МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ

Кафедра математичного аналізу та статистики

На правах рукопису

КУЗЬМЯК КАТЕРИНА СЕРГІЇВНА

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Спеціальність : 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник :

ФЕДУНИК–ЯРЕМЧУК ОКСАНА ВОЛОДИМИРІВНА,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол №____________

Засідання кафедри математичного

аналізу та статистики

від ___________ 20___ р.

Завідувач кафедри

доц. Федуник-Яремчук О.В. ________

Луцьк-2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Серед різних теоретичних методів пізнання світу надзвичайно потужним є математичний метод. Історія розвитку математики засвідчує, що що вже з самого початку ця наука виникла і розвивалась, по суті, на вимоги практики. Як окрема галузь теоретичного знання математика сформувалася ще в VII – III ст. до н. е. в Стародавній Греції. Впродовж тисячолітньої історії в ній виникли багато різноманітних галузей знань, які знаходять широке застосування і в практичному житті суспільства, і в інших науках. Особливо це стосується такої математичної дисципліни, як математичний аналіз. Його методами користуються і близькі до математики природничі науки, і зовсім далекі від неї гуманітарні та інші галузі знань. А всередині самої математики без математичного аналізу, мабуть, не обходиться жодна математична дисципліна. Тому вибір теми магістерськоі роботи «Використання методів математичного аналізу для розв’язування геометричних задач» обумовлений саме її ***актуальністю.***

Об’єктом дослідження виступає методика застосування деяких теоретичних положень диференціального числення в геометрії.

Предмет дослідження – використання властивостей неперервних функцій та похідної в геометричних задачах.

Метою роботи є показати на конкретних прикладах геометричних задач, як можна оптимізувати їх розв’язання, якщо використати методи математичного аналізу. Особливо це стосується нестандартних задач (на дослідження), пошук способів розв’язання яких становить певні труднощі.

З використанням методів диференціального числення в геометрії в основному пов’язують розв’язання задач на екстремуми. В магістерській роботі також розв’язано ряд задач цього типу. Але в даному дослідженні передусім розглядаються складніші випадки застосування аналітичного методу в геометрії.

Завдання, які були поставлені в даній роботі, полягають передусім у розгляді планіметричних задач на дослідження: задачі на існування для фігури такої її конфігурації, яка задовольняє певні умови; задачі на можливість і спосіб розбиття фігури, щоб при цьому виконувались певні вимоги. Ці задачі розв'язуються із використанням властивостей функцій, неперервних на відрізку. Також розглянуно і задачі на застосування похідної, зокрема, задачі на екстремум.

Методи дослідження:

1) опрацювання наукової літератури;
2) практичний.

Апробація результатів дослідження. Результатами дослідження доповідалися на конференціях:

- XVI Міжнародна науково - практична конференція студентів, аспірантів та молодих учених «Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень» (17 травня 2022 року, м. Луцьк).
- Науково - практична конференція до 130-річчя з Дня народження М. П. Кравчука (11 жовтня 2022 року, м. Луцьк).

В матеріалах вказаних конференцій опубліковано двоє тез (одні в співавторстві з Л. І. Філозофом).

Також в співавторстві зі старшим викладачем Л. І. Філозофом була підготовлена стаття, яка надрукована в журналі «Педагогічний пошук» № 2, 2022 р.

Зауважу, що всі ці публікації ([13], [14], [15]) були видані під моїм попереднім прізвищем Червінська.

Структура магістерської роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, кожен з яких містить п'ять параграфів, та висновків і списку використаних джерел. До задач подані необхідні рисунки.

Об'єм магістерської роботи. Зміст дослідження викладений на 51 сторінці друкованого тексту.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ

1.1. Поняття границі функції неперервного аргументу

Поняття границі нині пронизує весь математичний аналіз. Та і в інших областях математики воно відіграє важливу роль.

Нехай функція $y = f(x)$ дійсного аргументу визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення 1 (границі функції в точці за Коші). Число A називається границею функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x з цього околу, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, буде виконуватися нерівність

$|f(x) - A| < \varepsilon$.

Цей факт записують так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Це означення стосується випадку скінчених значень аргументу і границі. Розглядають також границю функції при $x \to \pm\infty$ та випадки $A = \pm\infty$.

Означення 2. Число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що з нерівності $x > M$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Означення 3. Число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $B < 0$, що з нерівності $x < B$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Означення 4. Якщо для будь-якого додатного як завгодно великого числа M існує таке додатне число δ, що з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $f(x) > M$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ при $x \to x_0$ має невласну границю $+\infty$.

В математичному аналізі широко використовують й інше означення границі функції в точці – це означення на мові послідовностей (за Гейне).

Означення 5. Число A називається границею функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якої послідовності x_n, яка збігається до x_0, послідовність $y_n = f(x_n)$ збігається до A.

Означення за Коші та за Гейне рівносильні.

Наведемо основні теореми про границі.

Теорема 1. Границя суми скінченного числа функцій дорівнює сумі границь цих функцій, якщо ці границі існують.

Теорема 2. Границя добутку скінченного числа функцій дорівнює добутку границь цих функцій, якщо ці границі існують.

Теорема 3. Границя частки двох функцій дорівнює частці від ділення границі чисельника на границю знаменника, якщо ці границі існують і границя знаменника не дорівнює нулю.

Теорема 4. Якщо в точці a функція $y = f(x)$ має скінченну границю A, причому $A > P$ $(A < Q)$, то для достатньо близьких до a значень аргументу (відмінних від a) і сама функція задовольнятиме нерівність $f(x) > P$ (відповідно $f(x) < Q$).

Теорема 5. Якщо в точці a функція $y = f(x)$ має скінченну границю, то для достатньо близьких до a значень аргументу (відмінних від a) функція буде обмеженою.

Теорема 6. Якщо в точці a функція $y = f(x)$ має границю (скінченну чи нескінченну), то ця границя єдина.

1.2. Різні означення неперервності функції в точці, їх еквівалентність

Ще одним важливим поняттям в математичному аналізі є неперервність функції. Воно тісно пов'язане із поняттям границі.

При розгляді поняття границі функції в точці ставиться вимога, щоб ця функція була визначена принаймні в досить малому околі цієї точки, а в самій цій точці вона може бути як визначеною, так і не визначеною. Однак особливий інтерес становить випадок, коли ця точка належить області визначення функції, причому функція має в цій точці границю.

Означення 1. Функція $y = f(x)$, яка визначена на деякому проміжку, що містить точку x_0, називається неперервною в цій точці, якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\,(x_0).$$

Якщо хоча б одна з вимог цього означення не виконується, то кажуть, що функція є розривною в цій точці.

Означення 2. Функція $y = f(x)$, яка визначена в деякому околі точки x_0 і в самій цій точці, називається неперервною в цій точці, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, буде виконуватися нерівність

$$|\,f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Це означення неперервності функції в точці сформулював Коші.

При дослідженні функції на неперервність на практиці часто користуються ще одним означенням. Воно базується на понятті приросту функції в точці.

Нехай функція $y = f\,(x)$ визначена в усіх точках деякого проміжку (a, b). Виберемо дві довільні точки x_0 та $x = x_0 + \Delta x$, що належать цьому проміжку. Різницю $x - x_0 = \Delta x$ називають приростом аргументу, а різницю $f\,(x_0 + \Delta x) - f\,(x_0) = \Delta y$ називають приростом функції $f\,(x)$ в точці x_0.

Означення 3. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Третє означення можна ще трактувати так: для того, щоб функція була неперервна в точці, необхідно і достатньо, щоб її приріст в цій точці прямував до нуля разом з прямуючим до нуля приростом аргументу. Або, інакше кажучи, неперервна функція характеризується тим, що нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. Зауважимо, що в науковій роботі ми постійно спираємося саме на це означення неперервності функції в точці.

Легко бачити, що перше і друге означення еквівалентні між собою, тобто якщо функція неперервна в точці за першим означенням, то вона буде неперервною в цій точці і за другим означеннями, і навпаки. Доведемо, що третє означення еквівалентне другому.

Припустимо, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці $x_0 \in (a, b)$ за третім означенням, тобто

$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, або $\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$.

Врахувавши рівність $x = x_0 + \Delta x$, маємо: $\lim_{\Delta x \to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0$. Остання рівність означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що з нерівності $|x - x_0| < \delta$ буде випливати нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. А це і означає, що виконується друге означення неперервності функції в точці (за Коші).

Нехай тепер маємо, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці $x_0 \in (a, b)$ за другим означенням. Тоді замінивши різниці, які стоять під знаком модуля в цьому означенні, відповідно через Δx і Δy, будемо мати, що для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x, для яких $|\Delta x| < \delta$, виконується нерівність $|\Delta y| < \varepsilon$. А це і означає, що $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, що і треба було довести.

Отже, ми довели, що подані вище три означення неперервності функції в точці еквівалентні між собою.

1.3. Властивості неперервних функцій, які задані на відрізку

Нехай функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[a, b]$ і є неперервною в кожній точці цього відрізку (на кінцях маємо на увазі правосторонню неперервність в точці a та лівосторонню неперервність в точці b). Таку функцію називають неперервною на відрізку $[a, b]$.

Властивості таких функцій цікаві не лише самі собою. Вони часто слугують для подальших міркувань у магістерському дослідженні. Наведемо ті з них, на які найчастіше посилаються при розв'язанні геометричних задач.

Властивість 1 (перша теорема Больцано-Коші). Якщо функція є неперервною на відрізку і на кінцях відрізка значення цієї функції протилежні за знаком, то принаймні в одній точці цього відрізка функція має значення нуль.

Властивість 2 (друга теорема Больцано - Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $f(a) = A,\ f(b) = B$, причому $A \neq B$, то для будь-якого числа C, що лежить між A і B, знайдеться принаймні одне таке число c на відрізку $[a, b]$, що $f(c) = C$.

Властивість 3. Нехай для двох неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій $f(x)$ та $g(x)$ виконуються нерівності: $f(a) > g(a),\ f(b) < g(b)$. Тоді на інтервалі (a, b) існує таке значення c, для якого $f(c) = g(c)$.

Властивість 4 (теорема Вейєрштрасса). Функція, яка неперервна на відрізку, досягає на ньому свого найбільшого і найменшого значень.

Властивість 2 ще називають теоремою про проміжне значення. Властивість 3 є узагальненням властивості 2.

Доведемо *властивість 1.* Використаємо метод поділу відрізка навпіл. Для означеності покладемо, що $f(a) < 0, f(b) > 0$.Точкою $\frac{a+b}{2}$ поділимо відрізок $[a,b]$ навпіл. Може трапитися, що значення функції в цій точці дорівнює нулю, тоді властивість буде доведеною. Нехай тепер $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$. Тоді на кінцях одного із двох утворених відрізків функція набуватиме значення різних знаків, причому, від'ємне на лівому кінці і додатне – на правому. Позначимо цей проміжок через $[a_1, b_1]$, маємо, що $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Розділимо відрізок $[a_1, b_1]$ навпіл і знову повторимо попередні міркування. Відкинувши той випадок, коли всередині цього відрізка функція набуває значення нуль (бо тоді властивість буде вже доведеною), позначимо через $[a_2, b_2]$ ту половину попереднього проміжку, для якої $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$.

Продовжимо процесс побудови таких проміжків. Якщо на якомусь скінченному кроці ми не натрапимо на точку, в якій функція набуває значення нуль (і тоді процес доведення буде закінчено), то одержимо послідовність вкладених відрізків $[a_n, b_n]$, для яких $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. Причому, довжина відрізка $[a_n, b_n]$, очевидно, дорівнює $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Побудована послідовність задовольняє принципу вкладених відрізків: для будь-якої системи вкладених відрізків, довжина яких прямує до нуля, існує єдине число, яке належить усім відрізкам даної системи. Це число є спільною границею послідовностей: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b = c$. Покажемо, що саме ця точка задовольняє вимогу нашої теореми, тобто, що $f(c) = 0$.

За умовою ми маємо нерівності $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. Переходячи до границі при $n \to \infty$ в цих нерівностях і використовуючи при цьому неперервність функції $f(x)$ (зокрема, в точці $x = c$), одержимо:

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$, тобто $f(c) \leq 0$ і $f(c) \geq 0$, а звідси $f(c) = 0$, що і треба було довести.

Доведемо *властивість 2.* Для означеності будемо вважати, що $A < B$, тоді $A < C < B$. Розглянемо на відрізку $[a, b]$ функцію $g(x) = f(x) - C$. Вона теж неперервна на відрізку $[a, b]$ і на його кінцях має значення різних знаків:

$$g(a) = f(a) - C = A - C < 0, \qquad g(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Тоді за першою теоремою між a та b знайдеться точка c, для якої $g(c) = 0$, тобто $f(c) - C = 0$, або $f(c) = C$, що і треба було довести.

Для доведення *властивості 3* достатньо розглянути допоміжну функцію $\varphi\ (x) = f\ (x) - g\ (x)$, яка теж буде неперервною на даному відрізку. Після цього використати попередню теорему.

Зауваження. Першу теорему Больцано – Коші можна успішно застосовувати при розв'язанні рівнянь з дійсними коефіцієнтами. Зокрема, для рівнянь виду $f\ (x)\ =\ 0$, де $f(x)$ – многочлен над полем дійсних чисел. Такий многочлен можна розглядати як функцію дійсної змінної, причому вона є неперервною на всій дійсній осі. Наведемо один з наслідків з першої теореми Больцано - Коші, який можна використати для розв'язання цього рівняння і на який ми спираємося (в п.2.3 магістерської роботи).

Твердження. Кожен многочлен непарного степеня над полем дійсних чисел має принаймні один дійсний корінь.

Доведення. Нехай $f\ (x)\ =\ a_{2k+1}x^{2k+1}\ +\ a_{2k}x^{2k}\ +\ \dots + a_1x + a_0$ – це многочлен з дійсними коефіцієнтами, $k \in N$ і змінна x набуває лише дійсних значень. Тоді цей многочлен можна розглядати як функцію дійсної змінної, причому вона є неперервною на всій дійсній осі. В теорії многочленів доведено, що при досить великих числових значеннях $|x|$ модуль старшого члена $|a_{2k+1}x^{2k+1}|$ більший за модуль суми всіх інших членів цього многочлена. Тому при $x \to -\infty$ та при $x \to +\infty$ старший член набуває різних знаків, і, отже, многочлен (функція) $f\ (x)$ при досить великих по модулю додатних та від'ємних значеннях змінної матиме різні за знаком значення. Тоді, згідно з теоремою Больцано – Коші, існує принаймні одна точка, в якій многочлен дорівнює нулю, тобто він має принаймні один корінь.

Твердження доведено.

Теоремою Больцано – Коші можна користуватися не тільки для встановлення факту існування кореня, а й для наближеного його обчислення. Для цього після встановлення проміжку, на якому корінь існує, ділять цей проміжок на дві або й більше (наприклад, 10) рівних частин і вибирають той із малих проміжків, на кінцях якого функція набуває значення різних знаків. Продовжуючи так поділяти проміжок, на якому міститься корінь, можна досягти наближеного обчислення кореня з бажаною точністю. (В пункті 2.3 ми розглядаємо це в геометричній задачі).

1.4. Поняття похідної. Дослідження функції на монотонність і екстремуми за допомогою похідної

Нехай функція $y = f\ (x)$ задана на деякому інтервалі (a, b), x_0 – довільна точка цього інтервалу. Надамо x_0 довільного приросту Δx (як додатного, так і від'ємного), але такого, щоб значення $x_0 + \Delta x$ належало інтервалу (a, b). Обчислимо приріст Δy функції $y = f\ (x)$ в точціx_0:

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f\ (x_0)$.

Означення. Якщо існує скінченна границя відношення приросту Δy функції $y = f\ (x)$ до приросту аргументу x_0 при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, то функцію називають диференційовною в цій точці, а ця границя називається похідною від функції $y = f\ (x)$ в точці x_0 і позначається $f'(x_0)$, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f\ (x_0)}{\Delta x}.$$

Це позначення, як і сам термін «похідна» вперше запропонував французький математик Лагранж.

Якщо похідна існує в кожній точці *x* інтервалу (a, b), то вона є функцією від x, її позначають $f'(x)$, функцію в цьому випадку називають диференційовною на цьому інтервалі.

З'ясуємо зв'язок між неперервністю і диференційовністю функції в точці.

Теорема 1. Якщо функція $f\ (x)$ диференційовна в точці x_0 , то вона в цій точці неперервна.

Доведення. Нехай існує

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f\ (x_0)}{\Delta x}.$$

Подамо приріст функції *y* вигляді $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$.

Тоді

$$\lim_{x\to x_0}\Delta y = \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot \lim_{x\to x_0}\Delta x = f'(x_0)\ \cdot 0 = 0,$$

тобто $\lim_{x\to x_0}\Delta y = 0$. А це й означає (за третім означенням неперервності функції в точці), що функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0. Теорема доведена.

Ця теорема показує, що неперервність функції в точці є необхідною умовою диференційовності її в цій точці. Проте обернене твердження не є правильне. Наприклад, функція $y = |x|$, будучи неперервною на всій дійсній осі, не має похідної в точці нуль.

В курсі математичного аналізу обґрунтовують правила диференціювання (похідна від суми, добутку, частки диференційованих функцій, похідна оберненої функції, складеної функції) та ряд інших теорем диференціального числення. Зупинимося коротко лише на застосуванні похідної до дослідження функції на монотонність та екстремуми, оскільки це використаємо в магістерській роботі (п. 2.3).

Теорема 2. Якщо функція $y = f(x)$ має у точці $x_0 \in (a,b)$ похідну і $f'(x_0) > 0$, то функція в цій точці зростає. Якщо функція $y = f(x)$ має у точці $x_0 \in (a,b)$ похідну і $f'(x_0) < 0$, то функція в цій точці спадає.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $f'(x_0) > 0$. З означення похідної $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ та з умови $f'(x_0) > 0$ випливає, що знайдеться $\delta -$ окіл точки x_0 ($\delta > 0$), який міститься в інтервалі (a,b), що для всіх значень аргументу $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, крім, можливо, точки $x = x_0$, справджується нерівність $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. Тоді в цьому околі лівіше від x_0 знаменник дробу буде від'ємним, а значить і чисельник від'ємний,тобто при $x < x_0$ буде $f(x) < f(x_0)$. А правіше від x_0 знаменник дробу буде додатним, а значить і чисельник додатний, тобто при $x = x_0 + \Delta x$ та $x > x_0$ буде $f(x) > f(x_0)$. Отже, ми показали, що існує $\delta -$ окіл точки x_0 ($\delta > 0$), який міститься в інтервалі (a,b), що для всіх значень аргументу $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, а меншому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Це і означає, що функція в цій точці є зростаючою, що і треба було довести.

Другий випадок доводять аналогічними міркуваннями.

За допомогою похідної можна знаходити точки екстремуму диференційовної функції.

Теорема 3. Якщо функція має екстремум у деякій внутрішній точці проміжку, то в цій точці її похідна, якщо вона існує, дорівнює нулю.

Доведення проведемо методом від супротивного. Якщо припустити, що похідна в цій точці буде додатна, то, згідно з попередньою теоремою, функція в цій точці буде зростаючою. Отже, дана точка не буде точкою екстремуму, що суперечить умові теореми. Аналогічну суперечність одержимо і в припущенні, що похідна в цій точці від'ємна. Теорема доведена.

Ця теорема виражає необхідну умову існування екстремуму функції в даній точці з області визначення.

Точки, в яких похідна існує і дорівнює нулю, називають стаціонарними; стаціонарні точки і точки, в яких похідна не існує, називають критичними точками. В критичній точці виконується лише необхідна умова існування екстремуму, а отже, екстремум в ній може бути, а може і не бути. Наступне твердження виражає достатні умови існування екстремуму в критичній точці.

Теорема 4. Нехай функція $f\ (x)$ неперервна в критичній точці x_0 і нехай існує окіл $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ цієї точки, в якому функція має похідну, крім, можливо, самої цієї точки. Тоді:

1) Якщо в інтервалі $(x_0 - \delta,\ x_0)$ похідна додатна, а в інтервалі $(x_0,\ x_0 + \delta)$ похідна від'ємна, то x_0 є точкою максимуму функції;

2) Якщо в інтервалі $(x_0 - \delta,\ x_0)$ похідна від'ємна, а в інтервалі $(x_0,\ x_0 + \delta)$ похідна додатна, то x_0 є точкою мінімуму функції;

3) Якщо в обох інтервалах похідна має той самий знак, то ця критична точка не є екстремальною точкою даної функції.

Доведення. Розглянемо перший випадок. Тут для всіх x з інтервалу $(x_0 - \delta,\ x_0)$ функція зростає, а для всіх x з інтервалу $(x_0,\ x_0 + \delta)$ функція спадає. Отже, для обох інтервалів значення функції на них менші за значення $f\ (x_0)$. А це і означає, що дана точка є точкою максимуму функції.

Другий випадок доводимо аналогічно.

В третьому випадку покладемо спочатку для означеності, що похідна в обох інтервалах додатна. Тоді в цих інтервалах функція зростає. Отже, функція в цій точці є зростаючою, значить, така точка не є точкою екстремуму. Якщо ж похідна в обох інтервалах буде від'ємною, то функція в цій точці спадає. Значить, ця точка не є екстремальною.

Теорема доведена.

Нехай функція $y = f\ (x)$ диференційовна на деякому проміжку. Тоді, якщо її похідна, яка є функцією від x, має похідну в деякій точці x_0 цього проміжку, то цю похідну називають другою похідною функції в цій точці і позначають $y''(x_0) = f''(x_0)$. Саму функцію $y = f\ (x)$ називають двічі диференційовною в цій точці. Якщо ж ця функція двічі диференційовна в кожній точці цього проміжку, то її називають двічі диференційовною на цьому проміжку. Використовуючи другу похідну, в окремих випадках можна простіше дослідити функцію на екстремум. Про це говориться в наступному твердженні (наводимо його без доведення).

Теорема 5. Нехай в стаціонарній точці функції $y = f\ (x)$ існує похідна другого порядку. Якщо значення другої похідної в цій точці додатне, то ця точка є точкою мінімуму функції, якщо ж воно від'ємне, то в даній точці функція має максимум.

Наведені теореми показують, як можна дослідити функцію на монотонність та екстремуми.

1.5. Диференціал функції

В попередньому параграфі ми дали означення диференційовної функції в точці, а саме:

Означення 1. Функція називається диференційовною в точці, якщо вона має похідну в цій точці, тобто якщо існує границя відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля.

Будемо вважати, що це перше означення, адже можна дати означення диференційовної функції в точці дещо по-інакшому.

Означення 2. Функцію $y = f(x)$ називають диференційовною в точці x_0, якщо її приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

де $A = A(\Delta x)$ – деяке число, а $\alpha(\Delta x)$ прямує до нуля, якщо Δx прямує до нуля.

Доведемо, що ці означення еквівалентні.

Нехай функція $y = f(x)$ задана на деякому проміжку (a, b) і диференційовна в точці x_0 за першим означенням, тобто вона має похідну $f'(x_0)$. За означенням похідної маємо: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Користуючись означенням границі, маємо, що існує окіл точки $\Delta x = 0$, який належить проміжку (a, b) і такий, що для всіх значень Δx з цього околу, крім цієї точки $\Delta x = 0$, справджується рівність

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \text{де } \alpha(\Delta) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Помножимо обидві частини останньої рівності на Δx ($\Delta x \neq 0$).

Дістанемо: $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, тобто вигляд

$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, тут $A = f'(x_0)$, про який говориться в означенні 2.

Отже, ми одержали, що якщо функція диференційовна в точці за першим означенням, то вона диференційовна в цій точці й за другим означенням.

Нехай тепер функція диференційовна в точці x_0 за означенням 2, тобто її приріст в цій точці має вигляд: $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Поділимо обидві частини цієї рівності на Δx ($\Delta x \neq 0$), одержимо: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, причому доданок $\alpha(\Delta x)$ прямує до нуля при $\Delta x \to 0$. Перейдемо в цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$. Будемо мати: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$. Ця рівність означає, що функція $y = f(x)$ має похідну в даній точці, і ця похідна дорівнює *A,* тобто $f'(x_0) = A$.

Отже, ми довели, що якщо функція диференційовна в точці за другим означенням, то вона диференційовна в цій точці й за означенням 1.

Еквівалентність означень 1 та 2 диференційовності функції в точці викладеними міркуваннями повністю доведена.

Таким чином, для функції $y = f(x)$, яка є диференційовною в точці x_0 , її приріст Δy в цій точці можна записати так:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x.$$

Проаналізуємо детальніше цю останню формулу.

Якщо $f'(x_0) \neq 0$, то перший доданок $f'(x_0) \cdot \Delta x$ є величиною однакового порядку з Δx , тому що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0$. Водночас $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0$. А це означає, що другий доданок є величиною вищого порядку малості, ніж Δx. Розглянувши границю відношення другого доданку до першого, одержимо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x) \cdot \Delta x}{f'(x_0) \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x)}{f'(x_0)} = 0.$$

А це означає, що другий доданок також є величиною вищого порядку малості, ніж перший доданок.

Отже, можемо зробити важливий висновок: перший доданок в рівності $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x$ є головною частиною приросту функції. Тому з цієї рівності і встановленого щойно висновку для приросту функції можна записати наступну наближену рівність:

$$\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x, \text{ або } f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Це і є та формула, якою користуються при наближених обчисленнях.

Повернемось до виразу, що є головною частиною приросту функції в точці, на його підставі введемо нове поняття «диференціал функції в точці».

Означення 3. Добуток $f'(x_0) \cdot \Delta x$ називається диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 і позначається dy або $df(x_0)$.

Отже, $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x,$ або $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$

Звідси бачимо, що диференціал в розглянутій точці є лінійною функцією від Δx. Нагадаємо також і вказану вище властивість диференціала: диференціал є головною частиною приросту функції.

Диференціалом *аргументу* прийнято називати його приріст, тобто вважають, що $\Delta x = dx$. До такого узгодження можна дійти, якщо ототожнити диференціал *незалежної змінної* $\boldsymbol{x}$ з диференціалом *функції* $\boldsymbol{y = x}$. Тоді дійсно одержимо: $dx = x'_x \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Враховуючи це узгодження, можна переписати формулу, яка дає означення диференціалу, в такому вигляді:

$$dy = y'_x \cdot dx .$$

З останньої формули одержуємо рівність: $y'_x = \frac{dy}{dx}$.

Ця рівність показує, що хоч $dx,$ а значить і dy є неозначеними (бо $dx = \Delta x$ змінюється довільно), проте вони змінюються пропорційно.

Коефіцієнтом пропорціональності якраз і є y'_x . Водночас дістаємо ще одне означення похідної, вона є відношенням диференціалу функції до диференціалу аргументу.

Обчислення диференціалів називають терміном «диференціювання» (походить від латинського слова differentia, яке означає «різниця»). Як було раніше сказано, таким же терміном називають і знаходження похідної від функції.

Поняття диференціалу і сам цей термін належить Лейбніцу (01.07.1646 – 14.11.1716), вчений вважав це поняття основним. Побудова поняття диференціалу на основі похідної почалася дещо пізніше - від часів Коші (21.08.1789 – 23.05.1857).

Для диференціалів легко можна вивести формули - правила диференціювання, аналогічні до правил обчислення похідних. Якщо u і $v -$ диференційовні функції, то правильні такі рівності:

1) $d(C \cdot u) = C \cdot du$, (C = const);
2) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
3) $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$;
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Відмітимо важливу властивість диференціала – інваріантність його форми.

Нехай функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(t)$ такі, що з них можна утворити складену функцію $y = f\big(\varphi(t)\big)$. Якщо існують похідні y'_x і x'_t , то існує і похідна y'_t, причому $y'_t = y'_x \cdot x'_t$. Для функції y від незалежної змінної t диференціал функції y можна записати так: $dy = y'_t \cdot dt$. Підставивши сюди вираз для y'_t, одержуємо: $dy = y'_x \cdot x'_t \cdot dt = y'_x \cdot dx$.

Тобто навіть для випадку, коли x є функцією від деякого аргументу (тобто не є незалежною змінною) одержаний вираз для диференціалу
$dy = y'_x \cdot dx$ зберіг таку ж форму, як і для випадку, коли x – незалежна змінна.

Ми цікавимося диференціалами, як джерелом наближених формул.

Як було вказано вище, $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$. Цю формулу можна записати, використавши поняття диференціала: $\Delta y \approx dy$. З геометричної точки зору ця наближена рівність означає заміну приросту ординати кривої приростом ординати дотичної, що легко можна проілюструвати графічно. Заміна приросту функції Δy її диференціалом dy є достатньо корисною передусім тому, що dy залежить від Δx лінійно, в той час як Δy є зазвичай значно складнішою функцією від Δx. Обчислити диференціал функції значно простіше, ніж обчислити її приріст. Адже для обчислення диференціалу достатньо тільки знайти похідну цієї функції і помножити її на приріст незалежної змінної.

Отже, матимемо значну економію в обчисленнях. Зауважимо, що заміна приросту функції Δy її диференціалом dy дуже ефективна, якщо приріст аргументу досить малий. І чим меншим буде приріст незалежної змінної, тим меншою буде допущена похибка в одержаному результаті внаслідок заміни приросту функції її диференціалом.

У наближену рівність $\Delta y \approx dy$ підставимо вираз для приросту функції, одержимо:

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx dy$, або $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy$.

Цією формулою якраз і користуються при наближених обчисленнях. Проілюструємо це на прикладі.

Задача. Довести наближену рівність $(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha$ при $\alpha \to 0$.

Розв'язання.

Розглянемо функцію $y = x^n$. Тоді $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$. Обчислимо диференціал цієї функції: $dy = n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x$. Використовуючи наближену рівність $\Delta y \approx dy$ при $\Delta x \to 0$, одержимо:

$$(x + \Delta x)^n - x^n \approx n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x.$$

Звідси будемо мати:

$$(x + \Delta x)^n \approx x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x.$$

Покладемо: $x = 1, \Delta x = \alpha$. Одержимо: $(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha$ при $\alpha \to 0$, що і треба було довести.

Досить зручно використовувати диференціали в наближених обчисленнях при оцінці похибок. Нехай, наприклад, величину x ми можемо виміряти або обчислити безпосередньо, а залежну від неї величину y обчислюємо за формулою $y = f(x)$. Нехай при вимірюванні величини x була допущена похибка Δx, тоді й величина y теж отримає певну похибку Δy. Через те, що величини цих похибок малі, то можна приріст замінити диференціалом, при цьому навіть записати не наближену рівність: $\Delta y = dy$, тобто $\Delta y = y'_x \cdot$

Δx. Позначимо символом δ_x максимальну абсолютну похибку величини x: $|\Delta x| \leq \delta_x$.

Зауважимо, що зазвичай ця похибка при вимірянні величини x відома, вона виражається в одиницях вимірюваної величини. Тоді очевидно, що за максимальну абсолютну похибку величини y (її позначимо символом δ_y) можна взяти число $\delta_y = |y'_x| \cdot \Delta x$. Відносна похибка δ наближено дорівнюватиме $\frac{dy}{y}$, дуже часто її виражають у відсотках: $\delta = \frac{dy}{y} \cdot 100\%$.

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

В загальноприйнятій типології геометричних задач виділяють основні їх типи: на обчислення, на доведення, на побудову. Віднесення задачі до певного типу, звичайно, є дещо умовним. Особливо це стосується нестандартних задач, наприклад, так званих задач на існування.

В магістерському дослідженні розглянемо два типи таких задач: задачі на конфігурацію, задачі на розбиття.

В задачах на конфігурацію треба дослідити, чи існує деяка геометрична фігура або тіло, для елементів якого виконуються певні умови. Задачами на існування є також і задачі на вияснення можливості деякого розбиття геометричних об'єктів, яке б задовольняло вказані в умові вимоги.

Вибір методів для розв'язання таких задач є актуальною проблемою. В багатьох випадках тут можна використати апарат математичного аналізу, зокрема, неперервні функції.

Означення неперервності функції в точці базується на понятті границі: функція, що визначена на деякому проміжку, називається неперервною у внутрішній точці з цього проміжку, якщо існує границя функції в цій точці і ця границя дорівнює значенню функції в цій точці. Проте в геометричних міркуваннях його доцільно замінити рівносильним означенням, пов'язаним з поняттям приросту функції. Воно, по суті, означає, що функція буде неперервною в точці, якщо будь-яким малим приростам аргументу відповідають малі прирости функції. Розглянувши таку функцію, задану аналітично або описово, далі зазвичай використовують відомі властивості функцій, неперервних на відрізку.

2.1. Використання неперервних функцій в задачах на конфігурацію

Задачі на конфігурацію. У задачах цього типу висловлюється твердження або ставиться питання про існування такої конфігурації фігури, для якої вказана величина досягає деякого, зафіксованого в умові, значення, або ж ця величина задовольняє певним, вказаним в умові, вимогам.

Проілюструємо, як можна використати властивості функцій, неперервних на відрізку, при розв'язанні кількох геометричних задач на конфігурацію.

Задача 1. Довести, що в крузі з центром O можна провести хорду AB так, що площа трикутника AOB буде дорівнювати площі сегмента, який відтинається цією хордою.

Розв'язання.

Площа трикутника AOB, як і площа відповідного сектора $AOBCA$, залежить від величини центрального кута AOB (рис. 1).

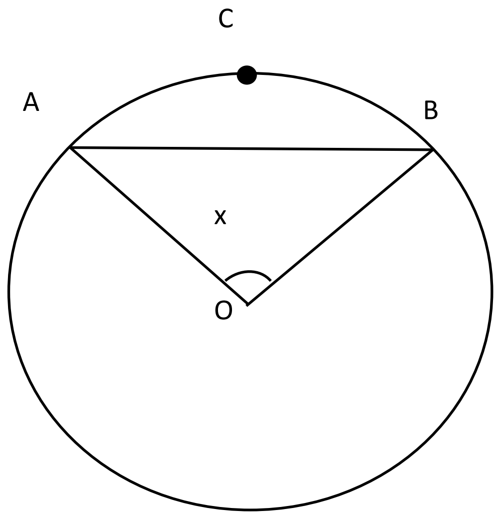

Рис. 1

Позначимо цей кут через x, при цьому будемо використовувати радіанну міру. Вибір радіанної міри більш доцільний, оскільки тоді формула площі сектора та сегмента буде виглядати дещо простіше.

Нехай R – радіус кола. Будемо мати:

$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}R^2\sin x.$

Площа сегмента ACB дорівнює різниці площі сектора і площі цього трикутника, тому будемо мати:

$$S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2}R^2x - \frac{1}{2}R^2\sin x = \frac{1}{2}R^2(x - \sin x).$$

Отже, площі трикутника ABO та сегмента ACB будуть рівними при умові, що при деякому значенні аргументу рівними будуть значення таких функцій: $f(x) = \sin x,\ g(x) = x - \sin x.$ Областю визначення можна взяти відрізок $[0, \pi]$ (або навіть дещо вужчий $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ суто з очевидних міркувань, бо при цих значеннях x площа трикутника менша за площу сегмента, і при цьому ні трикутник, ні сегмент не вироджуватимуться в точку та відрізок). Очевидно, що обидві функції неперервні, бо якщо кут x матиме малий приріст, то й площі трикутника та сегмента зміняться мало, тобто й ці функції теж одержать малий приріст.

Обчислимо значення цих функцій в точках $\frac{\pi}{2}$ та $\frac{2\pi}{3}$, які належать області визначення:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 < 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) > g\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Порівняємо значення цих функцій в точці $\frac{2\pi}{3}$.

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1, \qquad g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} > 1,$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < g\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Отже, маємо: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > g\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < g\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Тепер використаємо властивість 3 (з пункту 1.3) і одержимо, що на інтервалі $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ знайдеться таке значення аргументу, при якому будуть рівними значення функцій $f(x) = \sin x$ та $g(x) = x - \sin x$. Отже, при цьому значенні кута x будуть рівними площі трикутника і сегмента, що й треба було довести.

Задача 2. Периметр дельтоїда дорівнює 2024, одна з його діагоналей дорівнює 1010. Чи може його друга діагональ бути рівною 6?

Розв'язання. В цій задачі зафіксовані числові значення периметра і діагоналей. Тому можна дещо змінити постановку питання. Отже, будемо досліджувати, чи може периметр дельтоїда дорівнювати 2024, якщо його діагоналі 1010 і 6.

Нехай $ABCD$ – дельтоїд, $AB = AD$, $CB = CD$, $AC = 1010$, точка M – середина AC, $MA = 505$, $BD = 6$, точка K – середина BD, причому K належить AC і діагоналі взаємно перпендикулярні (рис. 2).

Якщо точка K рухатиметься по AC, то конфігурація дельтоїда, а, отже, і його периметр змінюватимуться в залежності від відстані між K та M. Позначимо відстань $MK = x$, бачимо, що периметр є функцією від x:

$P_{ABCD} = p\,(x)$.

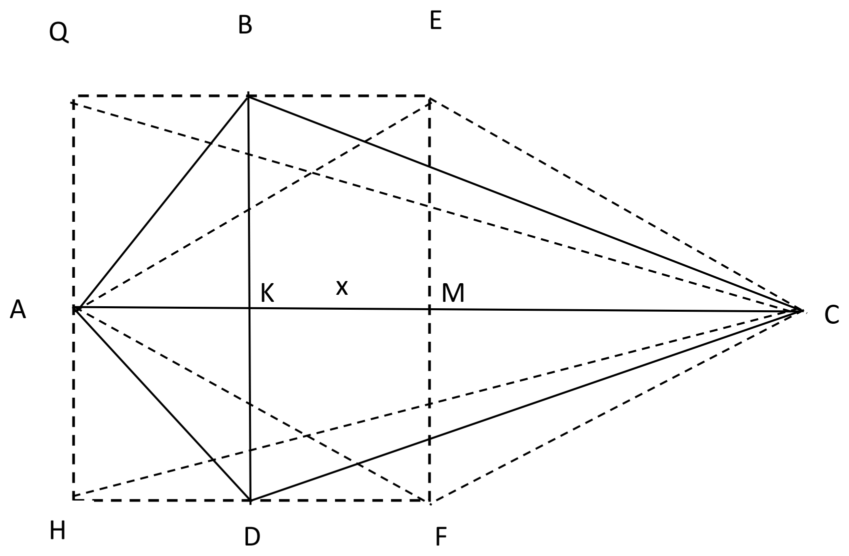

Рис.2

Зауважимо, що аналітичне вираження для функції $p(x)$ наводити тут не обов'язково. При невеликій зміні аргумента x периметр теж зміниться мало, а це означає, що функція $p(x)$ є неперервною. Областю визначення можна взяти відрізок $[0, 505]$.

При $x = 0$ точка K співпаде з точкою M, то ж дельтоїд стане ромбом $AECF$, а при $x = 505$ точка K співпаде з точкою A, тоді дельтоїд вироджується в рівнобедрений трикутник HQC.

Обчислимо значення функції $p(x)$ на кінцях відрізка $[0, 505]$.

$$p\,(0) = 4AE = 4\sqrt{3^2 + 505^2} = 4 \cdot 505{,}0089 \ldots = 2020{,}03 \ldots < 2024;$$

$$p\,(505) = HQ + 2QC = 6 + 2\sqrt{3^2 + 1010^2} >$$

$$> 6 + 2 \cdot 1010 = 2026 > 2024.$$

Отже, маємо: $p\,(0) < 2024 < p\,(505)$. Тепер за теоремою про проміжне значення функції, неперервної на відрізку (властивість 2 з пункту

1.3), випливає, що на інтервалі $(0;\ 505)$ існує таке значення c аргументу x, що $p\ (c) = 2024$. Отже, відповідь на питання задачі ствердна.

Відповідь. Так.

Задача 3. Чи можна в коло радіуса 1 вписати трикутник, який має периметр 5?

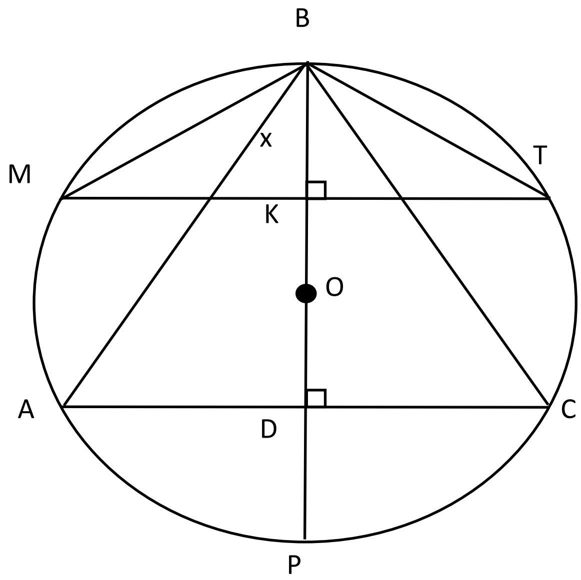

Рис. 3.

Розв'язання.

Проведемо в колі вертикальний діаметр BP (рис. 3).

Дослідимо ту конфігурацію шуканого трикутника, коли його вершина буде в точці B, а протилежна їй сторона MT перпендикулярна діаметру BP. Тобто шуканий трикутник BMT буде рівнобедреним ABC.

Зауважимо, що частинним випадком буде рівносторонній трикутник ABC, у нього сторона дорівнює $\sqrt{3}$, оскільки радіус кола дорівнює 1. Очевидно, що його висота BD дорівнює 1,5. Периметр трикутника ABC дорівнює $3\sqrt{3} = \sqrt{27} > 5$.

Периметр шуканого трикутника BMT залежить від висоти BK. Позначимо $BK = x$. Отже, периметр є функцією від x, причому вона неперервна (адже при невеликій зміні x периметр теж зміниться мало). Областю визначення функції $p(x)$ є відрізок $[0;\ 2]$. Як і в попередній задачі, аналітичний вираз функції не наводимо. Вище ми обчислили значення $p(1{,}5)$, це випадок трикутника ABC: $p(1{,}5) = \sqrt{27} > 5$.

Розглянемо тепер граничний випадок, коли $x = 0$. Тоді трикутник BMT вироджується в точку B, отже, $p(0) = 0$. Ми одержали, що неперервна функція $p(x)$ на кінцях відрізка [0; 1,5] приймає значення менше за 5 та більше за 5 відповідно. Тому можна використати теорему про проміжне значення і твердити, що на інтервалі $(0;\ 1{,}5)$ існує точка, в якій $p(x) = 5$. Трикутник периметра 5 в дане коло вписати можна.

Відповідь. Так.

Задача 4. Радіуси двох концентричних кіл R і $2R$. Довести, що можна провести пряму так, що ці кола відтинатимуть на ній рівні відрізки.

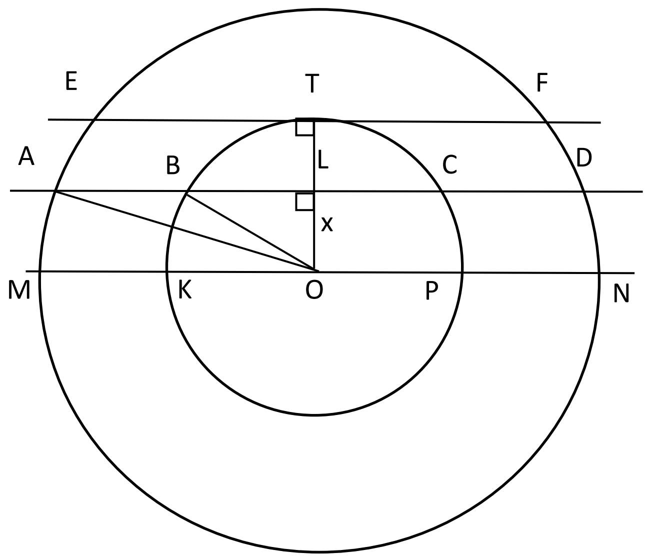

Рис.4

Розв'язання.

Проведемо пряму, на якій дані кола відтинають відрізки

$AB, BC, CD;\ AB = CD$ (рис. 4).

Довжини цих відрізків залежать від відстані $OL = x$ від центра кола до прямої, тобто є функціями від x. Нехай $f(x) = BC, g(x) = AB = CD$. Очевидно, що ці функції неперервні.

$$f(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2},$$

$$g(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Областю визначення беремо відрізок $[0, R]$. Будемо мати:

$$f(0) = KP = 2R, g(0) = MK = R, f(R) = 0, g(R) = ET = R\sqrt{3}.$$

Одержали: $f(0) > g(0), f(R) < g(R)$. Тоді за узагальненою властивістю про проміжне значення маємо: існує таке значення $k \in (0, R)$, що $f(k) = g(k)$, тобто відрізки AB, BC і CD будуть рівні, що й треба було довести.

2.2. Задачі на розбиття. Суть методу «рухомого ножа»

Задачі на розбиття ставлять питання про можливість чи неможливість виконати певне розбиття плоскої геометричної фігури за допомогою однієї чи кількох прямих, щоб при цьому виконувались певні умови (часто серед них є вимога одержати рівновеликі фігури, або ж вимога, щоб одержані фігури мали рівні периметри і т.п.). В стереометричних задачах цього типу говориться про можливість розбиття геометричного тіла однією чи кількома площинами на складові рівновеликі тіла (тобто які мають однакові об’єми), або інші умови (що стосуються площ поверхонь і т.п.).

Задача 1. Довести, що будь-який трикутник можна розбити на два трикутники так, що вписані в ці трикутники кола матимуть рівні радіуси.

Розв’язання. Розглянемо довільний трикутник ABC. Очевидно, що розбити його на два трикутники можна лише тією прямою, яка проходить через одну з вершин трикутника і перетинає протилежну сторону. Нехай це буде пряма BM, де $M \in AC$ (рис.5).

Позначимо радіуси кіл, які вписані в утворені трикутники AMB та CBM, через r_1та r_2 відповідно: $r_1 = O_1H_1, r_2 = O_2H_2$.

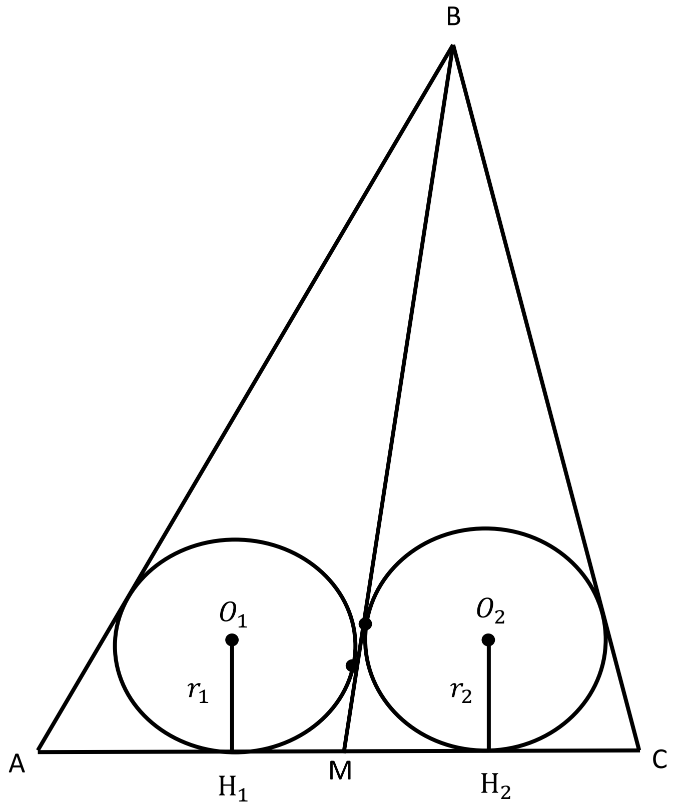

Рис. 5

Величини r_1 і r_2 залежать від положення точки M на стороні AC. Якщо позначимо $AM = x$, то

$MC = AC - x = b - x$,

де $x \in [0;\ b]$.

Отже, $r_1 = r_1(x)$, $r_2 = r_2(x)$ – функції від змінної x. Зауважимо, що при невеликій зміні змінної x значення $r_1(x)$ та $r_2(x)$ зміняться небагато, тобто функції $r_1(x)$ та $r_2(x)$ є неперервними.

На кінцях відрізка $[0;\ b]$ будемо мати, що один з трикутників AMB та CBM вироджується у відрізок (сторону трикутника ABC), а другий трикутник співпаде з трикутником ABC

Тоді $r_1(0) = 0$, $r_2(0) = r$, де r – радіус вписаного в трикутник ABC кола; $r_1(b) = r$, а $r_2(b) = 0$.

Розглянемо функцію $f(x) = r_1(x) - r_2(x)$. Вона неперервна на відрізку $[0;\ b]$, як різниця двох неперервних тут функцій. Маємо:

$f(0) = r_1(0) - r_2(0) = 0 - r = -r$; $f(b) = r_1(b) - r_2(b) = r - 0 = r$, тобто $f(0) < 0, f(b) > 0$.

Тоді за першою теоремою Больцано-Коші випливає, що на відрізку $[0;\ b]$ існує точка x_0, в якій функція $f(x)$ набуває значення нуль: $f(0) = 0$.

Отже, $r_1(x_0) - r_2(x_0) = 0$, а звідси $r_1(x_0) = r_2(x_0)$. Таким чином твердження задачі доведено.

Зауваження. Як бачимо, задача має три розв'язки, адже розбивати трикутник прямою можна з кожної його вершини.

Задача 2. Довести, що будь-який опуклий многокутник можна розбити на два рівновеликі многокутники прямою, яка проходить через задану точку.

Розв'язання. Розглянемо *перший випадок*, коли дана точка A не належить внутрішній області і контуру многокутника (рис. 6).

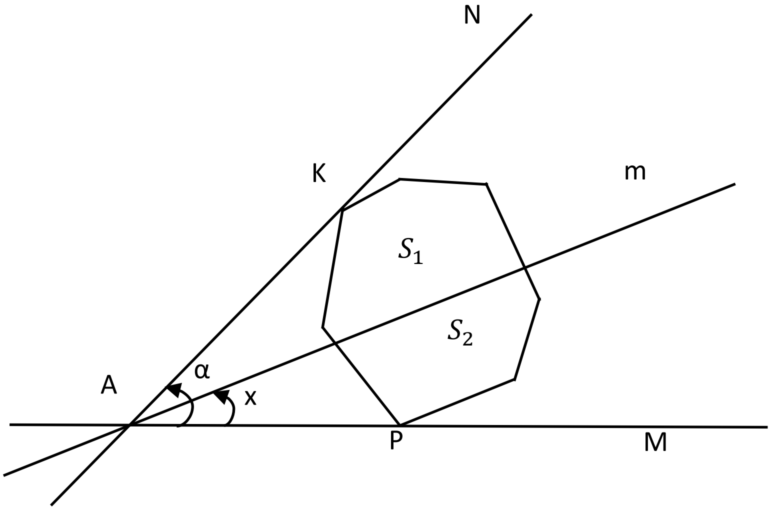

Рис. 6

Проведемо через точку A та дві відповідні вершини многокутника прямі AM та AN так, щоб многокутник знаходився у внутрішній області кута NAM. Шукану пряму m, яка розбиває даний многокутник на дві рівновеликі фігури, проведемо під кутом x до прямої AM. $\alpha = \angle NAM$.

Очевидно, що $0 \leq x \leq \alpha$. Якщо при такій побудові прямої m виявиться, що одержані фігури рівновеликі, то задача розв'язана.

Нехай $S_1 \neq S_2$. Площі цих частин залежать від кута x, тобто є функціями від x, причому, неперервними на відрізку $[0, \alpha]$. Достатньо розглянути одну з них, наприклад, $s(x) = S_2$, тоді $S_1 = S - s(x)$, де $S -$ площа даного многокутника. Для функції $s(x)$ будемо мати: $s(0) = 0,\ s(\alpha) = S$. Ця функція неперервна на проміжку $[0,\ \alpha]$ і $0 \leq \frac{1}{2}S \leq S$. Тому за теоремою про проміжне значення випливає, що на цьому проміжку знайдеться таке значення x_0 аргументу, для якого $s(x_0) = \frac{1}{2}S$, що і треба було довести.

В математиці задачу про можливість розбиття навпіл досліджували багато визначних вчених. В n-вимірному просторі одержане твердження відоме як «теорема про бутерброд». Для випадку трьохвимірного простору твердження висловив у 1938 році польський математик Гуго Штейнгауз (1887 - 1972), а довів Стефан Банах (1892 - 1945). Математичний об’єкт для розбиття в n- вимірному просторі складається з n елементів, інструментом для виконання розбиття виступає гіперплощина. В трьохвимірному просторі цей об’єкт є своєрідним аналогом бутерброда, що складається, наприклад, з двох кусочків хліба, між якими покладений кусочок сиру чи щось інше. Розбиття цього об’єкта, тобто розрізання навпіл, виконують звичайною площиною, яка виступає своєрідним «ножем». У двохвимірному просторі умовний «бутерброд» стає нескінченно тонким «млинцем», який розрізають навпіл відповідним «ножем» - прямою. Термін «бутерброд» прижився і в n-вимірному просторі. Для n-вимірного простору теорему про бутерброд довели Артур Г. Стоун та Джон Тьюкі, то ж її ще називають теоремою Стоуна-Тьюкі.

Для доведення цих теорем був розроблений метод «ножа, який рухається» (паралельно переноситься, обертається). Коротко висвітлимо його сутність для двохвимірного та трьохвимірного простору. (В подальшому терміни «бутерброд», «млинець», «рухомий ніж» чи просто «ніж» трактуємо як математичні поняття і записуватимемо без лапок).

Виконаємо певним чином розріз (довільно взагалі кажучи) і вважатимемо це положення ножа початковим. Коли рухомий ніж якимсь чином розріже бутерброд, то одну зі сторін ножа вважають додатною, якщо відповідна цій стороні частина бутерброда є більша за половину. Нехай це буде частина номер 2, а інша менша - частина номер 1. Позначимо міру частини бутерброда (млинця), про яку йдеться в задачі, при положенні ножа під кутом α до фіксованого початкового положення через $p(\alpha)$. Вибір міри задає умова задачі, це може бути площа, периметр, об'єм і т. п. Значення $p(\alpha)$ змінюється від 0 до 1. Тоді для додатної сторони ножа $p\ (\alpha) \geq \frac{1}{2}$. Якщо виявиться, що $p(\alpha) = \frac{1}{2}$, то задача розв'язана. Якщо при початковому положенні ножа, коли $\alpha = 0$, матимемо, що $p\ (0) > \frac{1}{2}$, то повернемо наш ніж на 180°. Тоді він, по суті будучи прямою чи площиною, залишиться на тому самому місці, але його додатна сторона перейде на першу частину бутерброда (млинця). А це означає, що $p\ (180°) \leq \frac{1}{2}$. Але функція $p\ (\alpha)$ неперервна. Тому за теоремою про проміжне значення випливає, що існує таке значення кута, при якому $p\ (\alpha) = \frac{1}{2}$. Цим доведено можливість розрізу бутерброда (млинця) навпіл.

Проілюструємо цей метод на розв'язанні задачі 2 (*другий випадок*).

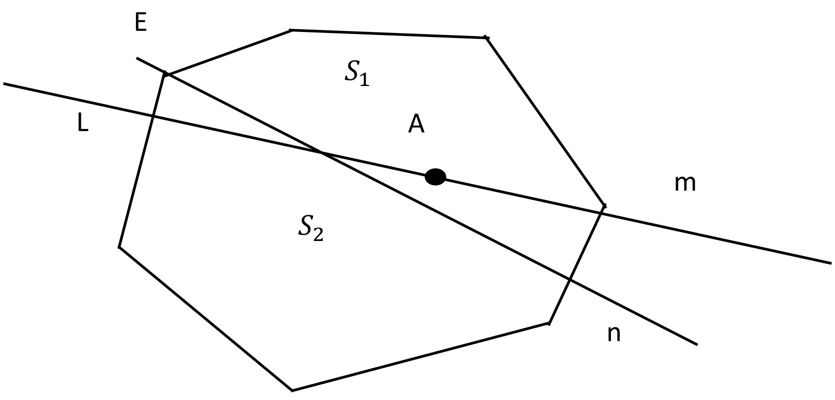

Рис. 7

Нехай точка A, через яку будемо проводити розбиття многокутника, лежить у його внутрішній області чи на контурі (наприклад, є внутрішньою точкою L його сторони чи співпадає з деякою його вершиною E).

Проведемо через задану точку A деяку пряму m (рис. 7). Назвемо це положення прямої початковим. Якщо виявиться, що многокутник вже поділився на рівновеликі частини, то задача розв'язана. В супротивному випадку повторимо хід міркувань щойно описаного методу рухомого ножа, ним виступає пряма. Мірою тут виступає площа одержаних фігур.

Отже, згідно описаного методу, знайдеться кут, для якого пряма займе таке положення, при якому многокутник поділиться на рівновеликі частини. Задача розв'язана.

2.3. Застосування похідної в геометричних задачах

Розглянемо задачі, які можна звести до розв'язання і дослідження алгебраїчних рівнянь виду $f(x) = 0$, де $f(x)$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами. В цьому випадку $f(x)$ можна розглядати як функцію дійсної змінної, причому вона є неперервною.

Задача 1. Коло, радіус якого дорівнює 1, дотикається до прямої m. Навколо нього описано рівнобедрений трикутник ABC, основа BC якого лежить на прямій m. Площа трикутника дорівнює S. Дослідити конфігурацію трикутника в залежності від значення його площі в загальному випадку. Обчислити висоту h_a в частинних випадках: 1) $S = 5$; 2) $S = 6$; 3) $S = 9$; 4) $S = 13$ з точністю до десятих і до сотих.

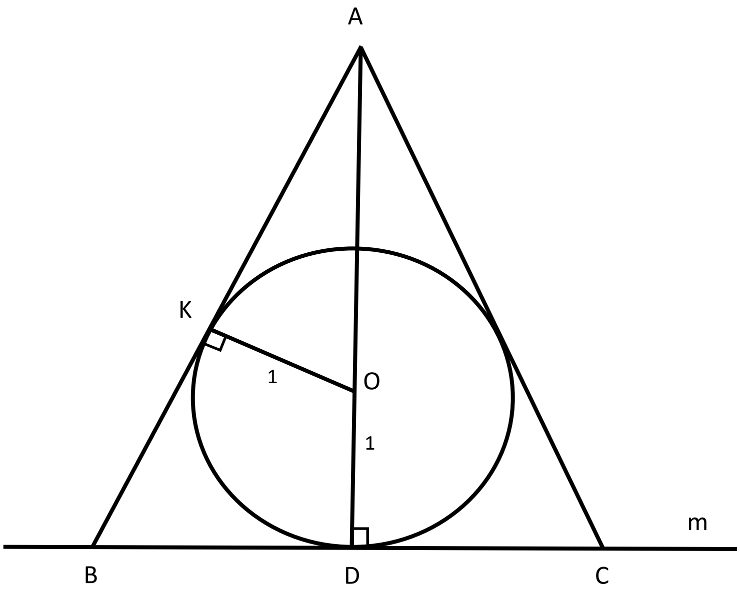

Рис.8

Розв'язання. Маємо: $AB = AC$, основа $BC \in m$ (рис. 8). Очевидно, що центр O кола належить висоті AD.

$S_{\text{круга}} = \pi R^2 = \pi$, отже, $S > \pi$. Конфігурація трикутника повністю визначається висотою AD. Позначимо $AD = x$. $x > 2R$, отже, $x > 2$. Будемо мати: $AO = x - 1$; $AK = \sqrt{AO^2 - OK^2} = \sqrt{x(x-2)}$.

$S_{\Delta ABC} = BD \cdot AD$, звідси $BD = \frac{S}{AD} = \frac{S}{x}$.

З подібності трикутників BAD і OAK маємо: $\frac{BD}{AD} = \frac{OK}{AK}$, звідси

$$BD \cdot AK = AD \cdot OK, \qquad \text{або} \qquad \frac{S}{x} \cdot \sqrt{x(x-2)} = x \cdot 1\,.$$

Спростимо одержане рівняння.

$S^2 x\,(x-2) = x^4$. А оскільки $x \neq 0$, то після скорочення на x будемо мати: $x^3 - S^2 x + 2S^2 = 0$. Нас цікавлять лише ті розв'язки, які більші за 2.

Позначимо $x^3 - S^2 x + 2S^2 = f(x)$. Ця функція (многочлен третього степеня) неперервна на всій дійсній осі. В курсі вищої алгебри доведено, що при великих по модулю значеннях змінної x числове значення многочлена має знак, який збігається зі знаком старшого члена. Тут на мінус нескінченності $f(x) < 0$,а на плюс нескінченності $f(x) > 0$. Тоді, згідно з першою теоремою Больцано – Коші (пункт 1.3), існує принаймні одне дійсне число x, для якого $f(x) = 0$, тобто $f(x)$ має принаймні один дійсний корінь. Детальніше дослідження проведемо за допомогою похідної. Для побудови ескізу графіка нам тут достатньо буде визначити інтервали монотонності та локальні екстремуми.

$f'(x) = 3x^2 - S^2$. При $x < -\frac{S}{\sqrt{3}}$ та при $x > \frac{S}{\sqrt{3}}$ функція зростає, а при $x \in (-\frac{S}{\sqrt{3}}; \frac{S}{\sqrt{3}})$ спадає.

$$f_{min} = f\left(\frac{S}{\sqrt{3}}\right) = 2S^2\left(1 - \frac{S}{3\sqrt{3}}\right); f_{max} = f\left(-\frac{S}{\sqrt{3}}\right).$$

Зобразимо ескіз графіка залежно від значення $f_{min} = f\left(\frac{S}{\sqrt{3}}\right)$ та врахувавши, що $f(2) = 8$ (рис. 9, а, б, в).

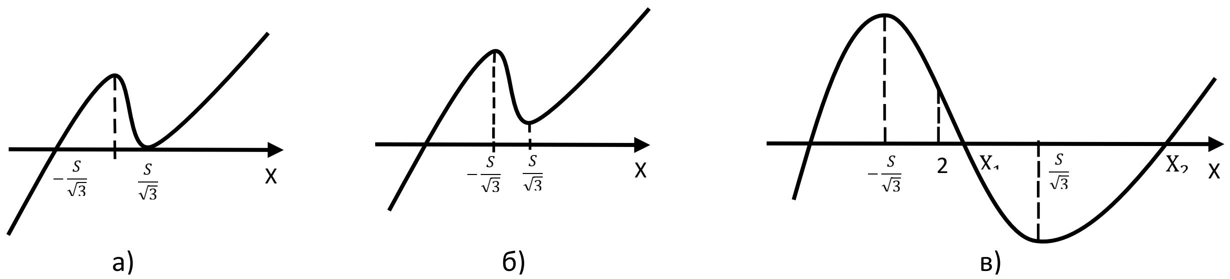

Рис. 9

У випадку а) маємо, що $f_{min} = 0$, звідси $1 - \frac{S}{3\sqrt{3}} = 0$, тобто S=$3\sqrt{3}$; єдиний додатний корінь нашого рівняння буде $x_{min} = \frac{S}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$. Повернувшись до рисунка 7, бачимо, що OD= $\frac{1}{3}$ AD , тобто центр кола (точка перетину бісектрис) співпав з точкою перетину медіан трикутника. А це можливо лише для рівностороннього трикутника. Отже, у випадку, коли $S = 3\sqrt{3} = 5{,}19615 \ldots$, описаний трикутник буде рівностороннім з висотою 3.

Розглянемо випадок б), в якому $f_{min} > 0$, тут $S < 3\sqrt{3}$ (або $S < 5{,}19615 \ldots$). При таких значеннях площі рівняння не матиме додатних коренів. Отже, описанного трикутника з площею 5, що було дано в умові задачі, не існує.

У випадку в) виконується нерівність $f_{min} < 0$, тут $S > 3\sqrt{3}$ (або $S > 5{,}19615 \ldots$). Бачимо, що рівняння має два додатних корені, які більші за 2: $x_1 \in \left(2; \frac{S}{\sqrt{3}}\right), x_2 > \frac{S}{\sqrt{3}}$. Значить, задача має два розв'язки – існує два різні описані трикутники з такою площею.

Підсумовуючи проведене у цій задачі дослідження, маємо наступні результати:

1) жоден описаний трикутник не може мати площу, що менша за $3\sqrt{3}$;

2) мінімальне значення площі S=$3\sqrt{3}$ можливе лише для рівностороннього трикутника, його висота дорівнює 3, а сторона $2\sqrt{3}$;

3) для кожного значення S, яке більше за $3\sqrt{3}$, існує два трикутники з такою площею; висота одного з них $h_a \in (2; \frac{S}{\sqrt{3}})$, а в другого $h_a > \frac{S}{\sqrt{3}}$.

В таблиці 1 подано всі необхідні дані для наближеного обчислення висоти з точністю до десятих та сотих.

Таблиця 1

№ п/п	Значення площі S	Відповідне рівняння *f(x)* = 0	Інтервали, яким належать додатні корені x_1 та x_2
1	S = 6	$x^3 - 36\,x + 72 = 0$	(2,369; 2,370), (4,453; 4,454)
2	S = 9	$x^3 - 81\,x + 162 = 0$	(2,117; 2,118), (7,752; 7,753)
3	S = 13	$x^3 - 169\,x + 338 = 0$	(2,051; 2,052), (11,852; 11,853)

Якщо вважати, що корені x_1 та x_2 (де $x_1 < x_2$) належать відповідно інтервалам (a, b) та (c, d), які записані в цій таблиці, то для кінців цих інтервалів виконуються наступні нерівності:

$$f(a) > 0, \qquad f(b) < 0; \qquad f(c) < 0, \qquad f(d) > 0.$$

Отже, маємо такі наближені значення x_1та x_2 з точністю до десятих (та до сотих):

1) $S = 6$: $x_1 \approx 2{,}4$ $(x_1 \approx 2{,}37)$; $x_2 \approx 4{,}5$ $(x_2 \approx 4{,}45)$;

2) $S = 9$: $x_1 \approx 2{,}1$ $(x_1 \approx 2{,}12)$; $x_2 \approx 7{,}8$ $(x_2 \approx 7{,}75)$;

3) $S = 13$: $x_1 \approx 2{,}1$ $(x_1 \approx 2{,}05)$; $x_2 \approx 11{,}9$ $(x_2 \approx 11{,}85)$.

Задача розв'язана.

Задача 2. Який з прямокутників, що вписані в півкруг радіуса a, має найбільшу площу? Обчислити її.

Розв'язання. Розташуємо даний півкруг та вписаний у нього прямокутник у декартовій системі координат (рисунок 10).

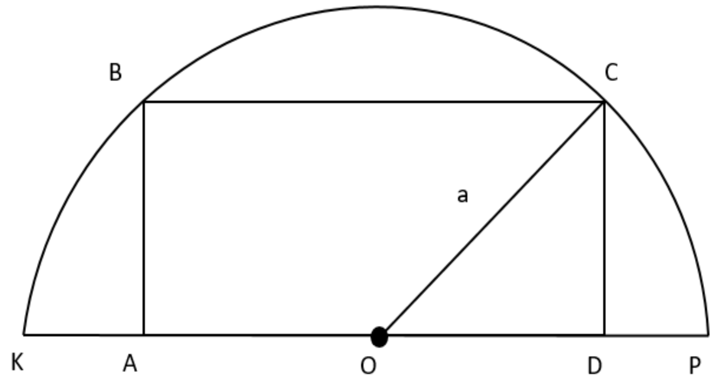

Рис.10

Виходячи з рівняння кола

$$x^2 + y^2 = a^2$$

та враховуючи, що $y \geq 0$, одержимо рівняння півкола:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Якщо вершина D має абсцису x, вершина C має координати $(x, \sqrt{a^2 - x^2})$, то

$$S_{ABCD} = 2x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Дослідимо цю функцію на екстремум.

Достатньо розглянути функцію $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$, де $0 < x < a$.

Обчислимо похідну:

$$f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Прирівняємо значення похідної до нуля і одержимо, що підозрілою на екстремум є точка $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Легко переконатися, що при переході через цю точку похідна змінює знак з плюса на мінус. Отже, в даній точці функція має максимум.

Тоді одержимо: $S_{max} = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = a^2.$

Відповідь. Вершини шуканого прямокутника, що лежать на діаметрі, мають абсциси $\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$, $S_{max} = a^2$.

Задача 3. Із трьох дощок однакової довжини треба виготовити ринву найбільшого об’єму. Дві дошки мають однакову ширину a, третя в два рази ширша. Визначити форму поперечного перерізу такої ринви.

Розв’язання. Дві однакові дошки, зрозуміло, мають бути бічними стінками (гранями) ринви та мати однаковий кут нахилу до третьої дошки. Тоді поперечний переріз – це ламана з трьох ланок AB, BC, CD (рисунок 11).

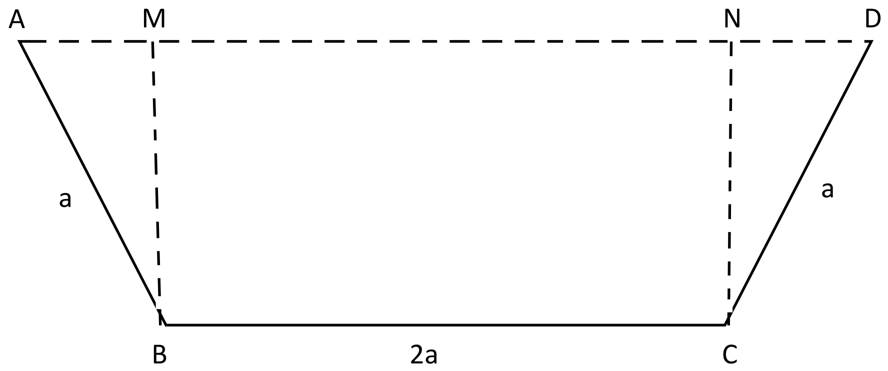

Рис.11

У ній $AB = a, BC = 2a, CD = a$, причому, кути ABC і BCD рівні. Доцільно на рисунку з'єднати кінці ламаної, утвориться рівнобічна трапеція $ABCD$.

За умовою довжина ринви фіксована, тому її об'єм залежить від площі цієї трапеції, а вона, в свою чергу, залежить від кута ABC. Отже, треба визначити, при якому значенні цього кута площа трапеції буде найбільшою.

Нехай в радіанній мірі кут $ABC = x$. Очевидно, що це має бути тупий або прямий кут. Тоді кут $BAD = \pi - x$.

Основи трапеції $BC = 2a$, $AD = MN + 2\,AN$, бо $MD = AN$, $MN = BC = 2a$. Висота $CM = BN = AB \sin(\pi - x) = a \sin x$.

$$AN = AB \cos(\pi - x) = -a \cos x.$$

Отже,

$AD = 2a - 2a \cos x = 2a\,(1 - \cos x)$.

Тоді

$$S_{ABCD} = \frac{2a + 2a\,(1 - \cos x)}{2} \cdot a \sin x = a^2 \left(2 \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x\right).$$

Як бачимо, треба дослідити на екстремум функцію

$f(x) = 2 \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x$, де $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$.

$$f'(x) = 2 \cos x - \cos 2x.$$

Шукаємо критичні точки:

$2 \cos x - \cos 2x = 0$ або $2 \cos x - 2\cos^2 x + 1 = 0$.

Одержимо рівняння: $2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$. Враховуючи те, що за умовою кут x прямий або тупий, а отже $\cos x \leq 0$, одержимо: $\cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Звідси вийде, що підозрілою на екстремум є точка

$x = \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Дослідимо знак похідної лівіше і правіше за неї, наприклад, в точках $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{2}{3}\pi$. Те, що $\frac{\pi}{2} < \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} < \frac{2\pi}{3}$, можна легко обґрунтувати, обчисливши косинус цих чисел і врахувавши монотонне спадання цієї функції на розглянутій тут області визначення.

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 1 > 0$, $f'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} < 0$.

Отже, точка $x = \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ є точкою максимуму. Задача розв'язана.

Відповідь. Поперечний переріз ринви - ламана з трьох ланок AB, BC, CD (рисунок 11). Кути B та C рівні і є кутами нахилу бічних стінок ринви до її основи, вони дорівнюють $\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Задача 4. Виготовляють циліндричний бак об'єму V, відкритий зверху. Визначити радіус і висоту баку так, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу.

Розв'язання. Кількість матеріалу залежить від площі поверхні такого відкритого бака. Це сума площі основи та площі бічної поверхні циліндра. Нехай радіус основи дорівнює x. Тоді висота циліндра дорівнює $\frac{V}{\pi x^2}$.

Отже, $S_{\text{осн}} = \pi x^2$, $S_{\text{біч}} = 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} = \frac{2V}{x}$. Одержимо таку функцію: $S(x) = \pi x^2 + \frac{2V}{x}$, яку треба дослідити на екстремум.

Обчислюємо похідну. $S'(x) = 2\pi x - \frac{2V}{x^2}$. Шукаємо критичні точки: $2\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0$. Звідси $x^3 = \frac{V}{\pi}$, $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Вияснимо, як змінить знак похідна при переході через цю точку. Розглянемо, наприклад, такі значення змінної:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}, x_2 = \sqrt[3]{\frac{V}{2}}, x_1 < \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} < x_2 .$$

Легко переконатися, що значення похідної від x_1 буде від'ємне, а від x_2 – додатне. Отже, в точці $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ функція $S\ (x)$ має мінімум. При цьому значенні радіуса висота циліндра дорівнює $\frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi\ (\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}})^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, тобто дорівнює радіусу.

Відповідь. Висота бака дорівнює радіусу і дорівнює $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Задача 5. Який сектор слід вирізати із даного паперового круга, щоб із залишеної частини круга можна було виготовити круговий конус (без основи) найбільшого об'єму?

Розв'язання. Сектор $0AmBO$, який залишиться, буде розгорткою бічної поверхні конуса (рисунок 12).

Нехай радіус круга дорівнює R, радіус основи конуса позначимо r, твірна конуса дорівнюватиме радіусу круга, тобто R. Позначимо центральний кут сектора, який буде вирізано з круга, через x (в радіанній мірі), $0 < x < \pi$.

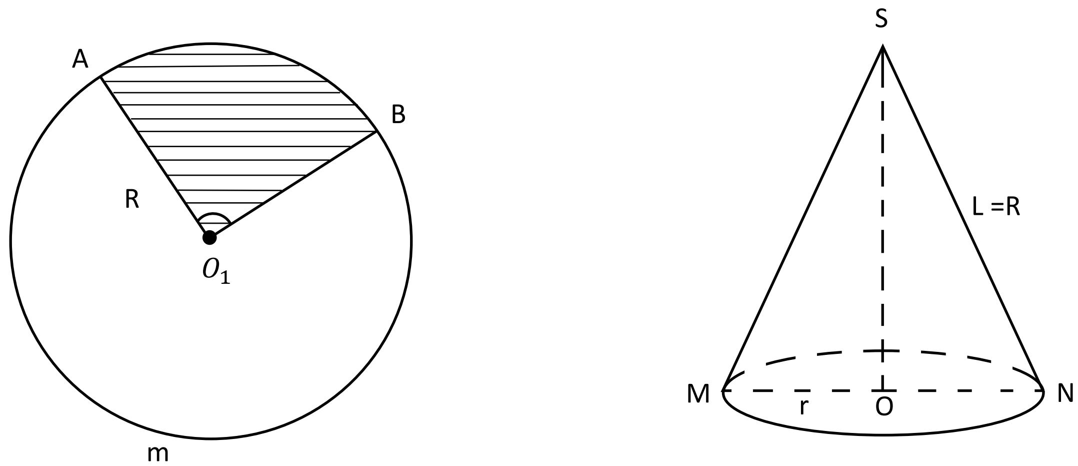

Рис.12

Тоді центральний кут сектора $OAmBO$ буде дорівнювати $2\,\pi - x$, довжина дуги AmB дорівнює $R(2\,\pi - x)$ та дорівнює довжині кола основи конуса:

$2\,\pi r = R\,(2\,\pi - x)$, отже, $r = \frac{R}{2\,\pi} \cdot (2\,\pi - x)$.

$H = SO = \sqrt{SM^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{R}{2\pi} \cdot \sqrt{4\,\pi x - x^2}$.

Запишемо об’єм конуса:

$V = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, H = \frac{1}{3}\,\pi \cdot \frac{R^2}{4\,\pi^2} \cdot (2\,\pi - x)^2 \cdot \frac{R}{2\,\pi}\,\sqrt{4\,\pi x - x^2}$.

Після спрощення цього виразу одержимо:

$V = \frac{R^3}{24\,\pi^2} \cdot (2\pi - x)^2 \cdot \sqrt{4\pi x - x^2}$.

Слід розглянути функцію $f\,(x) = (2\pi - x)^2 \cdot \sqrt{4\pi x - x^2}$ та дослідити її на екстремум. Обчислюємо її похідну.

$f'(x) = -\,2\,(2\,\pi - x\,) \cdot \sqrt{4\pi x - x^2} + (2\pi - x)^2 \cdot \frac{4\pi - 2\,x}{2\,\sqrt{4\pi x - x^2}}$.

Виконавши необхідні спрощення, одержимо:

$$f'(x) = \frac{2\pi - x}{\sqrt{4\pi x - x^2}} \cdot (3\,x^2 - 12\,\pi x + 4\,\pi^2).$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до нуля. Врахувавши, що $0 < x < \pi$, одержимо, що $x = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Вияснимо, як змінює знак похідна при переході через цю точку. З області визначення зручно вибрати, наприклад, точки $\frac{\pi}{4}$ та $\frac{\pi}{2}$, між якими і знаходиться знайдена критична точка:

$$\frac{\pi}{4} < 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

Будемо мати:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\,\pi - \frac{\pi}{4}}{\sqrt{\pi^2 - \frac{\pi^2}{16}}} \cdot \left(3 \cdot \frac{\pi^2}{16} - 12\,\pi \cdot \frac{\pi}{4} + 4\,\pi^2\right) > 0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{4\pi \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}}} \cdot \left(3 \cdot \frac{\pi^2}{4} - 12\pi \cdot \frac{\pi}{2} + 4\pi^2\right) < 0\,.$$

Оскільки похідна змінила знак з плюса на мінус, то знайдена критична точка є точкою максимуму. Задача розв’язана.

Відповідь. Сектор з кутом $2\pi \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ радіан.

В шкільному курсі алгебри і початків аналізу вивчають тему «Похідна та її застосування». При розгляді поняття локального екстремуму та найбільшого і найменшого значення неперервної функції на деякому відрізку розв’язують і геометричні задачі. В університетському курсі математичного аналізу традиційно таку ж тему закріплюють розв’язанням задач геометричного змісту.

Наведемо деякі з них (продовживши нумерацію цього параграфу).

Задача 6. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Якою має бути довжина основи, щоб його площа набувала найбільшого можливого значення?

Задача 7. У круг радіуса a вписано прямокутник найбільшого периметра. Знайдіть сторони прямокутника.

Задача 8. У трапеції менша основа і бічні сторони дорівнюють a. При якому значенні другої основи площа трапеції буде найбільшою?

Задача 9. Довести, що з усіх прямокутників, які мають даний периметр P, найбільшу площу має квадрат.

Задача 10. Довести, що з усіх прямокутників, які мають дану площу S, найменший периметр має квадрат.

Задача 11. На колі радіуса a позначено точку A. На якій відстані від неї треба провести хорду BC так, щоб вона була паралельна дотичній, проведеній до кола в точці A і при цьому трикутник ABC мав найбільшу площу?

Задача 12. Сума довжин гіпотенузи та одного з катетів прямокутного трикутника фіксована. Довести, що площа трикутника буде найбільшою, якщо кут між цим катетом і гіпотенузою дорівнює 60 градусів.

Задача 13. Як провести пряму через фіксовану точку всередині кута, щоб вона відтинала від кута трикутник найменшої площі?

Задача 14. Рівнобедрений трикутник, периметр якого дорівнює $2p$, обертається навколо основи. Якими повинні бути його сторони, щоб об'єм тіла обертання був найбільшим?

Чимало є задач (як в шкільному, так і в університетському курсі математичного аналізу) таких, що мають практичний зміст, причому, при їх розв'язанні розглядають геометричні фігури або тіла. В умові цих задач говориться про екстремальне значення певної величини. Отож, спосіб їх розв'язання стає майже очевидним: розглянути відповідну неперервну функцію і дослідити її на екстремум за допомогою похідної. Такі задачі можна також розв'язувати і в курсі геометрії. Наведемо кілька прикладів таких задач.

Задача 15. Прямокутну ділянку землі, яка прилягає до стіни будинку, потрібно обгородити парканом завдовжки 160 м. Знайти довжину прямокутника, при якій площа ділянки буде найбільшою.

Задача 16. Потрібно побудувати басейн з квадратним дном та облицювати його стіни і дно, при цьому витрати на матеріали повинні бути найменшими. Якою має бути висота і площа стін та дна, якщо об'єм басейну дорівнює 32 $м^3$?

Наведеними задачами 6 - 16, зрозуміло, не обмежується дидактичний матеріал на застосування похідної в курсі геометрії. Але тут акцентуємо на тому, що ці задачі якраз розглядають не в курсі геометрії, а саме в курсі математичного аналізу. Проте в магістерській роботі мету сформульовано дещо інакше, а саме: показати, як використовувати методи математичного аналізу в геометрії (а не геометричний матеріал в курсі математичного аналізу). Тому не наводимо розв'язання задач 6 – 16. Задачі 1-5 цього параграфа, які розглянуті з повним дослідженням, якраз відповідають поставленому завданню нашої магістерської роботи.

2.4. Використання диференціала в наближених обчисленнях при оцінці похибок геометричних величин

Задача 1. Прямим вимірюванням було встановлено, що діаметр круга дорівнює 6,7 см, причому максимальна абсолютна похибка вимірювання становить 0,03 см. Знайти наближену відносну похибку в обчисленні площі цього круга, виразити її у відсотках.

Розв'язання. Нехай $x-$ діаметр круга. Тоді його площа $s(x)$ обчислюється за формулою $s(x) = \frac{1}{4}\pi x^2$. Відносна похибка обчисленої площі дорівнює $\delta_s = \frac{\Delta s}{s}$, а її наближене значення ми одержимо, замінивши в цій рівності Δs на ds. Будемо мати: $ds = s'_x \cdot dx = \frac{1}{2}\pi x \cdot dx$. Одержимо: $\delta_s \approx \frac{\frac{1}{2}\pi x \cdot dx}{\frac{1}{4}\pi x^2} = 2 \cdot \frac{dx}{x}$. За даними в умові задачі $x = 6{,}7$ см, $dx = 0{,}03$ см. тому $\delta_s \approx 2 \cdot \frac{0{,}03}{6{,}7} \approx 0{,}009$. Помноживши цю величину на 100, одержимо похибку у відсотках, вона дорівнюватиме 0,9 %.

Відповідь. Відносна похибка $\delta_s \approx 0{,}009$, відсоткове значення відносної похибки становить приблизно 0,9%.

Задача 2. Довести, що (максимальна) наближена відносна похибка обчисленого об'єму кулі в три рази більша за (максимальну) відносну похибку виміряного значення діаметра.

Розв'язання. Нехай діаметр d кулі був безпосередньо виміряний (за допомогою штангенциркуля, мікрометра і т.п.). Об'єм кулі через діаметр виражається формулою $V = \frac{1}{6}\pi d^3$. Для більшої зручності подальших міркувань позначимо $d = x$, тоді $V(x) = \frac{1}{6}\pi x^3$. Наближена похибка ΔV обчисленого об'єму буде дорівнювати $dV = \frac{1}{2}\pi x^2\, dx$. Відносна похибка

$\delta_V \approx \frac{dV}{V} = \frac{\frac{1}{2}\pi x^2\, dx}{\frac{1}{6}\pi d^3} = 3 \cdot \frac{dx}{x}$. Але дріб $\frac{dx}{x} \approx \delta_x$ означає відносну похибку вимірювання діаметра $d = x$, тому одержуємо, що $\delta_V \approx 3\,\delta_x$, що і треба було довести.

Задача 3. Яку максимальну відносну похибку можна допустити при вимірюванні діаметра кулі, щоб її об'єм був визначений з точністю до 2%?

Розв'язання. Використаємо результат, який був отриманий у задачі 2, яку ми щойно розв'язали. Ми довели, що відносні похибки при вимірюванні діаметра x кулі та її об'єму V пов'язані рівністю $\delta_V \approx 3\,\delta_x$. Звідси випливає, що $\delta_x \approx \frac{1}{3}\,\delta_V$. За умовою $\delta_V = 0{,}02$, тобто 2%. Тому $\delta_x \approx \frac{1}{3} \cdot 0{,}02 \approx 0{,}00666\ldots \approx 0,0067$. Слід зауважити, що тут виконано заокруглення в сторону збільшення останньої цифри, яка залишається; це зроблено згідно правил заокруглення. Проте в конкретній ситуації, що дається в задачі, це призведе до збільшення максимальної відносної похибки. Але цього не варто робити, бо зрозуміло, що чим менша похибка, тим якісніше виконана робота. Тому слід вважати, що обчислена нами похибка буде приблизно 0,0066. Відсоткове значення дорівнюватиме приблизно 0,66%.

Відповідь. 0,66%.

Задача 4. Треба виготовити ящик з кришкою і квадратним дном, висота якого в два рази менша за сторону квадрата, що становить дно ящика. Замовник поставив вимогу, щоб виробник виконав якісні заміри довжини і ширини дна та висоти ящика, бо кількість матеріалу на його виготовлення має не перевищувати 0,2% наявних у замовника ресурсів.

Визначити максимальну відносну похибку вимірювань, яку може допустити виробник.

Розв'язання. Очевидно, що ящик має форму прямокутного паралелепіпеда (рис. 13). Позначимо сторони його основи через x, тоді висота дорівнюватиме $0{,}5x$. Кількість матеріалу для виготовлення ящика визначається площею повної поверхні паралелепіпеда.

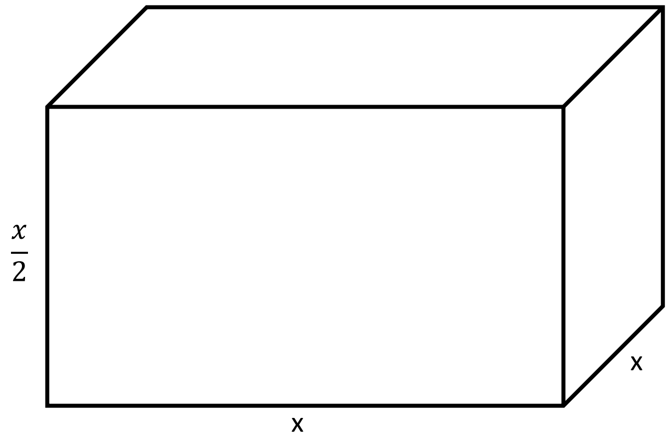

Рис. 13

$S_{\text{п.п.}} = 2x^2 + 4x \cdot \frac{1}{2}\, x = 4\, x^2$.

Отже, розглядаємо функцію $S(x) = 4\, x^2$. Відносна похибка обчисленої площі дорівнює $\delta_S = \frac{\Delta S}{S}$, а її наближене значення ми одержимо, замінивши в цій рівності ΔS на dS. Будемо мати: $dS = S'_x \cdot dx = 8x \cdot dx$. Тоді $\delta_S \approx \frac{8x \cdot dx}{4x^2} = 2 \cdot \frac{dx}{x}$, тобто $\delta_S \approx 2\, \delta_x$. За умовою $\delta_S = 0{,}2\%$ або 0,002. Отже, максимальна відносна похибка вимірювань δ_x, яку може допустити виробник, має становити 0,001, або 0,1%.

Відповідь. 0,1%.

2.5. Приклади геометричних задач для розв’язання методами математичного аналізу

В методичній літературі описано багато способів і методів розв’язання геометричних задач. Переважну більшість з них становлять суто геометричні методи. Це, наприклад, такі як векторний метод, координатний та векторно – координатний метод, метод геометричних перетворень (паралельного перенесення, симетрії, повороту, гомотетії, інверсії). Також виділяють деякі інші методи, як от: метод допоміжних побудов, метод введення допоміжних елементів (відрізка, прямої, кута, кола, допоміжних величин: периметра, площі, об’єму), метод аналогій (при розгляді та порівнянні властивостей планіметричних фігур і аналогічних у певному смислі стереометричних тіл). Іноді розглядають метод мас, метод введення косокутної системи координат. Значного поширення набув алгебраїчний метод, коли певну невідому в задачі геометричну величину позначають алгебраїчним символом та складають і розв’язують рівняння. Іноді вводять кілька невідомих та складають систему рівнянь. Окремо виділяють методи розв’язання геометричних задач на екстремуми. Деякі з них можна вирішити за допомогою оцінок, пов'язаних з відомими нерівностями, або ж проведенням певних елементарних логічних міркувань. Водночас тут поширений метод розв'язання таких задач з геометрії засобами математичного аналізу. Це, по суті, типові задачі на обчислення максимуму чи мінімуму певної функції від однієї змінної, яка буде побудована в конкретній задачі. Дослідження цієї функції проводять за допомогою похідної.

В багатьох випадках вибір методу розв'язання геометричної задачі залежить від набутого досвіду учня чи студента, або ж визначений темою уроку чи практичного заняття. Але це не завжди застосовне, якщо розглядають нестандартні задачі на факультативах чи заняттях математичного гуртка, особливо при підготовці до математичних олімпіад різного рівня (обласних, республіканських і навіть міжнародних). Як ми прочитали в одній з публікацій, число таких задач на олімпіадах становить від 7 до 10 відсотків, і воно ще й має тенденцію до збільшення. Зауважимо також, що є і такі люди, які захоплюються математикою, хоч не мають прямого стосунку до педагогічної роботи, а просто люблять цю науку і час від часу розв'язують цікаві задачі, одержуючи насолоду від цього процесу. Вибір доцільного методу розв'язання стає першим і дуже важливим кроком в роботі з задачею.

У формулюванні задач, які наводимо в цьому параграфі, немає прозорої вказівки на те, яким методом їх можна розв'язати. Вони стосуються геометрії, причому, підібрані так, що ефективно буде тут використати апарат математичного аналізу, подібно до того, як ми це проілюстрували вище в нашому дослідженні.

Задача 1. Довести, що будь-який опуклий многокутник можна так розбити на два многокутники прямою, яка проходить через задану точку, що утворені при цьому многокутники матимуть рівні периметри.

Задача 2. Довести, що будь-який трикутник можна розбити на два трикутники так, що радіуси кіл, які вписані в одержані трикутники, будуть відноситися як 2:3.

Задача 3. Довести, що будь-який опуклий многокутник можна розрізати двома взаємно перпендикулярними прямими на 4 фігури рівної площі.

Задача 4. Чи існує правильна трикутна піраміда, у якої висота дорівнює відстані між серединами двох мимобіжних ребер?

Задача 5. Довести, що на висоті правильного тетраедра існує точка, з якої кожне ребро основи видно під кутом 90 градусів.

Задача 6. Чи правильно, що будь-яку опуклу плоску фігуру можна розбити прямою так, що периметри і площі одержаних фігур були рівними?

Задача 7. Чи правильно, що будь-яке опукле тіло можна розбити площиною так, щоб об’єми і площі поверхонь одержаних тіл були рівними?

ВИСНОВКИ

Розвиток математики з необхідністю приводить до диференціації її предмета. Поряд з цим все ширше застосування знаходять методи однієї з її областей в інших математичних галузях. В магістерському дослідженні проілюструвано, як можна успішно використати методи математичного аналізу в геометрії.

У вступі обгрунтувано актуальність теми магістерської роботи, вказано об’єкт і предмет дослідження, його мету і завдання, методи дослідження, структуру і об’єм роботи. Також тут звернуто увагу і на апробацію результатів магістерської роботи.

У першому розділі подано основний теоретичний матеріал з математичного аналізу, на який спираємося в роботі. Зокрема, розглянуто поняття границі, неперервності, похідної, диференціала функції та їх класичні застосування.

Другий розділ висвітлює практичну частину магістерського дослідження щодо використанням методів математичного аналізу для розв’язування геометричних задач. В цьому розділі розглядається використання неперервних функцій у задачах на конфігурацію; застосування методу «рухомого ножа» при розв’язанні задач на розбиття (зауважимо, що цей матеріал вдалося знайти лише в електронному ресурсі); використання похідної в геометричних задачах, а також диференціала в наближених обчисленнях при оцінці похибок геометричних величин. Тут подано розв’язання багатьох задач з теми магістерської роботи, наведено умови задач для самостійної роботи зацікавлених осіб. В розділі містяться й деякі методичні коментарі.

Практичне значення магістерської роботи. Одержані результати можна використати у роботі зі студентами факультету інформаційних технологій і математики на практичних заняттях з математичного аналізу, практикуму з розв’язування задач елементарної математики, геометрії, на заняттях гуртка чи спецсемінару. Також варто відмітити, що напрацьований матеріал може бути корисним для вчителів середньої школи, які проводять заняття в класах з поглибленим вивченням математики. Тему дослідження можна розглядати на факультативах чи у гуртковій роботі, оскільки обсяг часу в класній роботі недостатній для розв’язання складніших нестандартних задач. Крім того, зауважимо, що задачі таких типів, які представлені в магістерській роботі, іноді рекомендують для учнівських чи студентських олімпіад. Тому вчителі та викладачі можуть звернути увагу своїх вихованців на описану методику роботи над такими задачами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамчук І. В., Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної: навч. посіб. Вінниця: ВНТУ, 2010. 152 с.
2. Алгебра: підручник для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2-х ч. / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Харків: Гімназія, 2011. Ч. 1. 256 с.
3. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія: підручник для 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Вежа, 2002. 223 с.
4. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: підручник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів: у 3-х ч. Ч. 1. Функції однієї змінної. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ: Вища школа, 1990. 383 с.
5. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2 ч.: навч. посіб. / Л. І. Дюженкова та ін. Київ: Вища школа, 2002. Ч. 1. 462 с.
6. Завало С. Т., Костарчук В. М., Хацет Б. І. Алгебра і теорія чисел: підручник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів: у 2-х ч. Київ: Вища школа, 1974. Ч. 2. 384 с.
7. Кушнір І. А. Методи розв’язання задач з геометрії. Київ: Абрис, 1994. 464 с.
8. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз: підручник для студентів математичних спеціальностей університетів: у 2-х ч. Київ: Вища школа, 1992. Ч. 1. 496 с.
9. Мельник В. Геометричні задачі на екстремум. Математика в школі. 2000. № 4. С. 45–48.
10. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Методи розв’язування геометричних задач. Київ: Магістр-S, 1997. 256 с.
11. Рижов Ю.М. Похідна та її застосування. Київ: Вища школа, 1977. 83с.
12. Теорема про бутерброд [Електронний ресурс].

Режим доступу: https://uk.m.wikipedia.org/wiki

13. Філософ Л. І., Червінська К. С. Неперервні функції в геометричних задачах на існування // Педагогічний пошук. 2022. № 2. С. 45–49.
14. Червінська К. С., Філософ Л. І. Використання методів диференціального числення в геометрії. Матеріали науково-практичної конференції до 130-річчя з дня народження М. П. Кравчука (11 жовтня 2022 року). Луцьк, 2022. С. 52–56.
15. Червінська К. С. Використання неперервних функцій при розв’язуванні геометричних задач. Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень: матеріали XVI Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих учених (17 травня 2022 року). Луцьк, 2022. С. 513–516.
16. Шиманський І. Є. Математичний аналіз: посібник для фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів. 3-тє вид. Київ: Радянська школа, 1972. 631 с.
17. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підручник для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів: у 2-х ч. 3-тє вид., переробл. і допов. Київ: Вища школа, 2005. Ч. 1. 447 с.
18. Ясінський В. А. Геометричні задачі: готуємось до математичних олімпіад. Львів: Каменяр, 2003. 76 с.
19. Fichtenholz G.M. Rachunek rózniczkowy i catkowy, tom I, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1994. 548 p.

Анотація

Кузьмяк К. С. Використання меодів математичного аналізу для розв‘язування геометричних задач. *Магістерська робота.* Луцьк, 2024. 51 с.

У роботі показано, як можна використати методи диференціального числення для оптимізації розв'язання геометричних задач. Основна увага звернута на нестандартні задачі (дослідження конфігурації фігури, існування і спосіб певного розбиття фігури). Розглянуто також складніші задачі на екстремуми та наближені значення геометричних величин.

Магістерська робота містить 51 сторінку, список використаної літератури налічує 19 джерел.

Ключові слова: диференціальне числення, функція, неперервність, похідна, геометрична задача, геометричні фігури і величини.

Abstract

Kuzmiak K. S. Use of mathematical analysis methods for solving geometric problems. *Master's Thesis*. Lutsk, 2024. 51 p.

This thesis demonstrate how methods of differential calculus can be applied to optimize the solving of geometric problems. The primary focus is on non-standard problems, including the investigation of figure configurations, the existence, and methods for specific figure partitions. More complex problems involving extrema and approximate values of geometric quantities are also considered..

The master's thesis comprises 51 pages and includes a reference list of 19 sources.

Keywords: differential calculus, function, continuity, derivative, geometric problem, geometric figures and quantities.