

УДК 517.5

КОЛМОГОРОВСЬКІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ ТИПУ НІКОЛЬСЬКОГО-БЕСОВА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Оксана Федунік-Яремчук

Волинський національний університет імені Лесі Українки,
fedunyk.o.v@gmail.com

Розглядаються класи $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних [1], де $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$, а ω – задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l , що задовольняє умови (S^α) та (S_l) , які називаються умовами Барі-Стечка [2]. При певному виборі функції Ω класи $B_{p,\theta}^\Omega$ є аналогами відомих класів Нікольського-Бесова $B_{p,\theta}^r$ [3].

Нехай X – деякий нормований функціональний простір з нормою $\|\cdot\|_X$, W – центрально-симетрична множина в просторі X . Величина

$$d_M(W, X) = \inf_{L_M} \sup_{w \in W} \inf_{u \in L_M} \|w - u\|_X,$$

де $L_M \subset X$ є підпростором розмірності M , називається колмогоровським M -поперечником множини W у просторі X .

Одержано точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського-Бесова $B_{p,\theta}^\Omega$ у просторі $B_{q,1}$ у випадках $1 < p = q < \infty$ і $1 \leq q < p \leq \infty$. Зазначимо, що норма у просторі $B_{q,1}$ є більш сильною, ніж L_q -норма [4].

Сформулюємо одержані результати.

Теорема 1. *Нехай $d \geq 2$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$, де ω задовольняє умову (S^α) із деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l) . Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$ таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, виконується співвідношення*

$$d_M(B_{p,\theta}^\Omega, B_{p,1}) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Теорема 2. *Нехай $d \geq 2$, $1 \leq q < p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$, де ω задовольняє умову (S^α) із деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l) . Тоді для будь-яких $M, n \in \mathbb{N}$ таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, виконується співвідношення*

$$d_M(B_{p,\theta}^\Omega, B_{q,1}) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Співставляючи результати теорем 1 та 2 із відповідними оцінками величин $d_M(B_{p,\theta}^\Omega, L_p)$ та $d_M(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$ [1], приходимо до висновку: в багатовимірному випадку (за винятком випадків $\theta = 1$ та $2 < q < p < \infty$) оцінки колмогоровських поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$ у просторах $B_{q,1}$ та L_q є різними за порядком.

Окрім того, в теоремі 2 охоплено низку значень параметрів p, q, θ , для яких колмогоровські поперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ у просторі L_q досі залишаються не дослідженими. Сказане стосується випадків: $1 \leq q < p \leq 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$; $1 \leq q \leq 2 < p \leq \infty$, $1 \leq \theta < 2$.

1. *Yongsheng S., Heping W.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // *Tr. Mat. Inst. Steklova.* – 1997. – Т. 219. – С. 356–377.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // *Тр. Моск. мат. о-ва.* – 1956. – Т. 5. – С. 483–522.
3. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова.* – 1989. – Т. 187. – С. 143–161.
4. *Гембарська С.Б., Романюк І.А., Федунік-Яремчук О.В.* Характеристики лінійної та нелінійної апроксимації класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського-Бесова // *Укр. мат. вісник.* – 2023. – Т. 20, № 2. – С. 161–185.

KOLMOGOROV WIDTHS OF THE NIKOL'SKII-BESOV-TYPE CLASSES OF PERIODIC FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

We study the classes $B_{p,\theta}^\Omega$ of periodic functions of several variables with $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j\right)$, where ω is a given function (of one variable) of the type of a mixed modulus of continuity of the order l , that satisfies the conditions (S^α) and (S_l) , which are called the Bari-Stechkin conditions. For a certain choice of function Ω , the classes $B_{p,\theta}^\Omega$ are analogues of the well-known Nikol'skii-Besov classes $B_{p,\theta}^r$. We obtain exact order estimates of the Kolmogorov widths of the Nikol'skii-Besov-type classes of periodic functions of several variables $B_{p,\theta}^\Omega$ in the space $B_{q,1}$, which norm is stronger than the L_q -norm. In the multidimensional case (except for the cases $\theta = 1$ and $2 < q < p < \infty$) estimates of the Kolmogorov widths of the classes $B_{p,\theta}^\Omega$ in the spaces $B_{q,1}$ and L_q are different in order.