \qquad n \geq 1 \tag{1.3.4}$$

Далі, у зв'язку з тим, що $\cos x$ є обмеженою функцією і $|\cos x| \leq 1$, то із формул (1.3.1), (1.3.3) та (1.3.4) одержимо наступні оцінки для многочленів Чебишева першого роду:

$$|T_n(x)| \leq 1, \qquad x \in [-1, 1]$$

$$|T_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\left|\widetilde{T_n}(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}, \ \ x \in [-1, 1].$$

Теорема 1.3.1. Якщо x - дійсне число, причому $|x| > 1$,

$$|T_n(x)| \leq \left(|x| + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n. \tag{1.3.5}$$

Доведення. Справді, із формули Муавра

$$\cos n\theta + isin\, n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

одержуємо, що

$$\cos n\theta - i\sin n\theta = (\cos\theta - i\sin\theta)^n.$$

Почленно додаємо ці дві рівності, і в результаті отримаємо наступну рівність:

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}[(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n]$$

Взявши $\theta = \arccos x$ (вважаючи $|x| \leq 1$), одержимо, що

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1 - x^2}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} i^k \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^k (1 + (-1)^k).$$

Так як, при непарному k усі доданки- нулі, а при парному корінь зникає і права частина є многочленом, то остання формула справедлива при будь-якому x.

Якщо k - парне, то $i^k(\sqrt{1-x^2})^k = (\sqrt{x^2-1})^k$.

Тому,

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^k (1+(-1)^k),$$

і звідси

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right].$$

Через те, що кожен із двочленів $x-\sqrt{x^2-1}$ та $x+\sqrt{x^2-1}$ має модуль, який не перевищує $|x|+\sqrt{x^2-1}$, то одержуємо нерівність (1.3.5), яку і потрібно було довести.

Так само і для многочленів Чебишева другого роду

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1.3.6}$$

із тригонометричної тотожності $\sin(n+2)\,\theta + \sin n\theta = 2\sin(n+1)\theta cos\theta$, вважаючи, що $\theta = \arccos x$. Поділимо її почленно на $\sqrt{1-x^2}$, одержуємо рекурентну формулу:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

Із формул (1.3.6) отримаємо оцінку для многочленів Чебишева другого роду, а саме

$$|U_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Теорема 1.3.2. При довільних цілих $n, m \ge 0$ виконуються тотожності

$$\sum_{j=0}^{m} T_{n-2j}(x) = \frac{1}{2}\left(U_n(x) - U_{n-2m-2}(x)\right), \tag{1.3.7}$$

$$\sum_{j=0}^{m} x^j T_{n-j}(x) = U_n(x) - x^{m+1} U_{n-m-1}(x), \qquad (1.3.8)$$

$$\sum_{j=0}^{m} x^{m-j} T_{n-j}(x) = x^{m+1} U_{n-1}(x) - U_{n-m-2}(x), \qquad (1.3.9)$$

$$\sum_{j=0}^{m} U_{n-2j}(x) = \frac{T_{n+2}(x) - T_{n-2m}(x)}{2(x^2-1)}, \qquad (1.3.10)$$

$$\sum_{j=0}^{m} x^j U_{n-j}(x) = \frac{T_{n+2}(x) - x^{m+1} T_{n-m+1}(x)}{x^2-1}, \qquad (1.3.11)$$

$$\sum_{j=0}^{m} x^{m-j} U_{n-j}(x) = \frac{x^{m+1} T_{n+1}(x) - T_{n-m}(x)}{x^2-1}. \qquad (1.3.12)$$

В тому числі, мають місце формули

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\big(U_n(x) - U_{n-2}(x)\big), \qquad (1.3.13)$$

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x), \qquad (1.3.14)$$

$$T_n(x) = xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \qquad (1.3.15)$$

$$U_n(x) = \frac{T_{n+2}(x) - T_n(x)}{2(x^2-1)}, \qquad (1.3.16)$$

$$U_n(x) = \frac{T_{n+2}(x) - xT_{n+1}(x)}{x^2-1}, \qquad (1.3.17)$$

$$U_n(x) = \frac{xT_{n+1}(x) - T_n(x)}{x^2-1}. \qquad (1.3.18)$$

Доведення. Оскільки, формули (1.3.13) – (1.3.18) є частинними випадками формул (1.3.7) – (1.3.12) при $m = 0$, спочатку доведемо їхню справедливість. Формула (1.3.13) випливає із теореми 1.1.2 і тригонометричної тотожності

$$\sin t \cos nt = (\sin(n+1)\,t - \sin(n-1)\,t)/2$$

якщо підставити $t = \arccos x$.

Формули (1.3.14) та (1.3.15) отримаємо із (1.3.13) за допомогою рекурентної формули (1.1.15). Формулу (1.3.16) одержимо із (1.3.14) і з тої ж рекурентної формули:

$$T_{n+2}(x) - T_n(x) = U_{n+2}(x) - xU_{n+1}(x) - U_n(x) + xU_{n-1}(x) =$$
$$= 2xU_{n+1}(x) - U_n(x) - xU_{n+1}(x) - U_n(x) + xU_{n-1}(x) =$$
$$= x(U_{n+1}(x) - U_n(x) + xU_{n-1}(x) = x\big(U_{n+1}(x) - U_{n-1}(x)\big) - 2U_n(x) =$$
$$= 2(x^2 - 1)U_n(x).$$

Формули (1.3.17), (1.3.18) можна отримати із (1.3.16) за допомогою рекурентної формули (1.1.13).

Для $m > 0$ формули (1.3.7) – (1.3.12) слідують із формул (1.3.13) – (1.3.18). Щоб довести (1.3.7), додамо обидві частини формул:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\big(U_n(x) - U_{n-2}(x)\big),$$
$$T_{n-2}(x) = \frac{1}{2}\big(U_{n-2}(x) - U_{n-4}(x)\big)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$T_{n-2m}(x) = \frac{1}{2}\big(U_{n-2m}(x) - U_{n-2m-2}(x)\big).$$

Тотожність (1.3.8) одержуємо із формул

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x),$$
$$T_{n-1}(x) = U_{n-1}(x) - xU_{n-2}(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T_{n-m}(x) = U_{n-m}(x) - xU_{n-m-1}(x),$$

якщо домножити обидві їх частини на $1, x, \ldots, x^m$ і додати їх. Аналогічно, можна довести і решту тотожностей.

Теорема 1.3.3. Для довільних цілих m, n справедливі тотожності

$$T_nT_m = \frac{1}{2}(T_{m-n} + T_{m+n}), \qquad (1.3.19)$$

$$U_mT_n = \frac{1}{2}(U_{m-n} + U_{m+n}), \qquad (1.3.20)$$

$$U_m(x)U_n(x) = \frac{T_{n-m}(x) - T_{n+m+2}(x)}{2(x^2-1)}, \tag{1.3.21}$$

$$U_m U_n = \sum_{k=0}^{n} U_{m-n+2k}, \quad n \geq 0, \tag{1.3.22}$$

і

$$T_m(x)T_n(x) \pm (1-x^2)U_{m-1}(x)U_{n-1}(x) = T_{m\mp n}(x), \tag{1.3.23}$$

$$U_{m-1}(x)T_n(x) \pm T_m(x)U_{n-1}(x) = U_{m\pm n-1}(x), \tag{1.3.24}$$

якщо взяти обидва верхніх або нижніх знаки.

Доведення. Тотожності (1.3.23), (1.3.24) відповідають тригонометричним тотожностям

$$\cos mt \cos nt \pm \sin mt \sin nt = \cos(m \mp n)\, t,$$

$$\sin mt \cos nt \pm \cos mt \sin nt = \sin(m \pm n)\, t.$$

Формули (1.3.19) – (1.3.21) можна отримати шляхом додавання або віднімання двох формул (1.3.23) або формул (1.3.24), взявши в них протилежні значення знаків. Формула (1.3.22) слідує із (1.3.21), (1.3.10).

Теорема 1.3.4. Для довільних цілих m, n справедливі формули

$$T_m(T_n) = T_{mn}, \tag{1.3.25}$$

$$U_{m-1}(T_n) = U_{n-1}U_{mn-1}. \tag{1.3.26}$$

Доведення. Перша формула слідує із (1.1.20):

$$T_m\big(T_n(x)\big) = \cos[m \arccos(\cos(n \arccos x))] = \cos(mn \arccos x) = T_{mn}(x),$$

а другу можна отримати в результаті почленного диференціювання першої.

Теорема 1.3.5. Для довільного цілого $m \geq 0$ мають місце наступні формули

$$x^m = 2^{-m+1} \sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]} \binom{m}{i} T_{m-2i}(x), \tag{1.3.27}$$

$$x^m = 2^{-m} \sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]} \frac{m+1-2i}{m+1-i} \binom{m}{i} U_{m-2i}(x). \tag{1.3.28}$$

За допомогою попередньої теореми, можна виразити степені змінної у вигляді лінійної комбінації многочленів Чебишева першого та другого роду:

$$1 = T_0(x), x = T_1(x),$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\big(T_2(x) + T_0(x)\big),$$

$$x^3 = \frac{1}{4}\big(T_3(x) + 3T_1(x)\big), \tag{1.3.29}$$

$$x^4 = \frac{1}{8}(T_4(x) + 4T_2(x) + 3T_0(x)),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$1 = U_0(x), x = \frac{1}{2}U_1(x),$$

$$x^2 = \frac{1}{4}\big(U_2(x) + U_0(x)\big),$$

$$x^3 = \frac{1}{8}\big(U_3(x) + 3U_1(x)\big) \tag{1.3.30}$$

$$x^4 = \frac{1}{8}(T_4(x) + 4T_2(x) + 3T_0(x)),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$

1.4. Диференціальні рівняння і многочлени Чебишева

Многочлени Чебишева є розв’язками диференціальних рівнянь, які можна вивести з їх тригонометричного представлення.

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),\ \ n = 0, \pm 1, \dots, \tag{1.4.1$'$}$$

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)} =$$

$$= (1 - x^2)^{-1/2}\sin((n+1)\arccos x), n = 0, \pm 1, \dots \tag{1.4.2$'$}$$

Теорема 1.4.1. Многочлен Чебишева $T_n(x)$ і функція

$$(1 - x)^{\frac{1}{2}}U_{n-1}(x)$$

є розв'язками диференціального рівняння для довільного цілого n

$$(1-x^2)(y')^2 = n^2(1-y)^2, \tag{1.4.1}$$

а многочлен Чебишева $U_n(x)$ і функція

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}T_{n+1}(x)$$

є розв'язками диференціального рівняння

$$((1-x^2)y' - xy)^2 = (n+1)^2(1-x^2)y^2). \tag{1.4.2}$$

Доведення. Дослідимо другу частину даної теореми. Із (1.4.2') випливає що

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}U_n(x) = \sin((n+1)\arccos x). \tag{1.4.3}$$

Якщо дану рівність диференціювати почленно, матимемо:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}U_n'(x) - x(1-x)^{-\frac{1}{2}}U_n(x) =$$

$$= -(n+1)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cos((n++1)\arccos x).$$

Отримане рівняння помножимо на $(1-x^2)^{1/2}$ в обох частинах і піднесемо до квадрату:

$$((1-x^2)U_n'(x) - xU_n(x))^2 = (n+1)^2[1-\sin^2((n+1)\arccos x)].$$

Диференціюємо почленно наступну рівність

$$(1-x)^{\frac{1}{2}}\left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}T_{n+1}(x)\right) = \cos((n+1)\arccos x),$$

і доводимо, що ще одним розв'язком рівняння (1.4.2) є функція

$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\ T_{n+1}(x)$. Водночас, враховуємо рівність $T_m(-1) = (-1)^m$, що випливає із (1.4.1').

Отже, многочлени Чебишева є також розв'язками простих лінійних однорідних рівнянь другого порядку.

Теорема 1.4.2. Для довільного цілого n многочлен Чебишева $T_n(x)$ і функція $(1-x)^{\frac{1}{2}}U_{n-1}(x)$ є розв'язками диференціального рівняння

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0. \tag{1.4.4}$$

а многочлен Чебишева $U_n(x)$ і функція $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,T_{n+1}(x)$ є розв'язками наступного рівняння

$$(1-x^2)y''-3xy'+n(n+2)y=0. \qquad (1.4.5)$$

Теорема 1.4.3. Для довільного цілого n многочлен Чебишева $T_n(x)$ і функція $(1-x)^{\frac{1}{2}}U_{n-1}(x)$ задовольняють диференціальне співвідношення

$$(1-x^2)y^{(m+2)}-(2m+1)xy^{(m+1)}+(n^2-m^2)y^{(m)}=0, m=0,1,\ldots \qquad (1.4.6)$$

а многочлен Чебишева $U_n(x)$ і функція $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}T_{n+1}(x)$ задовольняють диференціальне рівняння

$$(1-x^2)y^{(m+2)}-(2m+3)xy^{(m+1)}+((n+1)^2-(m+1)^2y^{(m)}=0,$$
$$m=0,1,\ldots \qquad (1.4.7)$$

Рівняння $(4.6), (4.7)$ при $m=0$ є просто рівняннями (4.4) та (4.5).

1.5. Многочлени Чебишева та середньоквадратичне наближення

У даному пункті зосередимося на функціональному просторі $L_2(a,b,\omega)$.

Він визначається на основі сегмента $[a,b]$ та вагової функції ω невід'ємної та інтегровної на цьому відрізку та дорівнює нулю на множині міри нуль.

Простір $L_2(a,b,\omega)$ є сукупністю тих вимірних на відрізку $[a,b]$ функцій f, для яких добуток ωf^2 є інтегровний на цьому відрізку.

Для функції $L_2(a,b,\omega)$ з простору визначається скалярний добуток

$$(f,g)=\int_a^b \omega(x)f(x)g(x)dx \qquad (1.5.1)$$

і норма

$$\|f\|_2=(f,f)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_a^b \omega(x)f^2(x)dx\right)^{1/2} \qquad (1.5.2)$$

Простір $L_2(a,b,\omega)$ є окремим випадком простору $L_p(a,b,\omega)$ $(p \geq 1)$, який складається з таких вимірних функцій f, для яких добуток ωf^p є інтегровний. В цьому більш загальному просторі норма визначається формулою

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b \omega(x)|f(x)|^p dx\right)^{1/2} \tag{1.5.3}$$

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a,b]$, то при $p \to \infty$ норма (1.5.3) прямує до границі

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|. \tag{1.5.4}$$

У функціональних просторах розглядається задача наближення або апроксимації функцій.

Похибкою наближення функції f іншою функцією g називають норму $\|f-g\|_2$ різниці цих функцій. На практиці для визначеної функції f , яка є досить складною, шукають іншу функцію g, яка простіша від розглянутої і незначно відрізняється від f, тобто забезпечує малу похибку $\|f-g\|_2$.

Вважатимемо, що для заданого цілого $n \geq 0$ функція f наближається за допомогою многочленів степеня не більше n. Задача найкращого наближення функції f полягає в знаходженні:

1) многочлена найкращого наближення степеня n, тобто многочлена W степеня не більше n, для якого похибка $\|f-W\|_2$ є найменшою;
2) похибки найкращого наближення степеня n, тобто мінімальне значення такої похибки.

Очевидним є доведення існування та єдиності многочлена найкращого наближення при середньоквадратичному наближенні. Це і дає формули для многочлена найкращого наближення степеня n. При цьому використовують поняття ортогональності послідовності многочленів.

Для простору $L_2(a,b,\omega)$ послідовність $\{P_k\}(k=0,1,\dots)$ многочленів називається ортогональною послідовністю на відрізку [a,b] з вагою ω , якщо для будь-якого k степінь многочлена P_k дорівнює k, і за умови ортогональності $(P_k, P_l) = 0,\ k, l = 0,1, \dots; k \neq l$.

Якщо мають місце також рівності $(P_k, P_k) = 1$ або $\|P_k\|_2 = 1, k = 0,1, \dots$, то послідовність $\{P_k]$ називається ортонормованою на відрізку $[a, b]$ з вагою ω.

Вочевидь, довільній ортогональній послідовності $\{P_k\}$ відповідає ортонормована послідовність

$$\{\|P_k\|_2^{-1} P_k\} \tag{1.5.5}$$

Можна легко показати, що для довільного відрізка $[a, b]$ і довільної вагової функції ω (яка підходить умовам, сформульованим на початку даного пункту) існує відповідна ортогональна послідовність многочленів. Приміром, ортогональними є послідовності многочленів Чебишева.

Теорема 1.5.1. Послідовність $T_0, T_1, \dots$ многочленів Чебишева першого роду ортогональна на відрізку $[-1, 1]$ з вагою $(1 - x^2)^{-1/2}$.

Послідовність $U_0, U_1, \dots$ многочленів Чебишева другого роду ортогональна на відрізку $[-1, 1]$ з вагою $(1 - x^2)^{-1/2}$. Відповідні ортонормовані послідовності складаються з многочленів

$$\sqrt{1/\pi}\, T_0, \sqrt{2/\pi}\, T_k, k = 1,2, \dots, \tag{1.5.6}$$

$$\sqrt{2/\pi} U_k, k = 0,1, \dots, \tag{1.5.7}$$

Доведення. Спочатку, для того, щоб довести частину теореми, що стосується многочленів T_k, обчислимо наступні інтеграли

$$I_{kl} = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} T_k(x) T_l(x) dx. \tag{1.5.8}$$

Користуючись формулою $T_n(x) = \cos(n\, arccos\, x)$, маємо:

$$I_{kl} = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(k \arccos x) \cos(l \arccos x)\, dx.$$

Підставивши $x = \cos t$, одержимо формулу:

$$I_{kl} = \int_0^{\pi} \cos kt \cos lt \, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(k-l)\,t + \cos(k+l)\,t dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k-l)\,t}{k-l} + \frac{\sin(k+l)\,t}{k+l}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \begin{cases} \pi, & k = l = 0, \\ \frac{\pi}{2} & k = l \neq 0, \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \tag{1.5.9}$$

На основі цього многочлени T_k ортогональні і

$$\|T_k\|_2 = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & k = 0, \\ \sqrt{\pi/2}, & k \neq 0. \end{cases} \tag{1.5.10}$$

Отже, із (1.5.5) випливає, що ортонормована послідовність має вигляд (1.5.6). Таким же чином можна перевірити і другу частину теореми.

Теорема 1.5.2. Якщо послідовність многочленів $\{P_k\}$ ортогональна на відрізку $[a, b]$ з вагою ω, то для довільного цілого невід'ємного n і довільної функції $f \in L_2(a, b, \omega)$ єдиним многочленом найкращого наближення степеня n є многочлен

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(f, P_k)}{\|P_k\|_2^2} P_k \tag{1.5.11}$$

а похибкою найкращого наближення степеня n є число

$$\left(\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(f, P_k)^2}{\|P_k\|_2^2}\right)^{1/2} \tag{1.5.12}$$

Якщо послідовність $\{P_k\}$ ортонормована, то вирази (1.5.11) і (1.5.12) можна спростити. Тоді, вони матимуть вигляд:

$$\sum_{k=0}^{n} (f, P_k) P_k, \tag{1.5.13}$$

$$\left(\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n}(f, P_k)^2\right)^{1/2}. \tag{1.5.14}$$

Теорема 1.5.3. Нехай p_n– коефіцієнт при x^n ортогонального многочлена P_n. Серед усіх многочленів виду $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ з фіксованим коефіцієнтом a_0 і довільними коефіцієнтами $a_1, a_n, \dots a_n$ многочлен $a_0P_n^{-1}$, і лише він, має найменшу норму $\|\cdot\|_2$.

Зрозуміло, що відрізок $[a, b]$ і вагова функція ω фіксовані. Від них залежить норма, а, отже, і ортогональна послідовність $\{P_k\}$.

З цих двох теорем можна зробити висновки, що характеризують роль многочленів Чебишева в середньоквадратичному наближенні та їх екстремальні властивості у відповідних просторах L_2.

Теорема 1.5.4. Для довільного цілого невід'ємного n і довільної функції $f \in L_2(-1, 1; (1-x^2)^{-\frac{1}{2}})$ многочлен найкращого наближення степеня n рівний

$$\sum_{k=0}^{n}{}' a_k[f]T_k, \tag{1.5.15}$$

(тут і надалі, знак $'$ означає, що при $l = 0$ беремо половину доданка з метою спрощення подальших формул), де

$$a_k[f] = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}f(x)T_k(x)dx, \qquad k = 0, 1, \dots. \tag{1.5.16}$$

Для довільної функції $f \in L_2(-1, 1; (1-x^2)^{-\frac{1}{2}})$ многочлен найкращого наближення степеня n рівний

$$\sum_{k=0}^{n} b_k[f]U_k, \tag{1.5.17}$$

де

$$b_k[f] = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}f(x)U_k(x)dx, \quad k = 0, 1, \dots. \tag{1.5.18}$$

РОЗДІЛ II. РЯДИ ЧЕБИШЕВА

2.1. Ряди Чебишева

Розглянемо функцію f, визначену на відрізку $[-1, 1]$. Припустимо, що на цьому інтервалі її можна подати у вигляді ряду за допомогою многочленів Чебишева першого роду, тобто існують такі сталі $a_0, a_1, \ldots$, що

$$f = \sum_{l=0}^{\infty}{}' a_l T_l \tag{2.1.1}$$

Як було показано в попередній теоремі, многочлени T_l ортогональні на відрізку $[-1, 1]$ з ваговою функцією $(1 - x^2)^{-1/2}$ і

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} T_k^2(x) dx = \begin{cases} \pi, & k = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & k > 0 \end{cases}$$

Помноживши обидві частини рівняння (2.1.1) на вираз

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} T_k^2(x)$$

та проінтегрувавши на інтервалі $[-1, 1]$, отримаємо формули для коефіцієнтів a_k у розкладі (2.1.1):

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} f(x) T_k(x) dx, \qquad k = 0,1, \ldots$$

Позначимо ці коефіцієнти через $a_k[f]$:

$$a_k[f] = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} f(x) T_k(x) dx, \qquad k = 0,1, \ldots \tag{2.1.2}$$

Використовуючи заміну $x = \cos t$ отримаємо рівносильну і часто зручну формулу:

$$a_k[f] = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(\cos t) \cos kt dt \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2.1.3}$$

Величину $a_k[f]$ $(k = 0, 1, \dots)$ називають $k-$м коефіцієнтом Чебишева функції f. Нескінченний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}{}' = a_k[f]T_k \tag{2.1.4}$$

з цими коефіцієнтами називають рядом Чебишева функції f.

Доведемо, що ряд (2.1.4) збігається до функції $f(x)$.

Оскільки многочлени Чебишева рівномірно обмежені на всьому інтервалі $[-1, 1]$, то згідно з теоремою (Якщо відрізок $[a,\ b]$ скінченний і допоміжна функція

$$\varphi_x(t)\ (\varphi_x(t) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t}, t \in [a, b])$$

при фіксованому $x \in [a, b]$ належить класу $L_2 = L_2[a, b; h(t)]$, а послідовність ортонормованих многочленів $\{P_n(x)\}$ обмежена в точці x, то ряд Фур'є по ортогональним многочленам функції $f(x)$ збігається до неї в цій точці x) ряд (2.1.4) збігається до функції $f(x)$, якщо ця функція задовольняє, наприклад, умову Ліпшиця.

Проте, використовуючи тригонометричне представлення многочленів Чебишева, ми отримаємо більш загальний результат. Застосовуючи формулу (2.1.3), маємо:

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(\cos\tau) \cos n\tau d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\tau) \cos n\tau\, d\tau, \qquad n \geq 1, \tag{2.1.5}$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(\cos\tau)\, d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\tau) d\tau.$$

З іншої сторони, введемо парну функцію $F(\theta) = f(cos\theta)$ і розглянемо її ряд Фур'є з косинусів

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta. \tag{2.1.6}$$

Ряди (2.1.4) і (2.1.6) при умові $x = \cos\theta$ почленно рівні. Отже, при $x = \cos\theta$ має місце рівність

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k[f]T_k(x) = F(\theta) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta. \qquad (2.1.7)$$

З цього слідує, що питання про представлення функції $f(x)$ на сегменті $[-1, 1]$ рядом (2.1.4) зводиться до питання про збіжність ряду (2.1.6) парної функції $F(\theta) = f(\cos\theta)$.

Зокрема, якщо модуль неперервності

$$\omega(\delta, F) = \sup_{|\theta-\tau|\le\delta} |F(\theta) - F(\tau)|$$

функції $F(\theta)$ задовольняє умову Діні

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta, F) \ln\frac{1}{\delta} = 0 \qquad (2.1.8)$$

то ця функція розкладається в ряд Фур'є з косинусів

$$F(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta, \qquad (2.1.9)$$

причому, цей ряд збігається рівномірно на відрізку $[-\pi, \pi]$.

Теорема 2.1.1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[-1, 1]$ і її модуль неперервності $\omega(\delta, f)$ на цьому сегменті задовольняє умову Діні, тобто

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta, F) \ln\frac{1}{\delta} = 0, \qquad (2.1.10)$$

то ця функція розкладається в ряд Фур'є з многочленів Чебишева

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[f]T_n(x), \quad x \in [-1, 1], \qquad (2.1.11)$$

що збігається рівномірно на усьому сегменті $[-1, 1]$.

Доведення. Нехай δ - фіксоване і $|\theta - \tau| \le \delta$. Тоді для $x = \cos\theta$ і $t = \cos\tau$ маємо

$$|x - t| = |\cos\theta - \cos\tau| \le |\theta - \tau| \le \delta.$$

Далі, при тих же умовах отримаємо

$$|F(\theta) - F(\tau)| = |f(\cos\theta) - f(\cos\tau)| = |f(x) - f(t)| \le \omega(\delta, f).$$

Тому, між модулями неперервності функцій $F(\theta)$ і $f(x)$ має місце нерівність $\omega(\delta, F) \le \omega(\delta, f)$.

Отож, із умови (2.1.10) слідує умова (2.1.8), якої достатньо для збіжності ряду (2.1.9) і почленно рівного йому при умові $x = \cos\theta$ ряду (2.1.4). Отже, теорему доведено.

Якщо ряд (2.1.4) збігається до функції $f(x)$, то за допомогою його частинних сум, тобто многочлени

$$\sigma_n f = \sum_{k=0}^{n}{}' a_k\,[f] T_k \tag{2.1.12}$$

можуть забезпечувати досить точне наближення для функції f. Перший випадок стосується середньоквадратичного наближення з вагою $(1 - x^2)^{-1/2}$ на інтервалі $[-1, 1]$, тобто, коли похибка наближення функції f із простору

$L_2(-1, 1; (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}})$ функцією g із того ж простору визначається як

$$\|f - g\|_2 = \left[\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (f(x) - g(x))^2 dx\right]^{1/2} \tag{2.1.13}$$

При цьому частинна сума (2.1.12) надає для функції f наближення, яке є найкращим серед всіх многочленів степеня не вище n (теорема 1.5.4 розділу 1).

Другий випадок стосується рівномірного наближення на інтервалі $[-1, 1]$ відповідно з похибкою наближення

$$\|f - g\|_\infty = \max_{|x| \le 1} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in C_{[-1,1]} \tag{2.1.14}$$

При цьому сума $\sigma_n f$ наближає функцію f з похибкою

$$\|f - \sigma_n f\|_\infty, \tag{2.1.15}$$

яка лише трохи перевищує похибку n-го наближення тієї ж функції з допомогою многочлена найкращого наближення степеня n $E_n(f)$.

Теорема 2.1.2. Для довільної функції $f \in L_2(-1,1;(1-x^2)^{-\frac{1}{2}})$ її ряд Чебишева (1.4) збігається до неї по нормі (1.13). Для кожного $n = 0,1,\dots$ має місце рівність

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(f(x)-(\sigma_n f)(x))^2 dx) = \frac{1}{2}\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2[f]. \qquad (2.1.16)$$

Рівномірна збіжність ряду Чебишева вимагає, очевидно, більш сильних умов на функцію f. Достатньо загальні умови, які забезпечують таку збіжність, є наслідком відповідної теореми для рядів Фур'є.

Відомо, що рядом Фур'є функції f, що визначена на відрізку $[0,2\pi]$, називають ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + \beta_k \sin kt), \qquad (2.1.17)$$

де

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\cos ktdt, \;\; k = 0,1\,,\dots, \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\sin ktdt, \quad k = 1,2,\dots$$

Ось частина теореми Діріхле-Жордана, що має відношення до цих рядів.

Теорема 2.1.3. Якщо функція φ має обмежену варіацію на інтервалі $[0,2\pi]$, то ряд (2.2.17) збігається до $\varphi(t)$ в кожній точці $t \in [0,2\pi]$, в якій функція φ неперервна. Якщо φ також неперервна в деякому замкнутому частинному відрізку I, то ряд (2.2.17) на I збігається до φ рівномірно.

Звідси отримуємо наступну основну теорему про ряди Чебишева.

Теорема 2.1.4. Для довільної функції f, що є неперервною і має обмежену варіацію на відрізку $[-1,1]$ її ряд Чебишева (2.2.4) збігається до f рівномірно на цьому відрізку.

2.2. Дії з рядами Чебишева

Щоб спростити вирази, розширимо визначення (2.2.2) коефіцієнтів Чебишева на від'ємні індекси.

Відповідно до рівняння (1.1.18 розділ 1) отримаємо

$$a_k[f] = a_{-k}[f], \qquad k = -1, -2, \ldots. \tag{2.2.1}$$

Це дозволяє представити ряд Чебишева функції f у вигляді

$$\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k[f]T_k \tag{2.2.2}$$

Далі будемо позначати k-ий коефіцієнт Чебишева похідної порядку l функції f , тобто $a_k[f^{(l)}]$, як $a_k^{(l)}[f]$; зокрема, $a_k[f']$ і $a_k'[f]$ означатимуть одне й те саме. У деяких випадках будемо скорочувати позначення до $a_k, a_k', a_k^{(l)}$. Також будемо використовувати позначення f_n для парної частини функції f:

$$f_{\text{п}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \tag{2.2.3}$$

а $f_{\text{нп}}$ – для непарної частини цієї функції:

$$f_{\text{нп}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \tag{2.2.4}$$

Ясно, що завжди $f = f_{\text{п}} + f_{\text{нп}}$.

Теорема 2.2.1. Якщо $f, g \in L_2(-1,1;(1-x^2)^{\frac{1}{2}})$, то для будь-якого цілого k виконуються наступні властивості:

$$a_k[cf] = ca_k \quad (c - \text{стала}), \tag{2.2.5}$$

$$a_k[f \pm g] = a_k[f] \pm a_k[g] \tag{2.2.6}$$

$$a_k[f_{\text{п}}] = \begin{cases} a_k, & k - \text{парне}, \\ 0, & k - \text{непарне}, \end{cases} \tag{2.2.7}$$

$$a_k[f_{\text{нп}}] = \begin{cases} 0, & k - \text{парне}, \\ a_k, & k - \text{непарне}, \end{cases} \tag{2.2.8}$$

$$a_k[f(T_l] = \begin{cases} a_{k/l}, & l - \text{дільник } k, \\ 0, & \text{в протилежному випадку}, l = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2.2.9}$$

І зокрема, виконується рівність

$$a_k[xf(x)] = \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2} \qquad (2.2.10)$$

Доведення. Формули (2.2.5) та (2.2.6) є очевидними. Неважко також перевірити формули (2.2.7), (2.2.8). Наприклад,

$$a_{21}[f_{\text{п}}] = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(f(x)+f(-x)T_{2l}(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}f(x)T_{2l}(x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}f(-x)T_{2l}(x)dx.$$

Кожен з цих доданків дорівнює $a_{21}[f]/2$. Для другого доданка це легко показати, зробивши заміну $x = -y$ і врахувавши парність многочлена T_{2l}.

Формула (2.2.9) випливає з тотожності $T_m(T_n) = T_{mn}$, якщо

$$f = {\sum_{j=0}^{\infty}}' a_j T_j,$$

то

$$f(T_l) = {\sum_{j=0}^{\infty}}' a_j T_j(T_l) = {\sum_{j=0}^{\infty}}' a_j T_{jl}.$$

Представляючи ряд Чебишева функції f у вигляді (2.2) і використовуючи тотожність (4.19 розділ 1), маємо

$$T_l f = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k T_k T_l = \frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (T_{k-l} + T_{k+l}) = \frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+l} T_k + \frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k-l} T_k$$

Таким чином, маємо

$$a_k[T_k l] = \frac{a_{k-l} + a_{k+l}}{2},$$

що доводить формулу (2.2.10).

Далі розглянемо більш складні випадки, коли коефіцієнти Чебишева для результату певної операції є сумами нескінченних рядів, що містять коефіцієнти вхідних функцій. Тут потрібні додаткові умови, оскільки без них такі ряди можуть не збігатися.

У деяких ситуаціях коефіцієнти Чебишева b_k функції g , які ми шукаємо, повинні задовольняти наступну нескінченну систему лінійних рівнянь

$$c_0 b_{k+l} + c_1 b_{k+l+1} + \cdots + c_m b_{k+l+m} = a_k, k = 0, \pm 1, \ldots. \tag{2.2.11}$$

де значення l, m , коефіцієнти $c_0, c_1, \ldots, c_m$ і праві частини a_k цієї системи задані.

Оскільки така система має (при $m > 1, c_0, c_m \neq 0$) декілька розв'язків, то виникає питання, який саме з них є шуканою послідовністю коефіцієнтів Чебишева. Відповідь дає наступна теорема.

Теорема 2.2.2. Якщо коефіцієнти Чебишева b_k функції g з простору

$$L_2\left(-1, 1; (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

задовольняють систему рівнянь (2.2..11), і якщо всі нулі многочлена

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m \tag{2.2.12}$$

мають модуль, не менший одиниці, то послідовність $\{b_k\}$ є єдиним розв'язком системи (2.2.11), який збігається до нуля при $k \to \infty$.

Наступна теорема має формули для коефіцієнтів Чебишева.

Теорема 2.2.3. Якщо:

1) параметр c в формулах $(2.2.14) - (2.2.17)$ є числом з відрізка $[-1; 1]$;

2) параметр m в формулах $(2.2.13) - (2.2.16), (2.2.18), (2.2.20) - (2.2.25)$ є цілим невід'ємним числом, а у формулі (2.26) – натуральним числом;

3) функції, коефіцієнти Чебишева яких входять у формули $(2.2.13) - (2.2.17)$ розкладаються у рівномірно збіжний ряд Чебишева, то

$$a_k[fg] = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty} a_l[f](a_{k-l}[g] + a_{k+l}[g]), \tag{2.2.13}$$

$$a_k[(x-c)^{-m-1}f(x)] = \frac{2}{m!}\sum_{l=m}^{\infty} U_i^{(m)}(c) a_{k+l+1} \tag{2.2.14}$$

$$a_k[(x^2-c^2)^{-m-1}f(x)] = \frac{2^{m+2}}{m!}\sum_{l=m}^{\infty} U_i^{(m)}(2c^2-1)a_{k+2l+2}, \qquad (2.2.15)$$

$$a_k\left[\int (x-c)^{-m-1}f(x)dx\right] = \frac{2}{m!}k\sum_{l=m}^{\infty} T_l^{(m)}(c)a_{k+l}, \quad k \neq 0, \qquad (2.2.16)$$

$$a_k\left[\int (x^2-c^2)^{-m-1}f(x)dx\right] =$$

$$= \frac{2^{m+1}}{m!\,k}\sum_{l=m}^{\infty}\left(U_l^{(m)}(2c^2-1) - U_{l-1}^{(m)}(2c^2-1)\right)a_{k+2l+2}\,, \qquad (2.2.17)$$

і ,зокрема,

$$a_k[(x^2-c^2)^{-1}f(x)] = 2c^{-1}\sum_{l=0}^{\infty} U_{2l+1}(c)a_{k+2l+2,}c \neq 0 \qquad (2.2.18)$$

$$a_k[x^{-m-1}f(x)] = (-1)^m 2^{m+1}\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^l\binom{l}{m}a_{k+2l-m+1} \qquad (2.2.19)$$

$$a_{2k+1}[x^{-1}f(x)] = 2(-1)^k\sum_{l=m}^{k}(-1)^l a_{2l} \qquad (2.2.20)$$

$$a_k[(x-1)^{-m-1}f(x)] = 2^{m+1}\sum_{l=m}^{\infty}\binom{l+m+1}{2m+1}a_{k+l+1}, \qquad (2.2.21)$$

$$a_k[(x-1)^{-m-1}f(x)] = (-1)^m 2^{m+1}\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^l\binom{l+m+1}{2m+1}a_{k+l+1}, \qquad (2.2.22)$$

$$a_k[(x^2-1)^{-m-1}f(x)] = 2^{2m+2}\sum_{l=m}^{\infty}\binom{l+m+1}{2m+1}a_{k+2l+2}, \qquad (2.2.23)$$

$$a_k\left[\int x^{-m-1}f(x)dx\right] =$$

$$=\begin{cases} \dfrac{2}{k}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l a_{k+2l}, \;\; m=0, \;\; k\neq 0 \\ \dfrac{(-2)^2}{mk}\displaystyle\sum_{l=m}^{\infty}(-1)^l(2l-m)\left(\begin{Bmatrix} l-1 \\ m-1 \end{Bmatrix}\right)a_{k+2l-m}, m>0, k\neq 0 \end{cases} \tag{2.2.24}$$

$$a_k\left[\int (x-1)^{-m-1}f(x)dx\right]=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{2}{k}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}a_{k+l}, \;\; m=0, \;\; k\neq 0 \\ \dfrac{2^m}{mk}\displaystyle\sum_{l=m}^{\infty}l\left(\begin{Bmatrix} l+m-1 \\ 2m-1 \end{Bmatrix}\right)a_{k+1}, m>0, k\neq 0 \end{cases} \tag{2.2.25}$$

$$a_k[(x^2-1)^{-m-1}f(x)]=\frac{2^{2m+1}}{k}\sum_{l=m}^{\infty}\binom{l+m}{2m}a_{k+2l+1}, \qquad k\neq 0, \tag{2.2.26}$$

$$a_k^{(m)}=$$

$$=2^m(m-1)!\sum_{l=m}^{\infty}\binom{l-1}{m-1}\binom{k+l-1}{m-1}(k+2l-m)a_{k+2l-m}, \quad m>0\,, \tag{2.2.27}$$

і, зокрема,

$$a_k'=2\sum_{l=1}^{\infty}(k+2l-1)a_{k+2l-1}. \tag{2.2.28}$$

У сформульованій теоремі вважається, що ряди Чебишева, коефіцієнти яких входять у відповідні формули, збігаються рівномірно, а функції, представлені цими рядами, є неперервними.

Також слід детальніше розглянути сукупність формул теорем 2.2.1 і 2.2.3, які представлені в цьому пункті. Вони дозволяють оцінити, наскільки складніше виконувати операції з рядами Чебишева порівняно з операціями зі степеневими рядами. Розглянемо основні випадки:

1) Множення на сталу, додавання та віднімання для рядів Чебишева виконуються з такою ж легкістю, як і для степеневих рядів.

2) Однак, при множенні ряду Чебишева на степінь змінної з натуральним показником необхідно обчислити лінійні комбінації коефіцієнтів, тоді як для степеневих рядів така операція зводиться до простого обчислення відповідних коефіцієнтів.

3) Множення двох рядів Чебишева значно складніше, ніж множення степеневих рядів, оскільки для цього потрібно знаходити суми нескінченних рядів, а не просто скінченні суми.

4) Деякі коефіцієнти степеневих рядів можна обчислити за допомогою рекурентних формул, але для рядів Чебишева подібні рекурентні співвідношення відсутні.

5) Інтегрування рядів Чебишева є набагато складнішим процесом, оскільки коефіцієнт $a_k[f]$ залежить від двох коефіцієнтів функції f, тоді як у степеневому ряді він визначається одним коефіцієнтом.

6) Диференціювання ряду Чебишева також складніше порівняно з диференціюванням степеневого ряду, оскільки потребує обчислення сум нескінченних рядів.

7) Розклад у степеневий ряд для суперпозицій елементарних функцій, які самі розкладаються у степеневий ряд, можна здійснювати рекурсивно. Для рядів Чебишева аналогічних формул не існує.

Для деяких простих функцій коефіцієнти Чебишева можна обчислити, використовуючи їхнє визначення через інтеграл (2.2.2) або (2.2.3). Однак ряди, отримані таким способом, зазвичай збігаються повільно і не є практично корисними. Ці ряди зібрані в наступній теоремі.

Теорема 2.2.4. Мають місце наступні формули:

$$|x| = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^k}{4k^2-1} T_{2k}(x),$$

$$(1+x)^{1/2} = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}T_k(x),$$

$$(1-x)^{1/2} = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}T_k(x),$$

$$(1-x^2)^{1/2} = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{1}{4k^2-1}T_{2k}(x),$$

$$\arcsin x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{1}{(2k+1)^2}T_{2k+1}(x),$$

$$x^{-1}\arcsin x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}{}'(-1)^k(\sum_{l=k}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)^2})T_{2k}(x) =$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}{}'(-1)^k(G-\sum_{l=k}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l-1)^2})T_{2k}(x),$$

де

$$G = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{(2l+1)^2} = 0{,}915965594177219015 05\ldots$$

є так званою сталою Каталана,

$$\cos(qarccos\ x) = -\frac{2q\sin q\pi}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{(-1)^k}{k^2-q^2}T_k(x), \quad q - \text{не ціле},$$

$$\sin(q\arccos x) = \begin{cases} -\frac{4q}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2-q^2}T_{2k+1}(x), & q - \text{ціле парне}, \\ -\frac{4q}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{1}{4k^2-q^2}T_{2k}(x), & q - \text{ціле непарне}, \\ -\frac{2q}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{1-(-1)^k\cos q\pi}{k^2-q^2}T_k(x), & q - \text{не ціле}, \end{cases}$$

$$\cos(q\arcsin x) = -\frac{4q\ sin\frac{q\pi}{2}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{1}{4k^2-q^2}T_{2k}(x), \qquad |q| \neq 0, 2, 4, \ldots$$

$$\sin(q\arcsin x) = \frac{4q\cos\frac{q\pi}{2}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2-q^2}T_{2k+1}(x), \qquad |q| \neq 1, 3, 5, \dots$$

2.3. Приклади застосування многочленів та рядів Чебишева

У попередніх пунктах, ми показали, що для того, щоб отримати розклад функції в ряд Фур'є – Чебишева, достатньо розкласти парну функцію в ряд Фур'є з косинусів. Тому, в першу чергу можемо скористатися відомими розкладами парних функцій в ряди Фур'є по косинусам, з тим, щоб отримати з них відповідні розклади Чебишева.

Приклад 1. Із розкладу

$$\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta}{n}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

поклавши в ньому $\theta = \arccos x$, отримаємо

$$\ln(1+x) = -\ln 2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}T_n(x), \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Приклад 2. Таким самим чином із рівності

$$\frac{\pi^2 - 2\pi\theta}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

маємо розклад

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)^2}, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Досить часто, щоб отримати розклад в ряд Чебишева можуть бути використані штучні прийоми. Так ,наприклад,

Приклад 3. Для того, щоб розкласти в ряд Чебишева функцію e^{ax}, необхідно спочатку розкласти в ряд з косинусів парну функцію $e^{a\cos\theta}$. Користуючись розкладом експоненти та формулою бінома Ньютона, отримаємо

$$e^{a\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m cos^m\theta}{m!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!\,2^m}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^m \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k e^{(m-k)i\theta} e^{-ki\theta} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!\,(m-k)!} e^{(m-2k)i\theta}. e^{acos\theta} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{a}{2})^m \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!\,(m-k)!} \cos(m-k)\,\theta. \qquad (2.3.1)$$

Щоб визначити коефіцієнт біля кожного $\cos n\theta$ розглянемо внутрішню суму

$$\frac{\cos m\theta}{m!} + \frac{\cos(m-2)\theta}{1!\,(m-1)!} + \frac{\cos(m-4)\theta}{2!\,(m-2)!} + \cdots + \frac{\cos(m-2)\,\theta}{(m-1)!\,1!} + \frac{\cos n\theta}{m!}. \qquad (2.3.2)$$

В дану суму, яка складається з нульового коефіцієнта в розкладі функції (2.3.1) будуть входити доданки із суми (3.2) при $m = 0, 2, 4$ ... Тому, маємо

$$\frac{a_0}{2} = 1 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{1}{(1!)^2} + \left(\frac{a}{2}\right)^4 \frac{1}{(2!)^2} + \cdots + \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2} + \cdots \qquad (2.3.3)$$

Якщо ж $n > 0$, то в суму, що складає коефіцієнт при $\cos n\theta$, будуть входити доданки із суми (2.3.2) при номерах $m = n, n+2, n+4, \ldots$ причому із кожної суми доданків буде два. Тому маємо:

$$a_n = 2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^n \frac{1}{n!} + \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2} \frac{1}{(n+1)1!} + \cdots + \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2k} \frac{1}{(n+k)!\,k!} + \cdots\right] \qquad (2.3.4)$$

Сума в квадратних дужках має спеціальне позначення

$$I_n(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n+2k}}{(n+k)!\,k!} \qquad (2.3.5)$$

і називається функцією Бесселя уявного аргумента.

Завдяки позначенню (2.3.5), а також рівностям (2.3.3) і (2.3.4), на місці (2.3.1) маємо розклад:

$$e^{a\cos\theta} = I_0(a) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(a)\cos n\theta,$$

із якого підстановкою $\cos\theta = x$ знаходимо

$$e^{ax} = I_0(a) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(a)T_n(x), \quad x \in [-1, 1] \tag{2.3.6}$$

Також, при $a = 1$ маємо розклад експоненти

$$e^{a} = I_0(1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(1)T_n(x), \quad x \in [-1, 1].$$

Приклад 4. Щоб розкласти в ряд Чебишева функції $\cos ax$ та $\sin ax$, використаємо функцію Бесселя першого роду порядку n

$$J_n(a) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2m}}{(n+m)!\, m!}, \tag{2.3.7}$$

яка пов'язана з функцією Бесселя уявного аргумента співвідношенням

$$I_n(ia) = i^n J_n(a), \tag{2.3.8}$$

В силу (2.3.6) та (2.3.8) маємо

$$e^{iax} = \cos ax + i\sin ax = I_0(a) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (i)^n J_n(a)T_n(x).$$

Розділяючи в цій рівності дійсні та уявні частини маємо

$$\cos ax = I_0(a) + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(a)T_{2m}(x). \tag{2.3.9}$$

$$\sin ax = 2\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(a)T_{2m+1}(x) \tag{2.3.10}$$

Розклади (2.3.9) та (2.3.10) мають місце тільки для $x \in [-1, 1]$.

Многочлени Чебишева також використовують для розв'язання тригонометричних рівнянь у вигляді допоміжної змінної.

Приклад 5. Знайти корені многочлена

$$9 - 11\cos x + 13\cos 2x - 3\cos 3x = 0.$$

Розв'язання.

Оскільки ліва частина – парна функція від x, та на основі теореми (якщо раціональна функція від елементарних тригонометричних функцій є парною, то вона може бути представлена як раціональна функція від змінної $u = \cos x$, можна ввести змінну $u = \cos x$. Враховуючи, що

$$\cos 2x = 2u^2 - 1, \qquad \cos 3x = 4u^3 - 3u$$

(многочлени Чебишева першого роду, див. формули (1.1.5а) та (1.1.4а) розділу 1), знаходимо:

$$9 - 11\cos x + 13\cos 2x - 3\cos 3x = -2(6u^3 - 13u^2 + u + 2).$$

Виділивши множник $u - 2$ многочлена третього степеня, розкладемо отриманий вираз на множники:

$$6u^3 - 13u^2 + u + 2 = (u-2)(6u^2 - u - 1) = (u-2)(2u-1)(3u+1).$$

Отже, рівняння можна переписати так:

$$(\cos x - 2)(2\cos x - 1)(3\cos x + 1) = 0.$$

Оскільки, множник $\cos x - 2$ не перетворюється в нуль, то рівняння виконується тільки при умовах, що

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

або

$$\cos x = -\frac{1}{3},$$

звідки знаходимо корені

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

та

$$x_2 = \pm\left(\pi - arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi k, \qquad k, n \in Z.$$

Приклад 6. Знайти корені рівняння

$$3\sin 2x + 4\cos 3x - 3\sin 4x = 0.$$

Розв'язання.

При заміні x на $\pi - x$ ліва частина рівняння змінює знак, тому за теоремою (якщо раціональна функція від елементарних тригонометричних функцій при заміні незалежної змінної x на $\pi - x$ змінює знак, то вона може бути представлена, як добуток раціональної функції $v = \sin x$ на $u = \cos x$), вводимо змінну $v = \sin x$. Використовуючи многочлени Чебишева обох родів, отримаємо:

$$\sin 2x = \cos x \cdot 2v$$

$$\cos 3x = 4cos^3 x - 3\cos x = \cos x(4cos^2 x - 3) = \cos x(1 - 4v^2),$$

$$\sin 4x = (8cos^3 x - 4\cos x)\sin x = \cos x(8cos^2 x - 4)\sin x = (4v - 8v^3)\cos x.$$

Після підстановки рівняння набуде вигляду

$$(12v^3 - 8v^2 - 3v + 2)\cos x = 0$$

$$(12v^3 - 8v^2 - 3v + 2)\cos x = (4v^2 - 1)(3v - 2)\cos x =$$

$$= (4sin^2 x - 1)(3\sin x - -2)\cos\ x = 0.$$

Розклавши вираз, отримуємо корені рівняння:

$$x_1 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\quad x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\quad x_3 = (-1)^m \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n,$$

$$x_4 = \frac{\pi}{2} + \pi p,\quad n, k, m, p \in Z$$

Приклад 7. З формули

$$\arcsin(\cos\theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2}$$

підстановкою $\cos\theta = x$ отримаємо

$$\arcsin x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)^2},\quad -1 \le x \le 1.$$

Приклад 8. Розклад парної функції

$$|\sin\theta| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\theta}{4n^2-1}, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

приводить до формули

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_{2n}(x)}{4n^2-1}, \ -1 \le x \le 1.$$

Приклад 9. З розкладу

$$\frac{1}{2}\ln\left(ctg\ \frac{\theta}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\theta}{2n-1}, \ 0 < \theta < \pi,$$

після кількох тригонометричних перетворень маємо

$$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_{2n-1}(x)}{2n-1}, \ -1 < x < 1$$

Приклад 10. Розклад функції

$$\frac{1-rx}{1-2rx+r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n T_n(x), \qquad 0 \le r \le 1,$$

можна представити у вигляді

$$\frac{\frac{1}{r}-x}{1-2rx+r^2} = \frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} r^{n-1}T_n(x)$$

або, після кількох перетворень,

$$\frac{2x-2r}{1-2rx+r^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}T_n(x).$$

Інтегруючи цю тотожність по r в межах від 0 до r, отримаємо розклад

$$\ln(1-2rx+r^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}T_n(x),$$

який збігається при умовах $|r| < 1$ і $x \in [-1, 1]$. Якщо у формулі замість r поставити $-r$, то отримаємо

$$\ln(1+2rx+r^2) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}T_n(x).$$

Віднявши від цього рівняння попереднє, отримаємо розклад

$$ln\frac{1+2rx+r^2}{1-2rx+r^2} = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^{2k+1}}{2k+1}T_{2k+1}(x), \qquad -1 \le x \le 1$$

який використовується при обчисленні логарифмічної функції.

Приклад 11. В курсі математичного аналізу доводиться, що кожна функція що задовольняє ряду умов породжує «нескінченний многочлен» - ряд Тейлора:

$$f(x) \to a_0 + a_1x + a^2x^2 + \cdots, \qquad (2.3.11)$$

який збігається (тобто має певну границю). Вибираючи певну кількість членів ряду, ми отримуємо многочлен, що наближає функцію з заданою точністю. Для обчислення ряду Тейлора заданої функції необхідно знаходити похідні функції: коефіцієнт при x^n в розкладі рівний $f^{(n)}(0)/n!$, де $f^{(n)}(0)$ - значення похідної n-порядку від функції $f(x)$ при $x = 0$.

Практичне застосування таких обчислень не завжди ефективне: щоб досягти потрібної точності, іноді доводиться враховувати велику кількість членів ряду Тейлора. Це викликає питання, яке П. Л. Чебишев назвав важливим для будь-якої практичної діяльності людини: як оптимально використовувати ресурси для досягнення максимальної користі? У випадку обчислення значень функцій це означає: як знайти многочлен, що наближає задану функцію з необхідною точністю, але містить меншу кількість членів, ніж відповідний ряд Тейлора для тієї ж точності.

Многочлени Чебишева першого роду допомагають спростити обчислення. Наприклад, для наближеного обчислення $\ln 2$ можна використати розклад функції $\ln(1+x)$ в ряд Тейлора:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} +$$
$$+ \cdots, \quad (-1 \le x \le 1). \qquad (2.3.12)$$

Частинні сума із перших п'яти його членів має вигляд

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}. \qquad (2.3.13)$$

Якщо виразити $x, x^2, \ldots, x^5$ через многочлени Чебишева (1.3.29 розділ I), отримаємо

$$\ln(1+x) \approx T_1(x) - \frac{1}{4}\big(T_2(x) + T_0(x)\big) + \frac{1}{12}\big(T_3(x) + 3T_1(x)\big) -$$

$$-\frac{1}{32}\big(T_4(x) + 4T_2(x) + 3T_0(x)\big) + \frac{1}{80}\big(10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)\big) =$$

$$= -\frac{1}{32}T_0(x) + \frac{1}{8}T_1(x) - \frac{3}{8}T_2(x) + \frac{7}{48}T_3(x) - \frac{1}{32}T_4(x) + \frac{1}{80}T_5(x).$$

При $x = 1$ відкидання останнього члена в розкладі (2.3.13) змінює значення $\ln 2$ на $1/5$. Відкидання трьох останніх членів в розкладі (2.3.14) змінює це значення менше ніж на

$$\frac{7}{48} + \frac{1}{32} + \frac{1}{80} = \frac{19}{15 \cdot 32} < \frac{1}{5{,}2}$$

(оскільки $|T_n(x)| \leq 1$на $[-1, 1]$). Отже, при обчисленні $\ln 2$ чебишевське наближення

$$\ln(1+x) \approx \frac{1}{32}T_0(x) + \frac{11}{8}T_1(x) - \frac{3}{8}T_2(x) \qquad (2.3.15)$$

дає більш точний результат, ніж розклад (2.3.13). Чебишевський розклад можна знову перетворити в звичайний многочлен, якщо скористатися розкладом многочленів $T_n(x)$ за степеневим базисом. Підставляючи у (2.3.15) вирази

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

отримаємо

$$\ln(1+x) \approx \frac{1}{32} + \frac{11}{8}x - \frac{3}{8}(2x^2 - 1) = \frac{1}{32} + \frac{11}{8}x - \frac{3}{4}x^2.$$

Таким чином, перехід від степеневого розкладу (2.3.13) до чебишевського розкладу (2.3.16) і зворотне перетворення до степеневого розкладу з одночасним «відсіюванням» зайвих членів, які змінюють шукане значення на величину, меншу за похибку початкового наближення (2.3.13), забезпечує суттєву вигоду. Наприклад, для $0 \leq x \leq 1$ значення $\ln(1+x)$ можна обчислити за допомогою квадратного тричлена (2.4.16) з такою ж точністю, як і за п'ятичленною формулою (2.3.13). У загальному випадку, відрізок степеневого ряду з великою кількістю членів після перерозкладу за чебишевським базисом перетворюється на многочлен значно меншого степеня, оскільки більшість старших членів чебишевського розкладу змінюють значення обчислюваної величини в межах похибки початкового розкладу і тому можуть бути відкинуті.

ВИСНОВКИ

У даній магістерській роботі досліджено многочлени та ряди Чебишева разом із їхніми ключовими властивостями. Було встановлено, що многочлени Чебишева мають застосування не лише в теорії наближення функцій, а й у вирішенні інших задач, зокрема тригонометричних рівнянь.

У першому пункті роботи визначено многочлени Чебишева, наведено різні способи їх представлення, проаналізовано їхні основні властивості та тотожності, а також досліджено похідні многочленів першого роду. Другий пункт присвячено вивченню коренів і значень многочленів Чебишева, тоді як у третьому розглянуто важливі оцінки та рекурентні співвідношення. У четвертому пункті показано, що многочлени Чебишева є розв’язками диференціальних рівнянь.

Особлива увага приділена другій частині роботи, де розглянуто ряди Чебишева. У перших двох пунктах описано поняття рядів Чебишева та операції над ними. Третій пункт демонструє практичне застосування многочленів і рядів Чебишева, зокрема розклад функцій у ряди Чебишева та обчислення коренів многочленів з їхньою допомогою.

Отримані результати можуть стати основою для подальших досліджень у чисельному аналізі. Зокрема, алгоритми, засновані на властивостях многочленів і рядів Чебишева, є корисними для наближеного розв’язання диференціальних та інтегральних рівнянь, а також для побудови рекурентних співвідношень для визначення коефіцієнтів Чебишева.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. J. C. Mason and D. C. Handscomb. Chebyshev Polynomials. CRC Press, 2002. 288 p.
2. Fichtenholz G. M. Rachunek różniczkowy i całkowy, tom I, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1994. 530 p.
3. Дороговцев А. Я. Інтеграл та його застосування. К.: Вища школа. 1974. 95 с.
4. J. B. Littlewood and A. C. Offord. On the Distribution of the Roots of Certain Polynomials. Cambridge: Cambridge University Press, 1939.
5. Бородін О.І., Бугай А.С. Біографічний словник діячів у галузі математики. відп. ред. Й. І. Гіхман
6. Абрамчук І. В., Сачанюк- Кавецька Н. В. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної: навч. посіб. Вінниця: ВНТУ, 2010. 138 с.
7. Дюженкова Л. І., Колесник Т. В. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2 ч.: навч. посіб. Київ: Вища школа, Ч. 1. 2002. 243 с.
8. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз: підручник для студентів математичних спеціальностей університетів. Київ: Абрис, 1994. 326 с.
9. G. G. Szegő. Orthogonal Polynomials. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1939. 447 p.
10. N. I. Akhiezer. The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1965. 311 p.
11. J. R. Shoenfield. Mathematical Logic. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1967. 364 p.
12. Радченко О. М. Математичний аналіз. Київ : ТВіМС,. Т. 2 : Ряди та інтеграли з параметром. Функції декількох змінних, 2000. 152 с.

13. Приймак А.. О. Многочлени Чебишева та рекурентні співвідношення між ними. *Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень*: матеріали конференції. Луцьк: ВНУ ім. Л. Українки, 2024. С. 392–395.
14. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: підручник у 3-х ч. Ч.1. Функції однієї змінної. 2-ге вид. Київ: вища школа, 2002. 275 с.
15. Шиманський І. Є. Математичний аналіз: посібник для фізико-математичних педагогічних інститутів. 3-тє вид. Київ: Радянська школа. 1972. 623 с.
16. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підручник у 2-х ч. Київ. Вища школа, 2005. Ч.1. 328 с.
17. D. Jackson. The Theory of Approximation. New York: AMS Chelsea Publishing, 1994. 178 p.
18. M. Dunham. Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics. New York: Wiley, 1990. 300 p.
19. M. J. D. Powell. Approximation Theory and Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1981. 314 p.
20. W. Gautschi. Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation. Oxford: Clarendon Press, 2004. 219 p.
21. J. P. Boyd. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. New York: Dover Publications, 2001. 668 p.

Анотація

Приймак А. О. Многочлени та ряди Чебишева. *Магістерська робота.* Луцьк, 2024. 53 с.

У роботі розглянуто многочлени та ряди Чебишева, їхні властивості, наведено різні способи їх представлення, розглянуто важливі оцінки та рекурентні співвідношення. Також показано практичне застосування многочленів і рядів Чебишева.

Магістерська робота містить 53 сторінки, список використаної літератури налічує 21 джерело.

Ключові слова: многочлени Чебишева, ряди Чебишева, поліноми, рекурентні співвідношення, ортогональність.

Abstract

Pryimak A.O. Chebyshev Polynomials and Series. *Master's Thesis*. Lutsk, 2024. 53 p.

This thesis explores the concept of Chebyshev polynomials and series, their properties, and various methods of representation. It examines key estimates and recurrence relations and demonstrates the practical applications of Chebyshev polynomials and series.

The master's thesis comprises 53 pages and includes a reference list of 21 sources.

Keywords: Chebyshev polynomials, Chebyshev series, polynomials, recurrence relations, orthogonality.