

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

Кафедра математичного аналізу та статистики

На правах рукопису

ПАВЛІХА ВІКТОР ЮРІЙОВИЧ

**ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ І САМОПОДІБНІСТЬ
У ФІНАНСОВИХ ЧАСОВИХ РЯДАХ**

Спеціальність: 111 Математика

Освітньо-професійна програма «Математика»

Робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр»

Науковий керівник:

ВОЛОШИНА ТЕТЯНА ВОЛОДИМИРІВНА

кандидат фізико-математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № _____

засідання кафедри математичного аналізу та статистики

від _____ 2024 р.

Завідувач кафедри

_____ доц. О.В. Федунік-Яремчук

ЛУЦЬК – 2024

Зміст

ВСТУП. ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ПОНЯТТЯ ФРАКТАЛЬНОЇ РОЗМІРНОСТІ ТА ЇЇ ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ	3
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ	6
1.1. Основні визначення та типи фрактальної розмірності	6
1.1.1 Коробкова розмірність (box-counting dimension)	6
1.1.2 Розмірність Гаусдорфа	7
1.1.3 Метод Мінковського	9
1.2. Приклади фрактальної розмірності	9
РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТА ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ПОКАЗНИКА ХЕРСТА	13
3.1. Опис вибірових даних	22
3.2. Обчислення показника Херста для кожного активу	29
3.3. Обчислення коробкової розмірності (box-counting dimension)	33
3.4. Обчислення мультифрактального детрендованого флуктуаційного аналізу фінансових часових рядів	37
ВИСНОВКИ	42
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	44
ДОДАТКИ	45
<i>Додаток А</i>	45
<i>Додаток В</i>	46

ВСТУП. ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ПОНЯТТЯ ФРАКТАЛЬНОЇ РОЗМІРНОСТІ ТА ЇЇ ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

Актуальність теми. Фрактальна геометрія, яка є основою сучасного фрактального аналізу фінансових ринків, почала розвиватися завдяки роботам Бенуа Мандельброта у середині ХХ століття. У 1963 році Мандельброт вперше описав концепцію самоподібності на прикладі ціни на бавовну, які демонструють «жирні хвости» – значно вищу частоту великих цінових змін, ніж передбачають традиційні нормальні моделі. Це стало серйозним викликом для класичних моделей Браунівського руху та гіпотези ефективного ринку, які вважали фінансові ринки передбачуваними та такими, що підпорядковуються нормальному розподілу [1-3].

Ідеї Мандельброта щодо фрактальної геометрії розвивалися протягом наступних десятиліть. У своїх працях 1970-х років він запропонував використовувати стабільні розподіли Леві для моделювання ринкових процесів. Цей підхід став основою для розробки нової моделі – мультифрактальної моделі ринкових доходів (MMAR). На відміну від класичної моделі Гауса, MMAR враховує самоподібність і довгострокову залежність, які є важливими характеристиками фінансових ринків. Це дозволило краще описати реальні ринкові явища, зокрема кластеризацію волатильності та значні стрибки цін.

З розвитком фрактальної теорії з'явилися нові методи для аналізу фінансових даних. Наприклад, індекс Херста став ключовим інструментом для оцінки самоподібності в часових рядах, дозволяючи виміряти ступінь персистентності (довгострокової пам'яті) ринкових процесів. Фрактальні моделі стали вкрай важливими у періоди криз і високої волатильності, коли ринки показують властивості хаосу та розподільчої самоподібності. Праці таких дослідників, як Едгар Пітерс, автор книги «Фрактальний аналіз

ринку», допомогли інвесторам і науковцям зрозуміти, як самоподібність і хаос впливають на поведінку ринків та дозволяють будувати більш реалістичні моделі [2, 4-6].

Метою магістерської роботи є дослідження та систематизація застосування фрактальної геометрії у фінансових ринках для розуміння і прогнозування ринкових ризиків. Використання фрактальних моделей дозволяє виявляти закономірності в ринкових коливаннях, прогнозувати екстремальні зміни та забезпечити гнучкіші стратегії ризик-менеджменту.

Об'єктом дослідження є фінансові часові ряди, зокрема валютні та фондові ринки, що демонструють фрактальні властивості.

Предметом дослідження є фрактальні методи аналізу для оцінки самоподібності, хаосу та персистентності у фінансових часових рядах.

Для досягнення мети визначено наступні **завдання**:

1. *дослідити використання індекса Херста;*

Індекс Херста дозволяє оцінити рівень довготривалої пам'яті, що є важливим аспектом для розуміння ризиків. Наприклад, фрактальні часові ряди валютного курсу демонструють персистентні властивості, що можна використовувати для розробки стратегій ризик-менеджменту та прогнозування [1, 3-5].

2. *застосувати мультифрактальної моделі для аналізу волатильності.*

Мультифрактальна модель враховує масштабування та мінливість даних і дозволяє прогнозувати волатильність ринку в умовах нестабільності. Наприклад, ST-FRSR модель показала здатність знижувати похибку прогнозів шляхом кращого врахування екстремальних подій, що є важливим для короткострокових прогнозів на валютному ринку [6].

Таким чином, дослідження фрактальних властивостей фінансових ринків є важливим для створення моделей, які краще враховують складні та нестабільні умови. Фрактальний аналіз забезпечує нові можливості для розуміння ризиків, прогнозування змін і адаптації фінансових стратегій у сучасних ринкових умовах.

Методи дослідження: методи математичної статистики, методи фрактального аналізу, методи обробки даних, методи фінансового аналізу.

Магістерська робота складається з трьох розділів, вступу, висновків, переліку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи складає 47 с.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ

Теорія фракталів є одним із сучасних методів опису складних систем із самоподібною структурою. Фракталами називають об'єкти, які характеризуються повторюваністю структури на різних масштабах, що означає їхню самоподібність. Термін «фрактал» був введений Бенуа Мандельбротом у 1975 році, який використав його для опису нерегулярних, але впорядкованих структур, таких як берегові лінії, хмари або криві, що демонструють самоподібність [3].

У роботі будуть розглянуті такі характерні особливості фрактальних множин:

- **Самоподібність** — структура об'єкта є подібною до самої себе при збільшенні масштабу.
- **Фрактальна розмірність** — кількісна характеристика, яка визначає складність об'єкта, зокрема його масштабну інваріантність і нерівномірність.

1.1. Основні визначення та типи фрактальної розмірності

Фрактальна розмірність є ключовим поняттям теорії фракталів і визначає, наскільки об'єкт заповнює простір. Це значення може бути дробовим і залежить від рівня складності структури. Розглянемо найпоширеніші методи обчислення фрактальної розмірності.

1.1.1 Коробкова розмірність (box-counting dimension)

Коробкова розмірність є одним із основних практичних методів обчислення фрактальної розмірності, який полягає в розбитті об'єкта на квадрати (коробки) різного розміру ε . Кількість коробок $N(\varepsilon)$, необхідних для покриття фрактального об'єкта, визначає фрактальну розмірність:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (1)$$

Цей метод є зручним для чисельного оцінювання та застосовується для широкого класу об'єктів.

1.1.2 Розмірність Гауздорфа

Розглянемо тепер загальне визначення фрактальної розмірності за Гауздорфом. Нехай d – звичайна Евклідова розмірність простору, в якому знаходиться наш фрактальний об'єкт ($d = 1$ – лінія, $d = 2$ – площина, $d = 3$ – звичайний тривимірний простір). Покриємо тепер цей об'єкт d -вимірними «кулями» діаметру l . Нехай для цього знадобилось не менше, ніж $N(l)$ куль. Якщо при $l \rightarrow 0$ величина $N(l)$ залежить від l за степеневим законом:

$$N(l) \sim \frac{1}{l^D}, \quad (2)$$

то D називається *гауздорфовою* або *фрактальною розмірністю* цього об'єкта. Формулу (2) можна переписати у вигляді

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}. \quad (3)$$

Величина D є локальною характеристикою даного об'єкта. Вона збігається зі звичайною топологічною розмірністю для добре відомих множин (многокутники; многогранники; області, обмежені гладкими кривими; тіла, обмежені гладкими поверхнями).

Нехай спочатку множина складається зі скінченної кількості ізольованих точок. Найменша кількість N d -вимірних «куль», якими ми можемо покрити дану множину, очевидно, збігається з кількістю точок, тобто $N(l) = N$ і не залежить від діаметру цих куль l . Тому із (3) випливає, що

$D = 0$. Ця розмірність збігається із звичайною, оскільки точка має розмірність 0.

Для відрізка прямої довжини L мінімальна кількість $N(l)$ одновимірних відрізків довжини l , якими можна покрити даний відрізок, очевидно дорівнює $N(l) = \frac{L}{l}$. Тоді за формулою (3) маємо $D = 1$, що збігається зі звичайною розмірністю відрізка. Аналогічно для області із площею S на гладкій двовимірній поверхні кількість необхідних для її покриття квадратиків із досить малою стороною l дорівнює $N(l) = \frac{S}{l^2}$. Тому її фрактальна розмірність $D = 2$. Насамкінець, для покриття деякого скінченного об'єму V необхідно $N(l) = \frac{V}{l^3}$ кубиків з ребром l . Отже, фрактальна розмірність цієї множини $D = 3$.

Розглянемо тепер класичні приклади регулярних фракталів, які мають ідеальну самоподібність. Покривати їх можна елементами, з яких складається сам фрактал. У цьому випадку формулу (3) можна спростити. Нехай для покриття фрактальної множини потрібно використати щонайменше $N(l)$ елементів із характерним розміром l , або ж щонайменше $N(l')$ елементів із характерним розміром l' . Тоді фрактальну розмірність можна обчислити за формулою

$$D = -\frac{\ln\left(\frac{N(l)}{N(l')}\right)}{\ln\left(\frac{l}{l'}\right)}, \quad (4)$$

або ж переписавши її у вигляді [5, 8-9]:

$$\frac{N(l)}{N(l')} = \left(\frac{l'}{l}\right)^D. \quad (5)$$

1.1.3 Метод Мінковського

Метод Мінковського є практичним підходом до оцінки фрактальної розмірності для великих масивів даних, особливо в економічних дослідженнях і фінансовій аналітиці. Цей метод підходить для чисельних розрахунків і забезпечує зменшення похибки при обмежених вибірках. Основна ідея методу Мінковського полягає у вимірюванні кількості елементів покриття та обчисленні масштабного коефіцієнта.

Формула для обчислення розмірності Мінковського:

$$D_L = \frac{\ln N}{\ln k}, \quad (6)$$

де N – кількість елементів покриття, а k – масштабний коефіцієнт. Цей метод застосовується для моделювання та прогнозування процесів на фінансових ринках.

Застосування методу Мінковського дозволяє фінансовим аналітикам швидко отримати розрахунки для великих вибірок даних, таких як історичні ціни акцій, курси валют або індекси волатильності. Наприклад, аналізуючи часовий ряд котирувань на ринку акцій, можна обчислити масштабну інваріантність за допомогою методу Мінковського та виявити періоди з підвищеною волатильністю або схильністю до різких змін. Це дає змогу фінансовим аналітикам приймати обґрунтовані рішення про управління ризиками.

1.2. Приклади фрактальної розмірності

Приклад 1: Крива Коха

Крива Коха, або сніжинка Коха, є класичним прикладом фрактала з дробовою розмірністю, що створюється рекурсивним поділом відрізків. Кожен відрізок ділять на три рівні частини, замінюючи середню частину

двома відрізками, що утворюють разом із вилученим рівностороннім трикутником. Ця конструкція повторюється нескінченно, утворюючи об'єкт із дуже складною структурою [1, 3-4, 6].

Фрактальна розмірність кривої Коха визначається через коробкову розмірність, яку можна обчислити наступним чином:

- 1) на кожному кроці кожен відрізок замінюється на 4 нових відрізків, кожен з яких має третину довжини початкового відрізка;
- 2) загальна кількість відрізків зростає за законом $N = 4^n$, де n – кількість ітерацій;
- 3) довжина кожного відрізка на кожному етапі дорівнює $\frac{1}{3^n}$.

Таким чином, для обчислення фрактальної розмірності використовуємо формулу (4) для $l = 1$, $l' = \frac{1}{3}$, $N(l) = 3$ та $N(l') = 12$:

$$D = -\frac{\ln(3/12)}{\ln 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618. \quad (7)$$

Це значення вказує на те, що крива Коха займає проміжне положення між одно- і двовимірним простором: вона значно складніше влаштована, ніж звичайна лінія (розмірність 1), оскільки має нескінченну довжину; разом із тим крива Коха не заповнює повністю площину (розмірність 2), тобто її «площа» дорівнює нулю.

Приклад 2: Множина Мандельброта

Множина Мандельброта є прикладом значно складнішого фрактала, який не лише демонструє самоподібність, але і має майже заповнене двовимірне представлення. Вона породжується у на комплексній площині ітераційною формулою:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad (8)$$

де $z_i, i \in \mathbb{N}$, та $c \in \mathbb{C}$ є комплексними числами; $z_0 = 0$, і значення константи c у цьому ітераційному процесі вибрано з області комплексної площини так, щоб ітерації $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots$ не виходили за межі деякого кола скінченного радіусу. Усі такі точки c утворюють множину Мандельброта, яка є складним фракталом із розмірністю, близькою до 2, що вказує на її майже повне заповнення площини [8, 10].

Щоб обчислити фрактальну розмірність множини Мандельброта, можна застосувати метод Гауздорфа-Базикевича, але це вимагає значних обчислювальних ресурсів. За спрощеними оцінками, прийнято вважати, що розмірність множини Мандельброта дорівнює 2, оскільки вона заповнює двовимірний простір з високою деталізацією. Для точних розрахунків використовують чисельні методи, які обчислюють кількість необхідних покриттів із врахуванням змінного масштабу.

Приклад 3: Фрактальна структура часових рядів на валютному ринку

Фінансові ринки, такі як валютні ринки, часто мають фрактальну структуру. Це проявляється у формі кластеризації волатильності (періодів високих та низьких коливань) та нерегулярних змін. Ринкові часові ряди демонструють самоподібність, коли патерни цінних змін можуть повторюватися на різних часових масштабах — від хвилин до днів і місяців. Для оцінки фрактальної розмірності часових рядів на валютному ринку застосовуються метод Мінковського або індекс Херста.

Індекс Херста H дозволяє оцінити довгострокову пам'ять або персистентність ринкових часових рядів. Формула для обчислення фрактальної розмірності D на основі індексу Херста має вигляд:

$$D = 2 - H. \quad (9)$$

Типові значення для індексу Херста у фінансових часових рядах можуть коливатися в межах від 0.5 до 0.7. Наприклад:

- якщо $H = 0.5$, то часовий ряд є випадковим процесом (наприклад, білий шум);
- якщо $H = 0.6$, то фрактальна розмірність $D = 2 - 0.6 = 1.4$, що вказує на наявність певної тенденції до утримання тренду (персистентності).

Припустимо, що для певного валютного ряду було обчислено $H = 0.65$.

Тоді відповідна фрактальна розмірність:

$$D = 2 - 0.65 = 1.35.$$

Це значення вказує на складність ряду: часовий ряд не є повністю випадковим і має певну фрактальну структуру, що відображає кластеризацію змін та тренди, що є базовою умовою для існування та застосування арбітражної стратегії [1-6, 10].

РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТА ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ПОКАЗНИКА ХЕРСТА

Показник Херста H використовується для характеристики залежностей та пам'яті в часових рядах. Уперше цей індекс було запропоновано британським гідрологом Харольдом Херстом, який вивчав поведінку рівня Нілута його циклічність у зв'язку зі зміною пори року. В його дослідженнях було виявлено, що навіть після багатьох років часовий ряд демонструє тенденції, що вказує на наявність «довготривалої пам'яті» в природних процесах. Цей індекс став основою для багатьох застосувань у різних галузях, від гідрології до фінансових ринків, оскільки дозволяє зрозуміти структуру й передбачуваність різних процесів – персистентності тренду [2].

Індекс Херста H можна розглядати як міру автокореляції в часовому ряді на різних часових масштабах. Значення показника коливаються між 0 і 1 та інтерпретуються наступним чином:

- $H = 0.5$ вказує на відсутність залежностей у часовому ряді, тобто поведінка часового ряду є випадковою і не має довготривалої пам'яті. У такому випадку кожне значення є незалежним від попередніх.
- $H > 0.5$ свідчить про персистентність, або схильність до збереження тренду. Чим ближче H до 1, тим сильнішою є ця тенденція.
- $H < 0.5$ означає антиперсистентність, тобто часовий ряд має схильність до частих змін напрямку. Чим менше H , тим більше часовий ряд схильний до «зворотних» змін.

Показник Херста є важливим інструментом для аналізу фінансових ринків, оскільки він дозволяє виявити довготривалу пам'ять та самоподібність у часових рядах. Ці властивості були підтверджені численними

дослідженнями економістів і математиків. Наприклад, у статті «Фрактальні властивості фондових ринків: досвід країн Південно-Східної Азії» [2] розглядається динаміка показника Херста на основі даних про прибутковість загальновідомих індексів акцій на фондових ринках Південно-Східної Азії, що підтверджує наявність фрактальних властивостей у цих ринках.

Крім того, у роботі «Фрактальний аналіз валютного ринку за допомогою моніторингу» досліджується поведінка курсів валютних пар за допомогою моніторингу показника Херста, що підтверджує наявність довготривалої пам'яті на валютному ринку [3].

Таким чином, використання показника Херста дозволяє глибше розуміти структуру та динаміку фінансових ринків, що є важливим для прийняття обґрунтованих інвестиційних рішень.

Найбільш поширеним методом обчислення показника Херста є метод розмаху відносно стандартного відхилення (R/S -аналіз), розроблений самим Херстом. Цей метод ґрунтується на співвідношенні між розмахом кумулятивних відхилень і стандартним відхиленням для різних часових інтервалів.

Зауважимо, що R/S -аналіз починається з розгляду часового ряду $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, де n – кількість спостережень. Для кожного масиву X , довжиною n обчислюються:

1) середнє значення підмасиву

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; \quad (10)$$

2) кумулятивне відхилення Y_k для кожного значення k у підмасиві X_i :

$$Y_k = \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X}); \quad (11)$$

3) розмах кумулятивного відхилення

$$R(n) = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) - \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_n);$$

4) стандартне відхилення $S(n)$ для підмасиву X_i :

$$S(n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \quad (12)$$

Після цього обчислюється співвідношення (R/S) для кожного значення n і будується графік залежності $\ln(R/S)$ від $\ln n$. Кутовий коефіцієнт прямої на цьому графіку буде показником Херста H , який визначається як:

$$H = \frac{\ln(R/S)}{\ln n}. \quad (13)$$

Більшому значенню H відповідає більша схильність часового ряду до утримання трендів або послідовності змін у одному напрямку. Цей метод використовується для аналізу довготривалої пам'яті в різних процесах, таких як ціни акцій, курс валют і навіть природні явища.

Окрім класичного R/S -аналізу, існують інші методи розрахунку показника Херста, які дозволяють враховувати більш складні аспекти часових рядів, такі як масштабна самоподібність і мультифрактальна структура [3-7]. Ці методи включають:

1. Метод децимуляції

Метод децимуляції є альтернативою класичному підходу до обчислення показника Херста, при якому часовий ряд розбивається на окремі інтервали з поступовим зниженням розмірності. Основна ідея цього методу полягає у розподілі часового ряду на частини з різними часовими масштабами для виявлення самоподібності ряду.

Процес децимуляції включає такі етапи:

- часовий ряд $X(t)$ розбивається на фрагменти з різною частотою;

- кожний фрагмент аналізується окремо, обчислюється середнє значення та відхилення;
- співвідношення між цими параметрами на різних масштабах дозволяє оцінити ступінь самоподібності.

Децимуляція застосовується для рядів, які мають змінну періодичність або складну структуру, що може бути неочевидною при аналізі на одному масштабі. Цей метод ефективний для часових рядів фінансових ринків, де коливання мають різну амплітуду і частоту, що дозволяє виявити тренди.

Метод децимуляції має ряд переваг, які роблять його цінним інструментом для аналізу складних часових рядів. По-перше, він дозволяє досліджувати ряди з нелінійною структурою, що є важливим для виявлення прихованих залежностей та поведінкових закономірностей у даних. По-друге, цей метод здатний виявляти масштабну самоподібність на різних рівнях частот, що допомагає виявляти структури та патерни, які повторюються на різних часових інтервалах.

Водночас метод має і свої недоліки. Одним із головних є висока потреба в обчислювальних ресурсах, оскільки децимуляція вимагає значних обчислень для аналізу кожного масштабу ряду. Крім того, метод є чутливим до шумів, які можуть негативно впливати на точність результатів. Це означає, що при наявності значного шуму в даних результати аналізу можуть бути спотворені, зменшуючи точність отриманих результатів.

2. Метод максимальної ймовірності

Метод максимальної ймовірності використовує статистичний підхід для визначення показника Херста, зокрема на основі ймовірнісних розподілів змін. Цей метод часто застосовується для фінансових часових рядів, де є значні коливання і стрибки цін, а розподіли часто мають «жирні хвости».

Основою методу максимальної ймовірності є припущення, що процес є гаусовим, зокрема, часовий ряд розглядається як набір випадкових змін з нормальним розподілом. Обчислення проводяться таким чином:

1. Визначається ймовірнісний розподіл змін в часовому ряді.
2. Виходячи з максимізації ймовірності отриманих даних, обчислюється значення H , яке найкраще відповідає даному розподілу.

Цей метод дозволяє враховувати невизначеність і шум у фінансових ринках, що робить його підходящим для застосування на високоволатильних ринках.

Метод максимальної ймовірності має кілька значних переваг. По-перше, він є більш точним для аналізу рядів з високим рівнем шуму, оскільки враховує ймовірнісні зміни, що дозволяє краще фільтрувати випадкові коливання в даних. По-друге, цей метод також враховує непрямі залежності, що дає можливість точніше оцінювати ряди з комплексною поведінкою та багатосаровими кореляціями.

Однак метод має й певні обмеження. Один із основних недоліків полягає в тому, що його точність залежить від правильного вибору ймовірнісного розподілу для аналізованого ряду. Якщо вибір розподілу не є оптимальним, це може призвести до хибних результатів. Крім того, метод може не забезпечити точності для рядів з яскраво вираженими нелінійними процесами, оскільки його припущення базуються на лінійних взаємозв'язках.

3. Мультифрактальний детрендовий коливальний аналіз (MF-DFA)

Мультифрактальний детрендовий коливальний аналіз (MF-DFA) є складнішим підходом для обчислення показника Херста, зокрема для часових рядів, які демонструють мультифрактальну структуру. На відміну

від класичного аналізу, MF-DFA враховує зміну трендів на різних масштабах, що є корисним для аналізу ринкових процесів з різними періодами та амплітудами коливань [9-10].

Мультифрактальний детрендовий коливальний аналіз (MF-DFA) складається з декількох послідовних етапів, що дозволяють оцінити складну структуру часових рядів. Нижче наведено основні етапи цього методу:

1. **Розбиття на масштаби:** На першому етапі часовий ряд розбивається на підмасиви різних масштабів. Це означає, що часовий ряд поділяється на фрагменти різної довжини, після чого на кожному з цих масштабів досліджується амплітуда коливань. Такий підхід дозволяє відстежити зміни структури ряду в залежності від масштабу аналізу.
2. **Визначення тренду:** Для кожного підмасиву визначається локальний тренд. Цей тренд відображає загальну тенденцію змін у межах даного підмасиву, яку видаляють (детрендинг), щоб залишилися лише коливальні компоненти. Завдяки цьому процесу метод MF-DFA дозволяє сфокусуватися на флуктуаціях ряду, виключаючи вплив трендових компонентів.
3. **Обчислення флуктуацій:** Після видалення тренду для кожного підмасиву обчислюється флуктуаційна функція, що показує відхилення часового ряду від локального тренду. Флуктуаційна функція є мірою коливань ряду, що дозволяє оцінити рівень мінливості та масштаби цих коливань на кожному з аналізованих інтервалів.
4. **Розрахунок показника Херста:** На основі отриманих значень флуктуаційної функції обчислюється показник Херста. Це значення

може змінюватися в залежності від масштабу, що дозволяє відстежити, як змінюється структура фрактальних властивостей часового ряду на різних рівнях. Завдяки цьому метод MF-DFA забезпечує глибший аналіз багатомасштабних фрактальних процесів, які можуть бути корисними для дослідження складних ринкових даних або природних явищ.

Формула для обчислення флуктуаційної функції має наступний вигляд:

$$F_q(s) = \left(\frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} |Y_{v,s} - \bar{Y}_{v,s}|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (14)$$

де

$F_q(s)$ – флуктуаційна функція для масштабу s ;

N_s – кількість підмасивів розміру s ;

$Y_{v,s}$ – накопичена сума для кожного підмасиву v ;

$\bar{Y}_{v,s}$ – середнє значення для кожного підмасиву.

Метод мультифрактального детрендового коливального аналізу (MF-DFA) має кілька значущих переваг, які роблять його ефективним інструментом для дослідження складних часових рядів, особливо тих, які демонструють багатомасштабну структуру. По-перше, MF-DFA підходить для аналізу мультифрактальних структур, тобто він здатен виявляти різноманітні фрактальні властивості, що виникають у часових рядах із кількома рівнями масштабів. Це особливо важливо для рядів, які мають нелінійну поведінку і складну структуру, що змінюється з часом. Використовуючи цей метод, можна розкрити більш глибокі закономірності у поведінці процесів, таких як економічні, кліматичні, біологічні та інші складні системи. По-друге, MF-DFA може виявляти локальні тренди і залежності в часових рядах, що

дає змогу дослідникам і аналітикам зосередитися на короткострокових коливаннях і нерегулярностях. Це дозволяє побачити малі флуктуації та виявити приховані зміни у часі, які можуть вказувати на короткотривалі тенденції або аномалії, що є корисним для тих процесів, які мають сезонні або циклічні компоненти [1-3, 8-10].

Проте, попри всі свої переваги, метод MF-DFA має і певні недоліки. Одним з найбільших його обмежень є висока потреба в обчислювальних ресурсах. Через те, що MF-DFA аналізує часові ряди на різних масштабах і враховує значну кількість флуктуацій для обчислення фрактальних властивостей, цей метод потребує великих обчислювальних потужностей і часу. Це може ускладнювати його використання для аналізу великих обсягів даних або для роботи з даними в реальному часі, особливо коли потрібна висока швидкість обчислень. Також складність алгоритму, який передбачає виконання численних операцій на різних масштабах, може обмежувати застосування MF-DFA в реальному часі. Для проведення якісного аналізу часто потрібна значна попередня підготовка даних, яка включає усунення трендів і підготовку до багатомасштабного аналізу, що є додатковою перешкодою для використання MF-DFA у швидкодіючих додатках, таких як високочастотна торгівля або моніторинг в режимі реального часу.

Приклади застосування MF-DFA охоплюють широкий спектр сфер, проте одним із найбільш поширених напрямів є аналіз фінансових ринків. У фінансовому аналізі цей метод використовується для оцінки мультифрактальної структури таких часових рядів, як курси акцій, валютні котирування і інші фінансові індикатори. Зокрема, MF-DFA дозволяє виявляти періоди з високою та низькою волатильністю, що є важливим для управління ризиками. Наприклад, періоди високої волатильності можуть сигналізувати про підвищений ризик для інвесторів, в той час як періоди низької волатильності можуть вказувати на стабільність або наявність

тренду на ринку. Аналізуючи мультифрактальні характеристики часових рядів, аналітики можуть глибше зрозуміти динаміку ринкових цін і виявити фрактальні структури, які можуть змінюватися у часі. Це, в свою чергу, може допомогти в прогнозуванні можливих змін у ринковій структурі, дозволяючи інвесторам і трейдерам більш точно оцінювати ризики та приймати обґрунтовані рішення.

У підсумку, MF-DFA є потужним інструментом для аналізу складних, багатосарових часових рядів, що дозволяє виявляти і вивчати як загальні, так і локальні особливості досліджуваних процесів. Його здатність враховувати як глобальні, так і локальні характеристики даних робить його особливо цінним для тих сфер, де важливо враховувати різні часові масштаби і рівні мінливості. Однак значна обчислювальна складність і чутливість до попередньої обробки даних вимагають наявності потужного обладнання і достатньо часу для якісного проведення аналізу. Тому цей метод знаходить своє застосування переважно в таких областях, де аналізується історична інформація або ж дослідження не вимагають негайних результатів [3-5].

РОЗДІЛ 3. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ ДЛЯ ПЕРЕДБАЧЕННЯ ПРИБУТКОВОСТІ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ

3.1. Опис вибіркового даних

Вибірка, яку ми аналізуємо, складається з **587** місячних спостережень, що охоплюють широкий діапазон дат із **січня 1963 року по грудень 2011 року**. Цей набір даних структуровано таким чином, щоб включати як три основні акції, так і два різних типи ринкових індексів, пропонуючи всебічний вибір фінансових даних, які підходять для поглибленого аналізу поведінки фінансового ринку за майже півстоліття.

Для цього набору даних вибрано три акції **CocaCola (COCACOLA)**, **General Electric (GE)** і **IBM (IBM)**. Ці три компанії були обрані через їх відомість, довголіття та вплив у різних галузях. Кожна компанія є репрезентативною фігурою у своєму відповідному секторі:

- 1) **CocaCola (COCACOLA)**: ці акції представляють сектор споживчих товарів, зокрема промисловість напоїв. CocaCola є одним із найбільш впізнаваних брендів у всьому світі, і він є ключовим гравцем у галузі споживчих товарів вже більше століття. Включення даних про акції CocaCola дозволяє нам аналізувати тенденції в споживчому секторі та спостерігати за тим, як компанія, що займається виробництвом основних товарів, поводить протягом тривалого періоду часу, особливо під час економічних коливань, таких як періоди рецесії чи буму. Тривала позиція CocaCola на ринку робить її стабільним і впливовим активом, який можна включити в будь-який набір фінансових даних.

- 2) **General Electric (GE)**: General Electric історично була диверсифікованим конгломератом, що працює в багатьох секторах,

включаючи енергетику, охорону здоров'я, авіацію та фінанси. Різноманітність бізнес-операцій забезпечує ширший погляд на промислові та технологічні сектори. Включення General Electric до набору даних є цінним для спостереження за тим, як великі багатогалузеві корпорації з диверсифікованими бізнес-моделями поводяться з часом, особливо під час економічних змін, які впливають на кілька секторів одночасно. Як давній промисловий гігант, General Electric надає розуміння стійкості та продуктивності конгломератів протягом тривалого часу.

- 3) **IBM (International Business Machines)**: IBM є піонером у галузі технологій та обчислювальної техніки. Він є ключовим гравцем у сфері технологій, що має коріння в ранніх обчислювальних і сучасних IT-рішеннях. Присутність IBM у цьому наборі даних дозволяє нам аналізувати ефективність технологічної компанії, яка не лише вижила, але й процвітала та розвивалася протягом багатьох років, адаптуючись до змін у технологічному ландшафті. Включаючи IBM, ми отримуємо уявлення про продуктивність технологічного сектора, галузі, відомої своєю нестабільністю та фазами швидкого зростання. Дані IBM можуть показати, як акції технологічних компаній по-різному реагують на ринкові умови порівняно з компаніями в більш традиційних секторах, таких як споживчі товари чи промисловість.

Набір даних охоплює значний період, з **січня 1963 року по грудень 2011 року**, загалом майже **49 років**. Цей широкий часовий проміжок є особливо цінним для аналізу довгострокових трендів і вивчення впливу економічних циклів на доходи від акцій та індексів. За цей час ринок пережив кілька економічних циклів, включаючи значні рецесії (такі як нафтову кризу 1973 року, крах дот-комів на початку 2000-х і фінансову кризу 2008 року) та

періоди зростання (наприклад, економічне зростання у 1980-х та бум технологій у 1990-х). Наявність даних, що охоплюють широкий спектр економічних умов, дозволяє нам спостерігати, як ці події вплинули на доходи CocaCola, General Electric та IBM, а також на індекси VWRET та EWRET.

Завдяки такому тривалому історичному діапазону ми можемо глибоко аналізувати сталість і волатильність доходів у різні періоди. Часовий діапазон набору даних дозволяє нам проводити більш глибокий аналіз довгострокових трендів і моделей, особливо щодо теорій фракталів і самоподібності. Ці теорії часто вимагають великої кількості даних для виявлення самоподібних або фрактальних моделей, що робить цей набір даних ідеальним для виявлення таких характеристик. Майже 50-річний діапазон забезпечує достатньо спостережень для дослідження можливості наявності довготривалої пам'яті або ефектів автокореляції в кожній часовій серії, які є ключовими компонентами для розуміння фрактальної природи фінансових доходів.

Поряд із індивідуальними акціями, набір даних включає два типи ринкових індексів: **Індекс зважених за вартістю доходів (VWRET)** і **Індекс рівнозначно зважених доходів (EWRET)**. Ці індекси надають більш загальний погляд на ринок, допомагаючи зрозуміти загальні ринкові рухи та тренди, що виходять за рамки показників окремих компаній.

Індекс зважених за вартістю доходів (VWRET): Цей індекс зважується за ринковою капіталізацією кожної компанії, тобто більші компанії мають більший вплив на його показники. Включаючи VWRET у наш аналіз, ми можемо спостерігати поведінку ринку, яка відображає результати діяльності великих, впливових компаній на ринку. Цей індекс особливо корисний для розуміння того, як результати діяльності великих компаній впливають на ринкові тренди, оскільки їхні коливання акцій зазвичай

мають більший вплив на загальний ринковий індекс. VWRET дозволяє нам зосередитися на поведінці «великих гравців» на ринку, надаючи уявлення про те, як найбільші та найвпливовіші фінансові компанії впливають на динаміку ринку.

Індекс рівнозначно зважених доходів (EWRET): На відміну від індексу зваженого за вартістю, рівнозначно зважений індекс однаково ставиться до кожної компанії, незалежно від її розміру чи ринкової капіталізації. Кожна компанія в індексі робить однаковий внесок, надаючи погляд на середню ринкову продуктивність без непропорційного впливу великих компаній. Включення EWRET дозволяє спостерігати загальний ринковий тренд з більш демократичної точки зору, захоплюючи продуктивність менших компаній настільки ж ефективно, як і більших. Це може допомогти виявити загальні тренди, які впливають на середню акцію на ринку, що робить його цінним інструментом для розуміння динаміки ринку в цілому, без упередженості, введеної зважуванням за ринковою капіталізацією.

Вибір CocaCola, General Electric та IBM для аналізу акцій є навмисним і спрямований на забезпечення збалансованого погляду на різні сектори з компаніями, які мають тривалу історію на ринку. Ці компанії залишаються публічно торгованими та впливовими протягом кількох десятиліть, що дозволяє нам аналізувати їхні доходи з акцій на великих часових відрізках, охоплюючи різні економічні умови. Ці компанії надають уявлення про те, як конкретні галузі реагують на різні ринкові події, такі як економічні рецесії, зростання, технологічні нововведення та регуляторні зміни. Аналізуючи акції зі споживчого, промислового та технологічного секторів, ми отримуємо більш диверсифікований погляд на поведінку ринку.

Аналогічно, вибір індексів **VWRET та EWRET** доповнює дані про акції, надаючи перспективу широкого ринку. Індекс VWRET допомагає зрозуміти ефективність найбільших компаній, тоді як індекс EWRET збалансовує цей

погляд, представляючи ринок у цілому, не зосереджуючи увагу на розмірах кожної компанії. Це поєднання дозволяє нам аналізувати поведінку окремих компаній у контексті загальних ринкових тенденцій та перевірити, чи акції рухаються в унісон із ринком чи демонструють унікальні моделі [2-5, 9].

3.2 Описова статистика вибірки

Для більш глибокого аналізу логарифмічних доходностей та детальнішого розгляду їхніх статистичних і економетричних властивостей, розглянемо математичну природу логарифмування в контексті фінансового аналізу, а також теоретичні основи та властивості логарифмічних доходностей, що використовуються в економетричних дослідженнях.

Нехай P_t позначає ціну активу в момент часу t , а P_{t-1} — ціну активу на попередньому кроці (місяць раніше в цьому випадку). Проста (абсолютна) доходність між моментами часу $t-1$ та t обчислюється як:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \quad (15)$$

Ми визначаємо дохідність як

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}. \quad (16)$$

Переваги логарифмічних доходностей полягають в наступних чинниках:

- 1) *агрегативність та адитивність*. Однією з найбільших переваг логарифмічних доходностей є їх адитивність. Якщо ми розглядаємо логарифмічні доходності за декілька періодів, загальна доходність за цей період буде дорівнювати сумі логарифмічних доходностей за кожний окремий період.

Ця властивість дуже зручна для моделювання та спрощує аналіз доходностей у довготривалих дослідженнях, дозволяючи легко агрегувати доходності за будь-який період часу.

- 2) *апроксимація при малих коливаннях*. Коли коливання цін є відносно малими, логарифмічна доходність дуже близька до простої доходності. Тобто для малих значень R_t виконується наступне наближення:

$$\ln(1 + R_t) \sim R_t. \quad (17)$$

- 3) *симетричність зростання та падіння*. Логарифмічні доходності відображають симетрію між зростанням та падінням цін, тобто вони однаково трактують відсоткове зростання і падіння, на відміну від простої доходності. Наприклад, якщо акція зростає на 50%, а потім падає на 50%, то для простої доходності кінцевий результат буде відрізнятися від початкового значення, тоді як логарифмічна доходність об'єктивніше відобразатиме такі зміни.

Розглянута вибірка даних має наступну описову статистику.

- *Середнє значення (Mean)*. Середнє значення логарифмічних доходностей для кожного активу є важливим показником середньої річної чи місячної доходності цього активу. Для фінансового аналізу середнє значення може вказувати на довготривалі тенденції. Наприклад, середнє значення 0.010835 для CocaCola вказує на те, що акція мала загальну тенденцію до зростання за період, що охоплюється даними.
- *Стандартне відхилення* є мірою волатильності, або ризику, активу. Високі значення стандартного відхилення свідчать про вищу волатильність і більший ризик. З економетричної точки зору,

стандартне відхилення є показником варіативності, який часто використовується в моделях оцінки ризику та портфельної оптимізації. Наприклад, стандартне відхилення для VWRET (0.045473) порівняно вище, що свідчить про більшу волатильність індексу, зваженого за капіталізацією.

- *Скіс (Skewness) та ексцес (Kurtosis)*. Ці два показники допомагають оцінити асиметрію та товщину хвостів у розподілі доходностей. У фінансових даних часто зустрічається розподіл з великим скісним коефіцієнтом та високим ексцесом, що вказує на наявність екстремальних значень, таких як різкі стрибки або падіння. Логарифмічні доходності мають тенденцію зменшувати значення скісного коефіцієнта та ексцесу, наближаючи розподіл до нормального. Це полегшує використання економетричних методів, які передбачають нормальний розподіл.
- *Автокореляція та довга пам'ять*. Для економетричних моделей часових рядів часто досліджується автокореляція, щоб визначити, чи є в даних довготривалі тренди або кореляції. Логарифмічні доходності дозволяють краще виявити довгу пам'ять у часових рядах завдяки своїм властивостям. У випадках, коли автокореляція значуща, це може свідчити про те, що доходності не є випадковими і можуть бути спрогнозовані. Це особливо важливо для побудови моделей, які враховують довготривалу пам'ять, таких як ARFIMA [6, 9-10].

Таблиця 3.1. Описова статистика вибірки

Statistic	DATE	COCACOLA_log	GE_log	IBM_log	VWRET_log
Кількість спостережень	588	588	588	588	588
Середнє значення	19870680.0	0.010835	0.007877	0.008047	0.007732
Стандартне відхилення	141542.0	0.061667	0.069527	0.069351	0.045473
Мінімум	19630130.0	-0.339977	-0.318660	-0.303683	-0.255361
Квартиль 25%	19750410.0	-0.021732	-0.031894	-0.032504	-0.017662
Медіана 50%	19870680.0	0.012043	0.005086	0.007487	0.012210
Квартиль 75%	19990950.0	0.046690	0.048032	0.049247	0.037987
Максимум	20111230.0	0.228788	0.224132	0.302915	0.153223

3.2. Обчислення показника Херста для кожного активу

Таблиця 3.2. Показники Херста для кожного з активів

Актив	Показник Херста	Наслідки	Тлумачення
<i>CocaCola</i>	0.5524	Слабка стійкість тренду	Помірне слідування тренду
<i>GE</i>	0.2115	Сильна реверсія середнього значення	Піходить для стратегії розвороту
<i>IBM</i>	0.3713	Помірна середня реверсія	Помірне слідування тренду
<i>VWRET</i>	0.5175	Слабка стійкість тренду	Слабке слідування тренду
<i>EWRET</i>	0.7206	Сильна стійкість тренду	Сильне слідування тренду

Аналіз значень експоненти Херста для різних часових рядів у наборі даних відкриває інформацію про стійкість і характеристики пам'яті кожного фінансового активу. Для CocaCola це показник Херста $H = 0.55$, який вище 0.5, хоча й незначно. Це говорить про слабку стійкість у часовому ряді, що означає, що існує помірна тенденція до повернення CocaCola продовжуватись у тому ж напрямку. Показник Херста 0.55 вказує на незначну автокореляцію, тобто якщо ціна акцій CocaCola нещодавно піднялася вгору, існує дещо вища ймовірність того, що вона продовжуватиме зростати протягом деякого часу, і та ж логіка застосовується до низхідних тенденцій. У фінансовому плані ця слабка наполегливість або невелика характеристика довготривалої пам'яті робить прибуток CocaCola дещо передбачуваним у короткостроковій перспективі, хоча й не дуже. Трейдери та аналітики потенційно можуть використовувати це для визначення короткострокових тенденцій у ціні акцій CocaCola; однак ці тенденції, ймовірно, будуть помірними і потребуватимуть ретельного визначення часу, щоб використати їх.

Для **General Electric (GE)** показник Херста помітно відрізняється, $H = 0.2115$, що значно нижче 0.5. Цей низький показник Херста свідчить про те, що часові ряди GE демонструють сильну поведінку, що повертає середнє значення, або антиперсистентну. На практиці це означає, що коли прибутки GE рухаються в одному напрямку, вони, швидше за все, зміняться в наступному періоді, демонструючи тенденцію до коливань навколо середнього значення, а не продовження в якомусь одному напрямку. Математично цей низький показник Херста означає негативну автокореляцію, яка вказує на те, що якщо прибутки GE збільшуються в один період, статистично вони, ймовірно, зменшаться в наступному, і навпаки. Ця сильна характеристика середнього повернення в доходах GE робить його придатним для торгових стратегій середнього повернення, де

трейдери можуть робити ставку на розвороти ціни акцій. З точки зору моделювання, часові ряди GE виграють від моделей, розроблених для даних із поверненням середнього значення, таких як авторегресійна модель першого порядку (AR(1)), або інших моделей, спеціально створених для охоплення коливальної природи повернення середнього значення серії.

Звертаючись до **IBM**, індекс Херста $H = 0.2115$, який передбачає більш помірний ступінь реверсії середнього порівняно з GE, зі значенням, яке все ще нижче 0,5, але ближче до середини. Це значення вказує на слабку стійкість прибутків IBM, що вказує на те, що, незважаючи на те, що існує тенденція до розвороту, ефект менш виражений, ніж у випадку з GE. З математичної точки зору показник Херста приблизно 0.37 вказує на помірну негативну автокореляцію, що свідчить про те, що якщо прибутковість IBM буде зростати, існує невелика ймовірність, що вона знизиться в наступному періоді. Ця слабка поведінка повернення середнього значення вказує на те, що прибутки IBM не відповідають строгому випадковому блуканню, а також не виявляють сильної стійкості. Для трейдерів це означає, що акції IBM можуть відчувати деякі короткострокові розвороти, хоча ці тенденції можуть бути слабкими та не особливо передбачуваними. З точки зору фінансового моделювання, доходи IBM найкраще моделюватимуться за допомогою підходів, які враховуватимуть незначні тенденції до середнього повернення, хоча сильні припущення щодо довгострокових тенденцій, ймовірно, не застосовуватимуться.

Value-Weighted Return Index (VWRET) має показник Херста $H = 0.5175$, який тільки дещо вище 0.5, що вказує на слабку стійкість у серії. Це означає помірну позитивну автокореляцію, тобто прибутковість цього індексу демонструє незначну тенденцію продовжуватись у поточному напрямку, хоча ефект не дуже сильний. Математично цей показник

свідчить про те, що зважений за вартістю індекс, у якому домінують акції з великою капіталізацією, близький до випадкового блукання, але має тенденцію до помірною продовження своїх тенденцій. Ця слабка стійкість у VWRET свідчить про те, що акції з великою капіталізацією, які найбільше впливають на індекс, зважений за вартістю, можуть демонструвати певний ступінь короткострокової тенденції, хоча вона залишається слабкою. Для цілей фінансового моделювання цей індекс може бути придатним для моделей із членами автокореляції низького порядку, таких як модель ARIMA з невеликою кількістю лагів, щоб зафіксувати цю незначну тенденцію до продовження тенденції. Загалом слабка стійкість індексу VWRET зацікавила б аналітиків, які прагнуть зрозуміти, як акції з великою капіталізацією впливають на короткострокові тенденції в ширшому ринковому контексті.

Нарешті, **індекс рівнозваженої прибутковості (EWRET)** показує значно високий показник Херста $H = 0.7206$, що свідчить про сильну стійкість у серії. Це означає, що коли прибутки в рівнозваженому індексі рухаються в певному напрямку, вони, швидше за все, продовжуватимуть рухатися в цьому напрямку протягом тривалого періоду. З математичної точки зору показник Херста, рівний 0.72, означає позитивну автокореляцію, тобто ряд має сильну тенденцію зберігатися в одному напрямку протягом кількох періодів. Ця характеристика стійкості в EWRET означає, що акції з меншою капіталізацією, які вносять рівний внесок у цей індекс, мають тенденцію демонструвати трендову поведінку протягом тривалих періодів. Сильна трендова поведінка рівнозваженого індексу робить його ідеальним кандидатом для стратегій слідування за трендом, де мета полягає в тому, щоб отримати вигоду від постійного руху в одному напрямку. З точки зору економетричного моделювання, EWRET виграє від моделей, які включають компоненти довгої пам'яті, такі як ARFIMA (авторегресійне дробово-

інтегроване ковзне середнє) або дробові диференційні моделі. Ці моделі розроблені для охоплення довгострокових автокореляційних структур і добре узгоджуються з сильною стійкістю, що спостерігається в EWRET.

3.3. Обчислення коробкової розмірності (box-counting dimension)

Таблиця 3.2. Обчислення коробкової розмірності для кожного з активів

Актив	Фрактальна розмірність	Інтерпретація
<i>COCACOLA</i>	0.9663	Фрактальний вимір CоsaCоla відображає високий ступінь складності та нерівномірності, вказуючи на часті нерівні коливання доходів, які, ймовірно, спричинені динамікою ринку.
<i>GE</i>	0.9661	Висока фрактальна розмірність GE свідчить про складну структуру зі значною мінливістю, на яку, ймовірно, впливають різноманітні сектори бізнесу компанії та економічна чутливість.
<i>IBM</i>	0.9665	Фрактальний вимір IBM вказує на подібну грубість і чутливість до змін ринку, відображаючи притаманну технологічному сектору нестабільність і конкурентний тиск.
<i>VWRET</i>	0.9669	Розмір VWRET свідчить про те, що акції з великою капіталізацією разом демонструють фрактальну складність із значною мінливістю під впливом макроекономічних і галузевих тенденцій.
<i>EWRET</i>	0.9669	Висока фрактальна розмірність EWRET означає, що ширший ринок, включаючи як велику, так і малу капіталізацію, демонструє високу мінливість і нелінійну динаміку на всьому ринку.

Аналіз фрактальної розмірності для кожного часового ряду дає детальне уявлення про складність і нестабільність, властиву цим фінансовим активам.

Для **CocaCola** (фрактальна розмірність $\approx 0,966$) висока фрактальна розмірність 0,966 відображає значний рівень складності та нерівномірності в змінах ціни акцій. Це свідчить про те, що прибуток CocaCola демонструє високу волатильність і структуру нерівних, непередбачуваних коливань. На практиці така висока фрактальна розмірність означає, що акції CocaCola чутливі до частих і інтенсивних короткострокових змін, які часто викликані низкою факторів, включаючи зміни в споживчому попиті, зміни в конкурентному позиціонуванні та ширші макроекономічні впливи, що впливають на споживачів. товарний сектор. Розмір, близький до 1, також вказує на те, що рух цін CocaCola не є ні плавним, ні абсолютно випадковим. Натомість вони демонструють характеристики, схожі на фрактали, де схожі моделі можуть повторюватися в різних часових масштабах. Для інвесторів це означає, що прибутки CocaCola можуть бути нелегко передбачуваними, тому важливо розглянути стратегії управління ризиками, які враховують різкі зміни доходів.

GE (фрактальна розмірність $\approx 0,966$) демонструє фрактальну розмірність, близьку до CocaCola, що свідчить про подібний рівень складності часових рядів. Цей вимір відображає те, що доходи GE мають дуже складну структуру з частими змінами напрямку та значною мінливістю. Високий фрактальний вимір GE можна віднести до різноманітних секторів, у яких GE працює, таких як енергетика, авіація та охорона здоров'я, кожен з яких має унікальні фактори, що впливають на продуктивність. Крім того, як багатогалузевий конгломерат, GE може бути більш чутливим до широких економічних змін і галузевих циклів, що сприяє складності, що спостерігається. З точки зору торгівлі, високий фрактальний вимір говорить про те, що важко передбачити плавні, передбачувані тренди в акціях GE. Інвестори можуть очікувати значної мінливості доходів, що

зумовлює необхідність прийняття гнучких стратегій, які можуть пристосуватися до раптових нерегулярних змін курсу акцій GE.

IBM (фрактальна розмірність $\approx 0,966$) також відображає фрактальну розмірність близько 0,966, подібно до інших акцій у наборі даних. Це вказує на те, що ціна акцій IBM характеризується подібною шорсткістю та складністю моделей доходності, відзначеною частими коливаннями та нерегулярною структурою, схожою на фрактали. Високий фрактальний вимір IBM може відображати притаманну нестабільність у технологічному секторі, де ціни на акції можуть швидко змінюватися через такі фактори, як інноваційні цикли, конкуренція та зміна попиту на технологічні рішення. Нерегулярна структура доходів IBM свідчить про те, що акції дуже чутливі до ринкових змін, часто гостро реагуючи на технологічний прогрес або конкурентний тиск. Для інвесторів цей високий фрактальний вимір говорить про те, що прості стратегії відстеження тенденцій можуть бути неефективними для IBM. Натомість торгові моделі, які можуть впоратися з високою мінливістю та короткостроковими розворотами, можуть бути більш доречними для фіксації динаміки цін IBM.

Для **Value-Weighted Return Index (VWRET)** (фрактальна розмірність $\approx 0,967$) фрактальна розмірність приблизно 0,967 відображає рівень складності, подібний до рівня складності окремих акцій. Це значення свідчить про те, що індекс, який зважує акції відповідно до ринкової капіталізації, втілює значну грубість і складність, фіксуючи сукупні коливання акцій великої капіталізації на ринку. Оскільки VWRET перебуває під сильним впливом великих компаній, його високий фрактальний вимір означає, що акції з великою капіталізацією разом демонструють складність, схожу на фрактальну. Хоча ці акції можуть бути відносно стабільними, якщо розглядати їх окремо, вони демонструють значну мінливість у сукупності, ймовірно, через макроекономічні чинники

або галузеві тенденції, які більш інтенсивно впливають на великі компанії. Шорсткість фрактального виміру у VWRET свідчить про те, що навіть індекс, де домінують акції з великою капіталізацією, зазнає непередбачуваних коливань цін, що вказує на те, що акції з великою капіталізацією не дотримуються плавних траєкторій зростання. Менеджери портфельів можуть використовувати цю інформацію для включення моделей, які враховують короткострокову волатильність і структурні зміни в оцінках ризиків і портфельних стратегіях.

Нарешті, **індекс рівнозваженої прибутковості (EWRET)** (фрактальна розмірність $\approx 0,967$) має фрактальну розмірність, близьку до фрактальної розмірності VWRET, що свідчить про те, що рівнозважений індекс, який надає кожній акції рівний вплив, демонструє високу складність і мінливість. Цей вимір відображає подібну грубість, як і окремі акції та індекс, зважений за вартістю. Високий фрактальний вимір EWRET може бути результатом включення акцій меншої капіталізації, які часто мають вищу волатильність, ніж великі фірми. Зважуючи кожну компанію однаково, EWRET враховує цю ширшу мінливість на ринку, що призводить до дуже нерегулярної та складної структури доходів індексу. З інвестиційної точки зору високий фрактальний вимір EWRET вказує на те, що ширший ринок, який включає як великі, так і невеликі акції, відчуває значні та непередбачувані коливання. Наявність фрактальної складності в рівнозваженому індексі свідчить про те, що інвестори повинні передбачати нелінійну динаміку цін на ринку з тенденціями, які можуть бути непередбачуваними. Менеджери портфельів можуть використовувати це розуміння для диверсифікації стратегій і забезпечення врахування раптових цінових змін, що впливають як на великі, так і на малі компанії.

Таким чином, кожен із цих часових рядів демонструє фрактальну розмірність, близьку до 1, що відображає притаманну шорсткість,

складність і нестабільність їхніх доходів. Така висока схожість у фрактальних вимірах у різних активах та індексах підкреслює, що фінансові ринки демонструють фрактальну поведінку, коли моделі повторюються в різних часових масштабах, і припускає, що підходи до моделювання повинні врахувати цю нелінійну складність, щоб охопити справжню природу фінансового часу серії [2, 6-9].

3.4. Обчислення мультифрактального детрендованого флуктуаційного аналізу фінансових часових рядів

Детальна інтерпретація значень узагальненого показника Херста H_q для кожного часового ряду забезпечує широке уявлення про стійкість і антиперсистентність для різних величин коливань кожної акції чи індексу. Оцінюючи H_q для різних порядків (q), ми отримуємо тонке розуміння того, як стійкість поводить себе не лише під час типових коливань, але й під час екстремальних коливань. Цей мультифрактальний підхід дозволяє нам спостерігати самоподібність і фрактальну природу цих фінансових часових рядів, висвітлюючи унікальні закономірності, які демонструє кожна акція чи індекс. Детільне візуальне представлення наступних аналізів висвітлено у Додатку В.

Значення H_q **CocaCola** коливаються приблизно від 0,142826 коли $q = -2$ до 0,029370 при $q = 2$, що вказує на поступове зниження стійкості від малих до великих коливань. Ця тенденція демонструє, що ряд повернення **CocaCola** демонструє мультифрактальність, де менші коливання демонструють сильнішу стійкість, тоді як більші коливання мають тенденцію повертатися швидше. Коли q – від'ємне, що відображає невеликі коливання, відносно високий H_q свідчить про те, що незначні зміни ціни, як правило, зберігаються, що означає, що незначні рухи вгору або вниз, швидше за все, короткочасно продовжаться в тому ж напрямку.

Таку поведінку можна пояснити стабільністю доходів CocaCola та стабільним попитом у секторі споживчих товарів. Економетрично цей висновок означає, що менші коливання CocaCola можна змоделювати за допомогою рамок часових рядів, які включають автокореляцію, оскільки ці менші зміни зберігають певний вплив на майбутні напрямки. Навпаки, при вищих значеннях q (що представляють більші коливання), H_q значно знижується, що свідчить про те, що значні відхилення від тенденції не є стійкими. Це означає, що значні зміни цін часто супроводжуються розворотами, ймовірно, викликаними зовнішніми новинами або економічними умовами, які тимчасово руйнують акції, перш ніж вони знову стабілізуються. Ця мультифрактальна структура свідчить про те, що хоча акції CocaCola можуть демонструвати поведінку, що слідує тренду в незначному масштабі, більші рухи вимагають реверсійної моделі, щоб точно відобразити їх тимчасовий характер.

Для **GeneralElectric (GE)** значення H_q демонструють виражене зниження від менших до більших коливань із значеннями від 0,106873 при $q = -2$ до близького до нуля 0,005125, коли $q = 2$. Ця тенденція підкреслює, що акції GE демонструють сильну антиперсистенцію для більших рухів, причому великі коливання часто супроводжуються протилежними змінами. Невеликі коливання вказують на слабку стійкість, що відображає короткі тенденції, на які, ймовірно, вплинула багатогалузева присутність GE у різних галузях. Ця слабка стійкість у відносно невеликих коливаннях може бути результатом різноманітних бізнес-інтересів GE, де незначні секторальні зміни спричиняють короткочасні тенденції. Однак майже нульовий H_q при $q = 2$ вказує на те, що значні коливання мають тенденцію швидко змінюватися, що свідчить про те, що більші рухи GE зумовлені тимчасовими, циклічними факторами, а не постійними тенденціями. Ця характеристика узгоджується з поведінкою циклічних або

конгломератних акцій, де на коливання сильно впливають ширші економічні цикли. Отже, великі рухи GE можуть бути найкраще охоплені моделями середнього повернення, тоді як короткострокові торгові стратегії можуть використовувати слабку автокореляцію, присутню при незначних коливаннях.

IBM демонструє подібний, але трохи більш помірний мультифрактальний шаблон, зі значеннями H_q в діапазоні від 0,083195 при $q = -2$ до 0,008873, коли $q = 2$. Незважаючи на те, що значення H_q IBM демонструють зниження, градієнт менш крутий, ніж у GE, що вказує на те, що більші коливання IBM менш повертаються до середнього порівняно з GE. Незначні коливання демонструють невелику стійкість, що свідчить про те, що в технологічному секторі можуть виникнути короточасні тенденції, можливо, через стабільні, поступові ринкові рухи або інновації. Однак більші зміни демонструють тенденцію до повернення середнього значення, що відображає реакцію ринку на значні технологічні або галузеві зміни, які тимчасово впливають на курс акцій IBM. Цей висновок означає, що динаміка прибутковості IBM може виграти від моделей, які включають різні швидкості автокореляції або повернення в різних масштабах, що забезпечує більшу гнучкість у фіксуванні унікальної реакції акцій як на поступові, так і на різкі зміни.

Value-Weighted Return Index (VWRET) демонструє значне зниження стійкості від малих до великих коливань, схоже на CocaCola, але з ще більш вираженими ефектами. Значення H_q становить 0,149455, коли $q = -2$, що вказує на сильну стійкість при малих флуктуаціях. Це свідчить про те, що акції з великою капіталізацією, які домінують у VWRET, слідуєть стабільним тенденціям у невеликому масштабі, можливо, завдяки їх міцному фінансовому становищу та передбачуваним результатам.

Навпаки, значення H_q падає до 0,028161 при $q = 2$, що вказує на меншу ймовірність збереження великих рухів. Ця тенденція підкреслює, як акції з великою капіталізацією, незважаючи на стабільність за нормальних умов, мають тенденцію повертатися після значних змін, ймовірно, через дії інвесторів, спрямовані на стабілізацію надмірних коливань цін. Мультифрактальна природа VWRET означає, що малі флуктуації передбачувані, тоді як більші підлягають швидкій корекції. Це спостереження узгоджується з моделями, які включають компоненти середнього повернення для великих рухів, поряд зі стабільними термінами автокореляції для дрібномасштабних трендів. Отже, фрактальна структура VWRET підкреслює потребу в економетричних моделях, які враховують різні рівні стійкості, оскільки акції з великою капіталізацією демонструють різну поведінку залежно від масштабу коливань.

Індекс рівнозваженої прибутковості (EWRET), що включає акції з малою капіталізацією, демонструє найвищу стійкість на всіх рівнях коливань, зі значеннями H_q в діапазоні від 0,160899, коли $q = -2$, до 0,042195 при $q = 2$. Така висока стійкість при невеликих коливаннях відображає тенденцію акцій малої капіталізації демонструвати стійкі тенденції, оскільки ці компанії часто дотримуються моделей зростання під впливом попиту в певному секторі та настроїв інвесторів. Підвищена наполегливість навіть при великих коливаннях свідчить про те, що EWRET відчуває поведінку, що слідує за трендом, у багатьох масштабах, ймовірно, через торгівлю на імпульсі та обмежену ліквідність акцій з малою капіталізацією. З точки зору торгівлі така поведінка вказує на те, що стратегії на основі моментуму можуть бути особливо ефективними як для незначних, так і для великих змін цін у EWRET. З економетричної точки зору, моделі, що включають довгу пам'ять або дробову різницю, підійдуть для охоплення стійкої структури EWRET, оскільки вона відображає як

короткострокові, так і довгострокові автокореляції на різних рівнях коливань.

Підбиваючи підсумки, узагальнений експонентний аналіз Херста підкреслює мультифрактальність кожної серії, виявляючи чітку стійкість і поведінку середнього повернення при різних величинах флуктуації. CocaCola та VWRET показують стабільну стійкість при невеликих коливаннях зі зниженою передбачуваністю при більших рухах, що відображає стійкість і випадкову волатильність під впливом ринкових сил. GE та IBM демонструють меншу стійкість при незначних коливаннях, але демонструють сильні тенденції до повернення середнього значення при більших рухах, характерних для циклічних або інноваційних секторів. EWRET, з його сильною стійкістю на всіх рівнях коливань, підкреслює поведінку рівнозважених індексів, що слідує тренду, зумовлену ефектом імпульсу в акціях з малою капіталізацією [1, 5, 9-10].

ВИСНОВКИ

Основна мета дослідження полягала в застосуванні теорії фракталів, зокрема мультифрактального детрендованого коливального аналізу (MF-DFA), для оцінки властивостей часових рядів доходності акцій та ринкових індексів, що дає можливість розглянути їх складну структуру та виявити схильність до довгострокової пам'яті або зворотності.

Розглянувши кілька відомих компаній (CocaCola, General Electric, IBM) та індекси (Value-Weighted і Equally-Weighted), було виявлено, що кожна серія показує унікальні характеристики багатofрактальності, що відображають їхню специфічну природу. Так, акції CocaCola демонструють слабку, але стійку тенденцію до продовження тренду в невеликих коливаннях, що може бути пов'язано з її стабільністю як компанії в секторі споживчих товарів. Водночас великі коливання схильні до зворотності, що свідчить про короткострокові реакції на ринкові потрясіння.

Акції General Electric показали сильну анти-персистентність у великих коливаннях, що є типовим для конгломератів із широким спектром діяльності. Це свідчить про циклічний характер великих рухів, які відбуваються під впливом макроекономічних факторів. IBM, яка представляє технологічний сектор, має подібну, хоча й менш виражену, структуру зворотності, що відображає її чутливість до нововведень і технологічних змін.

Індекси VWRET та EWRET продемонстрували цікаві властивості. Value-Weighted Index, що репрезентує великі компанії, виявив стабільність у малих коливаннях, але швидко зворотність у випадку великих змін. Це підкреслює стабільність великокапіталізованих компаній, які можуть зменшити вплив короткострокових потрясінь. Натомість, Equally-Weighted Index показав значну схильність до трендового руху, особливо у малих

компаніях, які часто піддаються впливу спекулятивного настрою інвесторів та ефекту імпульсу.

У процесі дослідження було показано, що метод MF-DFA дозволяє отримати багатовимірну картину ринку та надає інформацію про різні аспекти ринкових рухів, які не можна було б виявити звичайними методами. Також було показано, що окремі часові ряди демонструють неоднорідну структуру персистентності та зворотності, залежно від масштабів флуктуацій. Зокрема, застосування мультифрактального аналізу дозволило оцінити, які частини часових рядів можуть бути ефективно моделювані за допомогою трендових стратегій, а які – за допомогою стратегій зворотності.

Результати дослідження мають значні практичні наслідки. Вони вказують на необхідність адаптації моделей та торгових стратегій до особливостей окремих акцій і ринкових індексів. Наприклад, для великих компаній та індексів доцільно застосовувати стратегії зворотності для великих коливань, тоді як для малих компаній можуть бути корисні трендові стратегії. Це дозволяє більш точно оцінювати ризики та можливості, адаптувати стратегії до особливостей окремих ринків та підвищити ефективність інвестицій.

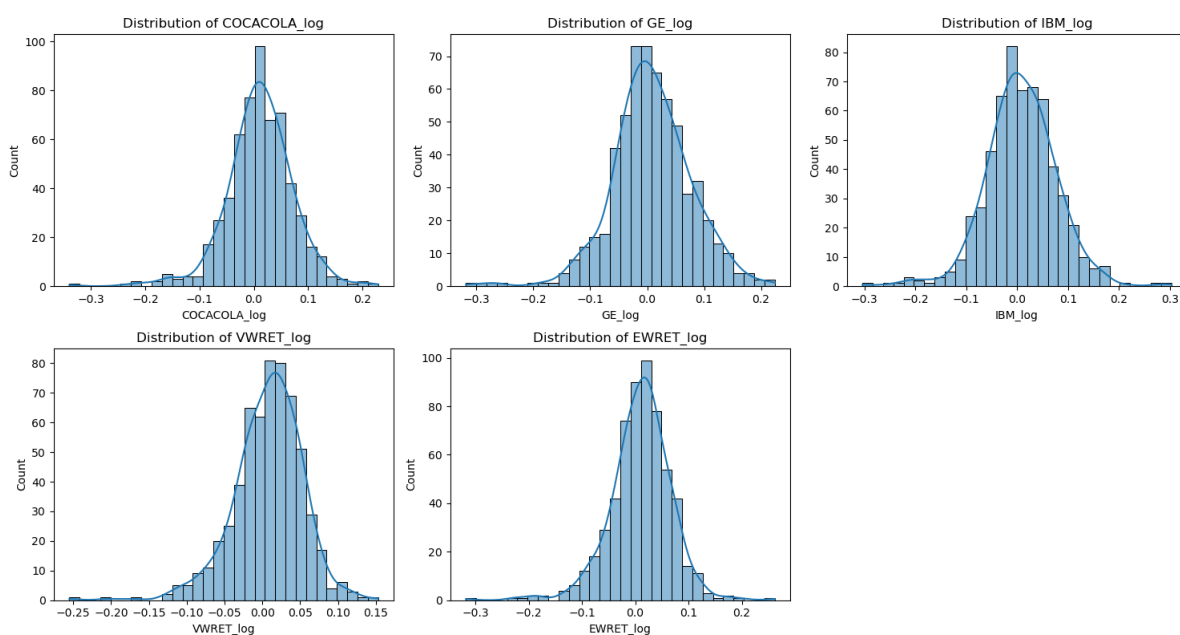
Таким чином, виконане дослідження підтверджує значущість фрактального підходу та методів мультифрактального аналізу для дослідження фінансових ринків. Цей підхід надає можливість отримати глибше розуміння ринкових структур та розробити більш точні інструменти для прогнозування та моделювання ринкових процесів. Подальші дослідження можуть бути зосереджені на застосуванні цих методів до ширшого спектру активів і ринків, що дозволить ще більше вдосконалити підходи до управління портфелем та ризиком.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

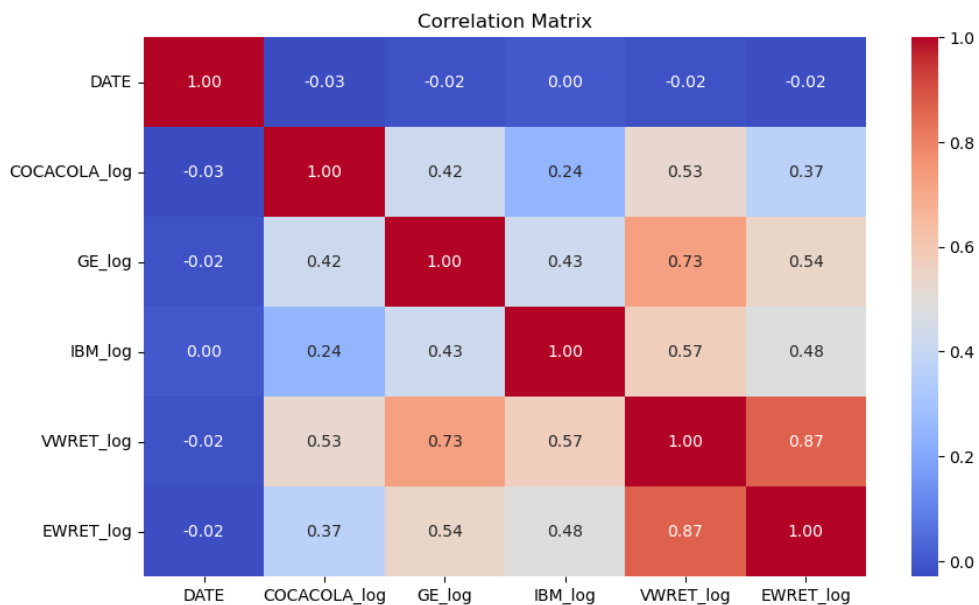
1. Ляшенко О.І., Кравець Т.В. Фрактальний аналіз валютного ринку: індекс Херста як індикатор аномальних подій. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Економіка*. 2016. №1(178). С. 34-41.
2. Данильчук Г.Б. *Фрактальний аналіз фінансових ринків. Економіка і прогнозування*. 2018. №2. С. 148-163.
3. Соловійов В.М., Сапцін В.М., Чабаненко Д.М. Прогнозування кризових явищ в економіці з використанням методів нелінійної динаміки. *Вісник Черкаського університету. Серія: Економічні науки*. 2015. №33(366). С. 3-13.
4. Пластун О.Л. Прогнозування фінансових ринків: сучасні концепції та нові підходи. Суми: ДВНЗ "УАБС НБУ", 2014. 401 с.
5. Дербенцев В.Д., Сердюк О.А., Соловійов В.М., Шарапов О.Д. Синергетичні та екофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем. Черкаси: Брама-Україна, 2010. 287 с.
6. Максишко Н.К., Перепелиця В.О. Аналіз і прогнозування еволюції економічних систем. Запоріжжя: Поліграф, 2006. 236 с.
7. Кирилич В.М. Фрактальний аналіз фінансових часових рядів. *Вісник Львівського університету. Серія економічна*. 2017. Випуск 54. С. 256-262.
8. Заболоцький Т.М. Моделювання та прогнозування нестационарних гетероскедастичних процесів. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2016. 278 с.
9. Грицюк П.М. Аналіз, моделювання та прогнозування динаміки врожайності озимої пшениці в розрізі областей України. Рівне: НУВГП, 2010. 350 с.
10. Матвійчук А.В. Штучний інтелект в економіці: нейронні мережі, нечітка логіка. Київ: КНЕУ, 2011. 439 с.
11. Кузнецова Н.В., Бідюк П.І. Системний підхід до аналізу кредитних ризиків з використанням мереж Байєса. *Наукові вісті НТУУ "КПІ"*. 2008. №3. С. 11-24.

ДОДАТКИ

Додаток А



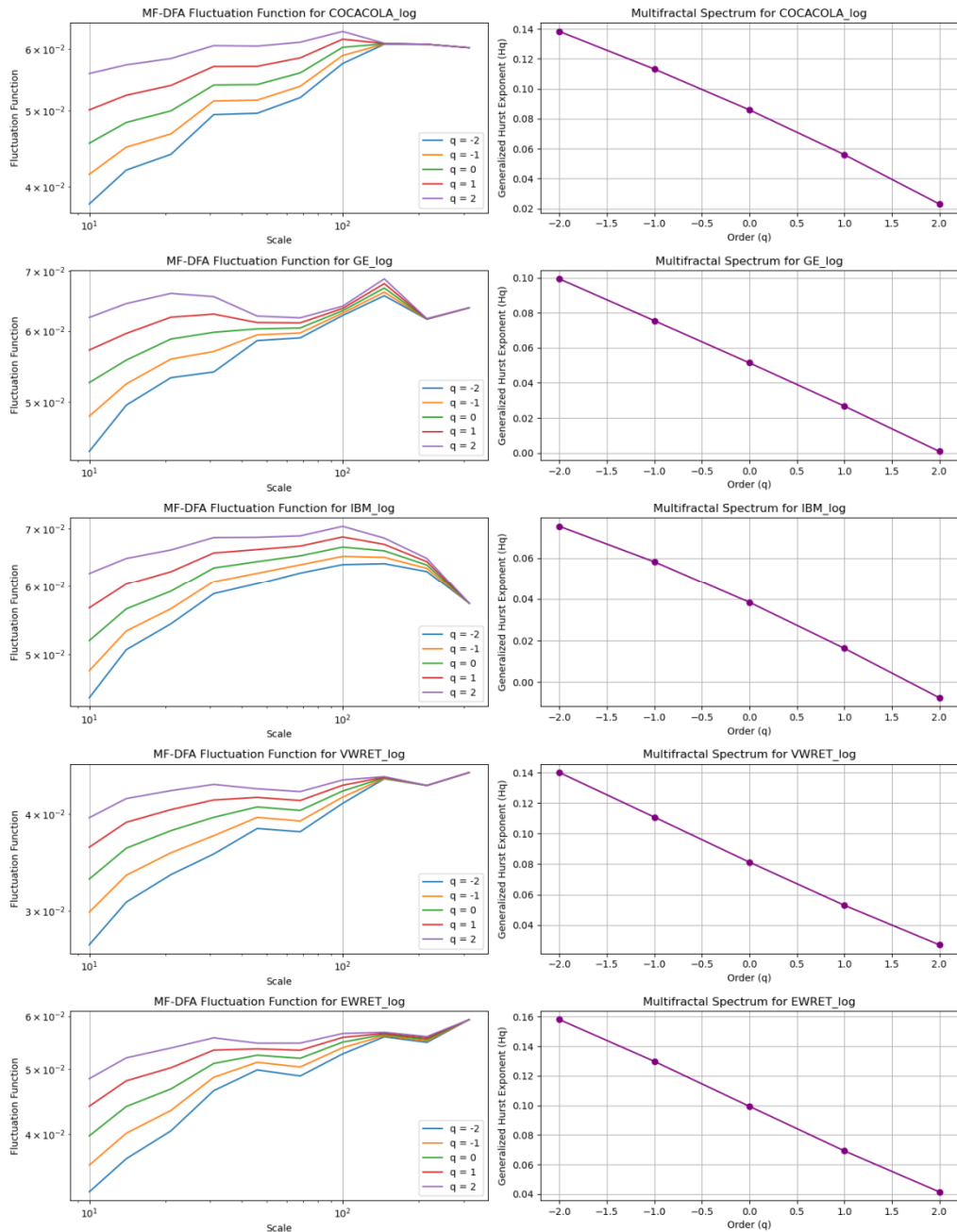
А.1. Розподіли логарифмічної прибутковості активів COCA COLA, GE, IBM та індексів VWRET, EWRET



А.2. Кореляційна матриця логарифмічної прибутковості активів COCA COLA, GE, IBM та індексів VWRET, EWRET

Додаток В

MF-DFA Fluctuation Function and Multifractal Spectrum for Each Series



V.1. Результати мультифрактального аналізу флуктуацій із детрендуванням (MF-DFA) для логарифмів прибутковості вибраних акцій та ринкових індексів

Анотація

Павліха В. Ю. Фрактальний аналіз і самоподібність у фінансових часових рядах: магістерська робота зі спеціальності 111 Математика. Волинський національний університет імені Лесі Українки. Луцьк. 2024. 47 с.

У цій роботі розглянуто основи фрактальної геометрії, самоподібність у часових рядах, індекс Херста, коробкову розмірність та методи мультифрактального аналізу. Досліджено застосування фрактальних методів для аналізу і прогнозування волатильності фінансових ринків. Робота включає практичний аналіз рядів даних з використанням фрактальних показників, зокрема для акцій та фінансових індексів.

Ключові слова: фрактальний аналіз, самоподібність, часові ряди, індекс Херста, коробкова розмірність, фінансові ринки.

Annotation

Pavlikha V. Yu. Fractal analysis and self-similarity in financial time series: master's thesis on the specialty 111 Mathematics. Lesya Ukrainka Volyn National University. Lutsk. 2024. 47 p.

This thesis explores the fundamentals of fractal geometry, self-similarity in time series, Hurst exponent, box-counting dimension, and methods of multifractal analysis. It investigates the application of fractal methods for analyzing and forecasting financial market volatility. The work includes practical analysis of datasets using fractal indicators, specifically for stocks and financial indices.

Key words: *fractal analysis, self-similarity, time series, Hurst exponent, box-counting dimension, financial markets.*