Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра математичного аналізу та статистики

Федуник−Яремчук О.В., Соліч К.В., Бушев Д.М.

Функції обмеженої варіації. Інтеграл Стілтьєса:

методичні вказівки

Луцьк 2024

УДК 517.518.24:517.518.124 (072)

Ф 34

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Волинського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 3 від 22 листопада 2024 року)

Рецензенти:
Гембарська Світлана Борисівна − кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри теорії функцій та методики навчання математики Волинського національного університету імені Лесі Українки
Костючко Сергій Миколайович – кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії та кібербезпеки Луцького національного технічного університету

Ф 34
Федуник−Яремчук О.В., Соліч К.В., Бушев Д.М. Функції обмеженої варіації. Інтеграл Стілтьєса: методичні вказівки з дисципліни "Математичний аналіз" для студентів, які навчаються за спеціальностями: 014 Середня освіта (Математика), 111 Математика/ Оксана Володимирівна Федуник-Яремчук, Катерина Василівна Соліч, Дмитро Миколайович Бушев. Луцьк, 2024. 73 с.

Методичні вказівки призначені для методичного забезпечення лекційних занять та самостійної роботи студентів у рамках курсу ,,Математичний аналіз". Викладено основні теоретичні положення із розділу математичного аналізу "Функції обмеженої варіації та інтеграл Стілтьєса"; також наведені приклади розв'язання типових задач, завдання для самоконтролю та індивідуальні завдання.

Мета розробки – допомогти студентам засвоїти основні поняття і методи математичного аналізу, виробити вміння застосовувати теоретичний матеріал в практичних задачах, підготувати студентів до самостійної роботи з науковою літературою.

УДК 517.518.24:517.518.124 (072)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Дана розробка призначена для методичного забезпечення лекційних занять та самостійної роботи студентів в рамках курсу ,,Математичний аналіз”, що вивчається на факультеті інформаційних технологій і математики.

Методична розробка складається із двох розділів математичного аналізу: функції обмеженої варіації; інтеграл Стілтьєса. В розробці систематизовано теоретичні відомості із вказаних розділів. Викладено основні поняття, теореми, деякі висновки і зауваження, які потрібні для розв’язування задач. Весь матеріал супроводжується розв’язанням типових прикладів. В кінці кожного розділу наведені завдання для самоконтролю. Основну увагу приділено висвітленню алгоритмічного аспекту розглядуваних понять, методів і тверджень.

Методичну розробку можна рекомендувати студентам математичних спеціальностей всіх форм навчання, але вона може бути використана і для студентів інших спеціальностей.

Розділ 1. Функції обмеженої варіації

1.1. Монотонні функції. Властивості монотонних функцій

В цьому пункті розглянемо деякі властивості функцій, монотонних на сегменті $[a;b]$.

Означення 1. Функція $f(x)$, яка визначена на сегменті $[a;b]$, називається неспадною (незростаючою) на цьому сегменті, якщо для будь-яких $x_1 \in [a;b]$, $x_2 \in [a;b]$, які задовольняють умову $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Означення 2. Функція $f(x)$, яка визначена на сегменті $[a;b]$, називається зростаючою (спадною) на цьому сегменті, якщо для будь-яких $x_1 \in [a;b]$, $x_2 \in [a;b]$, які задовольняють умову $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Неспадні, незростаючі, зростаючі, спадні функції називаються монотонними.

Якщо функція $f(x)$ незростаюча, то функція $-f(x)$ – неспадна. Завдяки цьому далі будемо розглядати лише неспадні функції.

Нехай функція $f(x)$ є неспадною на $[a;b]$, тоді в кожній точці $x \in (a;b)$ існують лівостороння і правостороння границі функції

$$f(x-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} f(x+\Delta x),$$

$$f(x+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} f(x+\Delta x).$$

На кінцях сегмента $[a;b]$ існують $f(a+0)$ і $f(b-0)$. Звідси випливає, що всі точки розриву монотонної функції є точками розриву першого роду, а саме точками стрибка.

Різницю $f(x+0)-f(x-0)$ називають стрибком функції в точці x, різницю $f(x+0)-f(x)$ називають стрибком функції в точці x справа; а $f(x)-f(x-0)$ називають стрибком функції в точці x зліва.

Якщо точка x_0 є точкою розриву неспадної функції, то $f(x_0-0)\le f(x_0+0)$. Тоді кожній точці розриву x_0 можна поставити у відповідність інтервал $\big(f(x_0-0); f(x_0+0)\big)$. В кожному з цих інтервалів виберемо деяке раціональне число. Оскільки для неспадної функції побудовані інтервали не перетинаються, то неспадна функція має точок розриву не більше, ніж раціональних чисел. Це означає, що монотонна функція має скінченну або зліченну кількість точок розриву.

Теорема 1. Якщо $f(x)$ – неспадна (зростаюча) функція на сегменті $[a;b]$, то які б не були точки $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a;b)$, має місце нерівність:

$$f(a+0)-f(a)+\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k+0)-f(x_k-0)\big)+f(b)-f(b-0)\le$$
$$\le f(b)-f(a). \qquad (1)$$

Доведення.

Не втрачаючи загальності, вважаємо, що

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b.$$

Покладемо $a=x_0$; $b=x_{n+1}$. На кожному з інтеравалів $(x_k;\ x_{k+1})$, $k=\overline{0,n}$ виберемо точку $y_k\in(x_k;\ x_{k+1})$. Оскільки $f(x)$ – неспадна, то при такому виборі точок y_k виконується:

$$\left\{\begin{array}{c} f(a+0)-f(a)\le f(y_0)-f(a),\\ f(x_1+0)-f(x_1-0)\le f(y_1)-f(y_0),\\ f(x_2+0)-f(x_2-0)\le f(y_2)-f(y_1),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f(x_n+0)-f(x_n-0)\le f(y_n)-f(y_{n-1}),\\ f(b)-f(b-0)\le f(b)-f(y_n). \end{array}\right. \qquad (*)$$

Додавши почленно всі нерівності $(*)$, одержимо (1).

Теорему доведено.

Зазначимо, що нерівності (1) виконуються для довільної скінченної кількості точок x_k, $k = \overline{1,n}$. Шляхом граничного переходу при $n \to \infty$ можна переконатись, що ця нерівність має місце і для зліченної кількості точок. Оскільки для монотонної функції множина точок розриву є не більше, ніж зліченною, то позначивши точки розриву через $x_1, x_2, \ldots$ нерівність (1) можна переписати у вигляді:

$$f(a+0) - f(a) + \sum_k \big(f(x_k+0) - f(x_k-0)\big) + f(b) - f(b-0) \leq$$
$$\leq f(b) - f(a). \qquad (2)$$

В нерівності (2) x_k – точки розриву і в $\sum_k \ldots$ не включені кінці відрізка. Далі будемо використовувати суму

$$\sum_{x_k<x} \ldots \quad .$$

Цей запис означає, що підсумовування проводиться для всіх точок розриву x_k, які менші за фіксовану точку x.

Для неспадної функції $f(x)$ розглянемо наступну функцію:

$S(x) =$

$$= \begin{cases} 0, & x = a, \\ f(a+0) - f(a) + \sum\limits_{x_k<x} \big(f(x_k+0) - f(x_k-0)\big) + f(x) - f(x-0), & \\ & a < x \leq b. \end{cases}$$

$S(x)$ називається функцією стрибків неспадної функції $f(x)$. Точки $x_1, x_2, \ldots$ – точки розриву функції $f(x)$, які відмінні від точок a та b.

Функція $S(x)$ є монотонно неспадною і кусково – сталою на $[a; b]$.

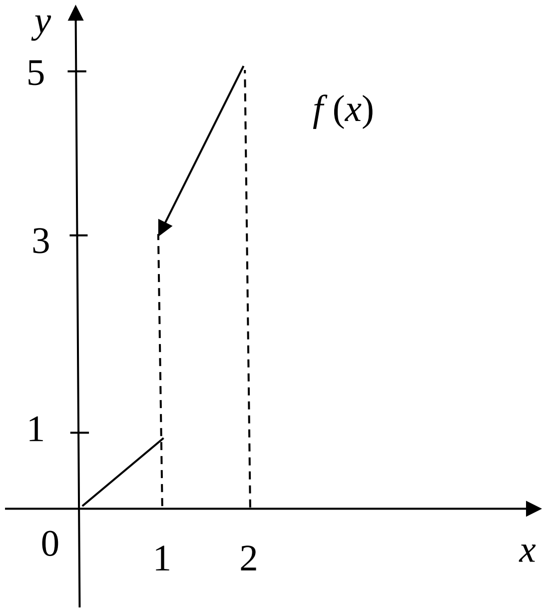
Приклад 1. Для функції

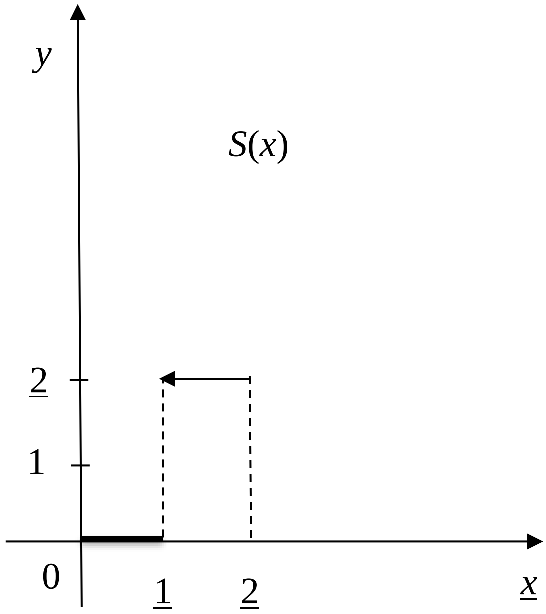
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 1], \\ 2x + 1, & x \in (1; 2], \end{cases}$$

знайти функцію стрибків.

Розв'язання.

Будемо мати, що $S(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1], \\ 2, & x \in (1;2]. \end{cases}$





Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неспадна на сегменті $[a;b]$ і $S(x)$ – її функція стрибків, то функція $\varphi(x) = f(x) - S(x)$ є монотонно неспадною і неперервною на $[a;b]$.

Доведення.

Нехай $a \leq x < y \leq b$. Застосуємо нерівності (2) на сегменті $[x;y]$. Одержимо

$$S(y) - S(x) \leq f(y) - f(x). \tag{3}$$

Звідси $f(x) - S(x) \leq f(y) - S(y)$, тобто $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. Отже, функція φ є неспадною.

Доведемо, що φ є неперервною. В нерівності (3) перейдемо до границі при $y \to x$ і $y > x$. Одержимо:

$$S(x+0) - S(x) \leq f(x+0) - f(x).$$

Тобто

$$f(x) - S(x) \leq f(x+0) - S(x+0).$$

Звідси маємо

$$\varphi(x) \leq \varphi(x+0). \qquad (4)$$

З іншого боку, згідно означення функції $S(x)$ будемо мати:

$$f(x+0) - f(x) \leq S(y) - S(x).$$

Перейдемо до границі при $y \to x$ і $y > x$:

$$f(x+0) - f(x) \leq S(x+0) - S(x).$$

Тобто

$$f(x+0) - S(x+0) \leq f(x) - S(x).$$

Таким чином,

$$\varphi(x+0) \leq \varphi(x). \qquad (5)$$

З нерівностей (4) і (5) випливає, що $\varphi(x) = \varphi(x+0)$. Аналогічно можна довести, $\varphi(x) = \varphi(x-0)$. Отже, φ є неперервною.

Теорему доведено.

Наслідок. Будь-яку монотонну функцію можна подати у вигляді

$$f(x) = \varphi(x) + S(x),$$

де $S(x)$ – функція стрибків функції $f(x)$, $\varphi(x)$ – монотонна і неперервна функція.

Приклад 2. Довести, що якщо функція $f(x)$ визначена і монотонна на $[a;b]$ і приймає всі значення із $[\inf\limits_{x\in[a;b]} f(x); \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)]$, то вона неперервна на $[a;b]$.

Розв'язання.

Нехай для означеності $f(x)$ зростає на $[a;b]$. Тоді $\inf\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(a)$, $\sup\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(b)$. Припустимо, що $f(x)$ розривна в точці $c \in [a;b]$. Тоді хоча б в одному із інтервалів $\big(f(c-0); f(c)\big)$, $\big(f(c); f(c+0)\big)$ осі Oy

немає значень функції. Але це означає, що $f(x)$ приймає не всі значення із $[f(a); f(b)]$.

Отже, якщо $f(x)$ зростає на $[a; b]$ і приймає на цьому сегменті в якості своїх значень всі числа із $[f(a); f(b)]$, то вона неперервна на $[a; b]$.

Випадок спадної функції аналогічний до розглянутого вище.

Приклад 3. Нехай на множині $E \subset [a; b]$ задана необмежена функція $f(x)$ така, що $f(x_1) \leq (x_2)$ для будь-яких $x_1 \in E,\ x_2 \in E$. Чи можна її доозначити на весь сегмент $[a; b]$ так, щоб вона була монотонною на всьому сегменті $[a; b]$?

Розв'язання.

Не можна. Якщо, наприклад, $f(x)$ не обмежена зверху, то вона не визначена в точці b. В супротивному випадку скрізь на множині E виконувалася б нерівність $f(x) \leq (b)$. Але тоді й доозначити її в точці b із збереженням монотонності не можна.

Якщо ж $f(x)$ не обмежена знизу, то її не можна доозначити в точці a із збереженням монотонності.

Приклад 4. Дано дві функції: $\varphi(t) -$ неспадна на $[a; b]$, $f(x) -$ монотонна на $[A; B]$. $A = \varphi(a), B = \varphi(b)$. $\varphi(t) -$ розривна в точці $t_0 \in [a; b]$. Чи обов'язково складна функція $f(\varphi(t))$ буде розривною в точці t_0?

Розв'язання.

Не обов'язково. Розглянемо функції

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & t \in [0; \frac{1}{2}), \\ 2t, & t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\left[0;\frac{1}{2}\right],\\ \frac{1}{2}, & x\in\left(\frac{1}{2};1\right),\\ \frac{1}{2}x, & x\in[1;2]. \end{cases}$$

Тоді $f\big(\varphi(t)\big)\equiv t,\ \ t\in[0;1]$.

Якщо ж $f(x)$ строго монотонна, а $\varphi(t)$ розривна в точці $t_0\in[a;b]$, то складна функція $f\big(\varphi(t)\big)$ обов'язково розривна в точці t_0.

Приклад 5. Чи може сума двох монотонних функцій бути не монотонною? Чи може добуток двох монотонних функцій бути не монотонною функцією?

Розв'язання.

Якщо дві функції або зростають (не спадають), або спадають (не зростають), то їх сума завжди буде монотонною функцією.

Але якщо одна функція зростає (не спадає), а інша - спадає (не зростає), то сума не буде монотонною.

Наприклад, $f(x)=x$, $g(x)=-x^2$ монотонні на $[0;1]$. Але

$$\varphi(x)=f(x)+g(x)=x-x^2$$

не є монотонною функцією на $[0;1]$.

Добуток двох монотонних функцій також може бути не монотонною функцією.

Наприклад, $f(x)=x$, $g(x)=x-1$ монотонні на $[0;1]$. Але

$$\psi(x)=f(x)\cdot g(x)=x(x-1)$$

не є монотонною функцією на $[0;1]$.

Приклад 6. Побудувати приклад строго монотонної функції, що визначена на всій числовій прямій і розривна у всіх раціональних точках і лише в цих точках.

Розв'язання.

Нехай $r_1, r_2, r_3, \ldots -$ раціональні точки числової прямої $\mathbb{R}$, занумеровані довільним чином. Побудуємо функцію

$$f(x) = \sum_{r_k<x} \frac{1}{2^k},$$

де підсумовування проводиться по всіх k, для яких $r_k < x$.

Ця функція визначена для всіх $x \in \mathbb{R}$, оскільки ряд $\sum_{r_k<x} \frac{1}{2^k}$ завжди збіжний.

Вона строго зростає, оскільки для будь-яких дійсних чисел $x_1 < x_2$ знайдеться раціональне число r_{k_0} таке, що $x_1 < r_{k_0} < x_2$.

Звідси

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{1}{2^{k_0}} > f(x_1).$$

Ця функція розривна в кожній раціональній точці r_n. Дійсно,

$$f(x) = \sum_{r_k<x} \frac{1}{2^k} = \sum_{r_k<r_n} \frac{1}{2^k} + \sum_{r_n \leq r_k < x} \frac{1}{2^k} >$$

$$> \sum_{r_k<r_n} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^n} = f(r_n) + \frac{1}{2^n}.$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $x \to r_n + 0$, отримаємо:

$$f(r_n + 0) \geq f(r_n) + \frac{1}{2^n}.$$

Отже, в кожній точці функція $f(x)$ розривна справа і її стрибок справа

$$f(r_n + 0) - f(r_n) \geq \frac{1}{2^n}.$$

Доведемо, що $f(x)$ не має розривів у інших точках і що в раціональних точках r_n стрибки рівні $\frac{1}{2^n}$.

Це випливає із наступних міркувань.

Для монотонно зростаючої функції різниця верхньої і нижньої межі більша або рівна сумі S усіх стрибків. Але

$$\sup_x f(x) = \sum_k \frac{1}{2^k} = 1; \quad \inf_x f(x) = 0.$$

Звідси $S \leq 1$. З іншого боку, сума усіх стрибків більша або рівна сумі правих стрибків в точках r_n.Тому

$$S \geq \sum_n \frac{1}{2^n} = 1.$$

Звідси $S = 1$. Тобто інших стрибків, ніж стрибки справа в точках r_n немає. При цьому в самих точках r_n стрибки рівні $\frac{1}{2^n}$ (в супротивному випадку було б, що $S > 1$).

Це означає, що в інших точках функція неперервна.

1.2. Функції обмеженої варіації. Основні властивості

Нехай на сегменті $[a;b]$ задана функція $f(x)$. Розглянемо довільне розбиття T сегмента $[a;b]$ точками

$$T\colon\ x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Утворимо суми:

$$V = V(T) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|. \qquad (1)$$

Означення 1. Якщо множина сум виду (1) є обмеженою зверху, то функція $f(x)$ називається функцією обмеженої варіації на сегменті $[a;b]$, а точна верхня межа по всіх розбиттях T сум (1) називається повною варіацією функції $f(x)$ на $[a;b]$ і позначається

$$\bigvee_a^b f = \sup_T V(T).$$

Множину функцій з обмеженою варіацією на сегменті $[a;b]$ позначають $BV([a;b])$.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ монотонна на сегменті $[a;b]$, то $f(x)$ є функцією обмеженої варіації на сегменті $[a;b]$ і

$$\bigvee_a^b f = |f(b) - f(a)|.$$

Доведення.

Нехай $f(x)$ – неспадна. Тоді для довільного розбиття

$$T:\ x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

виконується: $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = f(x_{k+1}) - f(x_k)$.

Тому

$$V(T) = f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1}) =$$
$$= f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ на $[a;b]$ є диференційовною і має обмежену похідну, то $f(x)$ є функцією обмеженої варіації на сегменті $[a;b]$.

Доведення.

Згідно з умовою теореми існує стала $M > 0$, така що $|f'(x)| \leq M$, де $x \in [a;b]$. Розглянемо довільне розбиття T сегмента $[a;b]$ точками

$$T:\ x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

На кожному з утворених сегментів $[x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, до функції $f(x)$ застосуємо теорему Лагранжа про скінченні прирости

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(c_k)(x_{k+1} - x_k), \text{ де } c_k \in (x_k;\ x_{k+1}).$$

Тоді

$$V(T) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} |f'(c_k)| \cdot |x_{k+1} - x_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| = M(b-a).$$

Одержали, що множина сум $V(T)$ обмежена зверху числом $M(b-a)$.

Теорему доведено.

Постає питання: чи кожна неперервна функція є функцією обмеженої варіації? Виявляється, що ні. Наведемо приклади.

Приклад 1. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & x \neq 0, \end{cases}$$

не є функцією з обмеженою варіацією.

Розв'язання.

Ця функція є неперервною на сегменті $[0; 1]$. Розглянемо при кожному $n \in \mathbb{N}$ наступне розбиття сегмента $[0; 1]$

$$T: 0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n-2} < \cdots < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1.$$

Маємо

$$f(0) = 0,$$

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\cos\pi n = \frac{(-1)^n}{2n},$$

$$f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{2}\pi = \frac{1}{2n-1} \cdot 0 = 0,$$

$$f\left(\frac{1}{2n-2}\right) = \frac{1}{2n-2}\cos\pi(n-1) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\cos 2\pi = \frac{1}{4},$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2} = 0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\pi = -\frac{1}{2},$$

$$f(1) = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Знайдемо тепер

$$V(T) = \sum_{k=0}^{2n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|.$$

Маємо, що

$$\left|f\left(\frac{1}{2n}\right) - f(0)\right| = \left|\frac{(-1)^n}{2n} - 0\right| = \frac{1}{2n},$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2n-1}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = \frac{1}{2n},$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2n-2}\right) - f\left(\frac{1}{2n-1}\right)\right| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-2} - 0\right| = \frac{1}{2n-2},$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2n-3}\right) - f\left(\frac{1}{2n-2}\right)\right| = \left|0 - \frac{(-1)^{n-1}}{2n-2}\right| = \frac{1}{2n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left|f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \left|0 - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4},$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|-\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2},$$

$$\left|f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|0 + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$V(T) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \cdots + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots\cdots + \frac{1}{2} + 1 \to +\infty, \text{ якщо } n \to +\infty.$$

Тобто $V(T)$ є частинною сумою розбіжного гармонійного ряду. Розглянута неперервна функція $f(x)$ не є функцією з обмеженою варіацією.

Приклад 2. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{\pi}{x}, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0;1]$.

Розв'язання.

Дійсно, для довільного $n \geq 1$ розглянемо наступне розбиття сегмента $[0;1]$

$$T:\ 0 < \frac{1}{\frac{1}{2} + 2n} < \frac{1}{\frac{1}{2} + (2n-1)} < \frac{1}{\frac{1}{2} + (2n-2)} < \cdots < \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} < 1.$$

Маємо

$$V(T) = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2n} + \sum_{k=2}^{2n} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + (k-1)} + \frac{1}{\frac{1}{2} + k} \right) + \frac{2}{3}\ .$$

Тому $V(T) \to +\infty, n \to \infty$, як частинна сума розбіжного ряду.

Зауважимо, що в останньому прикладі функція $f(x)$ також є неперервною на сегменті $[0;1]$, але не є функцією обмеженої варіації на цьому сегменті.

Приклад 3. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0;1]$.

Розв'язання.

При довільному $n \geq 1$ розглянемо наступне розбиття сегмента $[0;1]$

$$T:\ x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} = 1,$$

де $x_{2k} \in \mathbb{Q}$, $x_{2k+1} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, , $k = 0, \dots, n-1$.

Маємо:

$$V(T) = \sum_{k=0}^{2n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = 2n \to +\infty, \qquad \text{якщо } n \to +\infty.$$

Властивості варіації

1. $\bigvee_a^b f \geq 0$. Це випливає із означення.

2. $|f(b) - f(a)| \leq \bigvee_a^b f$.

Дійсно, якщо розглянути розбиття T, яке складається з двох точок a та b, то зліва в нерівності маємо вираз $V(T)$, а справа в нерівності маємо $\sup_T V(T)$.

Теорема 3. Функція обмеженої варіації є обмеженою.

Доведення.

Нехай $f(x)$ − функція обмеженої варіації на сегменті $[a; b]$. Нехай $a < x < b$, тоді точки a, x, b утворюють розбиття $[a; b]$. Будемо мати

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq$$

$$\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq$$

$$\leq |f(a)| + V(T) \leq |f(a)| + \bigvee_a^b f.$$

Теорему доведено.

Приклад 4. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \in (0; 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0; 1]$.

Розв'язання.

Оскільки функція $f(x)$ необмежена на сегменті $[0; 1]$, то маємо, що $f(x)$ не є функцією обмеженої варіації на цьому сегменті.

Теорема 4. Нехай $f(x), g(x)$ − функції обмеженої варіації на сегменті $[a; b]$. Тоді функції:

1) $cf(x),\ c \in \mathbb{R}$,
2) $f(x) + g(x)$,
3) $f(x) - g(x)$,
4) $f(x) \cdot g(x)$,
5) $\frac{f(x)}{g(x)}, |g(x)| \geq K > 0$,

також будуть функціями обмеженої варіації на сегменті $[a; b]$.

Доведення

1) Нехай $f(x) -$ функція обмеженої варіації на сегменті $[a; b]$. Розглянемо довільне розбиття T сегмента $[a; b]$ точками

$$T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Складемо суму:

$$V = V(T) = \sum_{k=0}^{n-1} |cf(x_{k+1}) - cf(x_k)| =$$

$$= |c| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq |c| \cdot \bigvee_a^b f.$$

Права частина останньої нерівності не залежить від розбиття T. Це означає, що множина сум $V(T)$ є обмеженою зверху. Тобто $cf(x) -$ функція обмеженої варіації на сегменті $[a; b]$.

2) Нехай $f(x), g(x) -$ функції обмеженої варіації на сегменті $[a; b]$. Тоді для довільного розбиття T сегмента $[a; b]$ точками

$$T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

виконується

$$V = V(T) = \sum_{k=0}^{n-1} |(f(x_{k+1}) + g(x_{k+1})) - (f(x_k) + g(x_k))| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \le \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g.$$

При всіх розбиттях T сума $V(T)$ обмежена зверху. Отже, $f(x) + g(x)$ – функція обмеженої варіації на сегменті $[a; b]$.

3) Аналогічно, як і у попередньому випадку маємо, що

$$V = V(T) = \sum_{k=0}^{n-1} |(f(x_{k+1}) - g(x_{k+1})) - (f(x_k) - g(x_k))| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \le \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g.$$

Тобто, $f(x) - g(x)$ – функція обмеженої варіації на сегменті $[a; b]$.

4) Нехай $f(x), g(x)$ – функції обмеженої варіації на $[a; b]$. Тоді, згідно з попередньою теоремою, ці функції обмежені на сегменті $[a; b]$. Тобто існують сталі $M_1 > 0, M_2 > 0$ такі, що при всіх $x \in [a; b]$ виконуються нерівності $|f(x)| \le M_1$, $|g(x)| \le M_2$.

Розглянемо довільне розбиття T сегмента $[a; b]$ точками

$$T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Складемо суму:

$$V = V(T) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_{k+1}) + f(x_k)g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}(|g(x_{k+1})|\cdot|f(x_{k+1})-f(x_k)|+|f(x_k)|\cdot|g(x_{k+1})-g(x_k)|) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}|g(x_{k+1})|\cdot|f(x_{k+1})-f(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1}|f(x_k)|\cdot|g(x_{k+1})-g(x_k)| \le$$

$$\le M_2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)| + M_1 \cdot \sum_{k=0}^{n-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)| \le$$

$$\le M_2 \bigvee_a^b f + M_1 \bigvee_a^b g.$$

Ми одержали, що

$$V(T) \le M_2 \bigvee_a^b f + M_1 \bigvee_a^b g.$$

Знову права частина останньої нерівності не залежить від розбиття T. Це означає, що множина сум $V(T)$ є обмеженою зверху. Тобто $f(x)\cdot g(x)$ – функція обмеженої варіації на сегменті $[a;b]$.

5). Нехай $f(x), g(x)$ − функції обмеженої варіації на сегменті $[a;b]$. І нехай $|g(x)| \ge L > 0$. згідно із теоремою 3 функції $f(x), g(x)$ − обмежені, тому існують сталі $M_1 > 0, M_2 > 0$ такі, що при всіх $x \in [a;b]$ виконуються нерівності $|f(x)| \le M_1$, $|g(x)| \le M_2$.

Нехай T – довільне розбиття сегмента $[a;b]$. Для суми $V = V(T)$ матимемо:

$$V = V(T) = \sum_{K=0}^{n-1}\left|\frac{f(x_{k+1})}{g(x_{k+1})} - \frac{f(x_k)}{g(x_k)}\right| = \sum_{K=0}^{n-1}\frac{|f(x_{k+1})g(x_k) - f(x_k)g(x_{k+1})|}{|g(x_{k+1})g(x_k)|} \le$$

$$\le \frac{1}{L^2}\sum_{K=0}^{n-1}|f(x_{k+1})g(x_k) - f(x_k)g(x_k) + f(x_k)g(x_k) - f(x_k)g(x_{k+1})| \le$$

$$\leq \frac{1}{L^2}\left(\sum_{K=0}^{n-1}|g(x_k)|\cdot|f(x_{k+1})-f(x_k)|+\sum_{K=0}^{n-1}|f(x_k)|\cdot|g(x_{k+1})-g(x_k)|\right)\leq$$

$$\leq \frac{1}{L^2}\left(M_2\sum_{K=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|+M_1\sum_{K=0}^{n-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)|\right)\leq$$

$$\leq \frac{1}{L^2}\left(M_2\bigvee_a^b f+M_1\bigvee_a^b g\right).$$

Отже, при всіх розбиттях T сума $V(T)$ обмежена зверху, а значить $\frac{f(x)}{g(x)}$ – функція обмеженої варіації на сегменті $[a; b]$.

Теорему доведено.

Теорема 5. Якщо $f(x)$ – функція обмеженої варіації на сегменті $[a; b]$, то при кожному $c \in (a, b)$ функція $f(x)$ має обмежену варіацію на кожному із сегментів $[a; c], [c; b]$. При цьому має місце рівність:

$$\bigvee_a^b f=\bigvee_a^c f+\bigvee_c^b f \qquad (2)$$

Доведення.

Розглянемо довільні розбиття T_1, T_2 сегментів $[a; c]$ і $[c; b]$. Нехай

$$T_1: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=c,$$

$$T_2: c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_m=b,$$

$$x_n=y_0=c.$$

Точки x_i та y_j утворюють розбиття сегмента $[a; b]$, яке позначимо через T.

$$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=c<y_1<y_2<\cdots<y_m=b.$$

Внаслідок цього для відповідних сум виду (1) на кожному із сегментів $[a; c]$ і $[c; b]$ буде виконуватись рівність $V(T)=V(T_1)+V(T_2)$, з якої випливає:

$$V(T) \le \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

Перейшовши в останній нерівності до $\sup\limits_T$, отримаємо:

$$\bigvee_a^b f \le \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f. \qquad (*)$$

З іншого боку маємо, що:

$$V(T_1) + V(T_2) \le \bigvee_a^b f. \qquad (**)$$

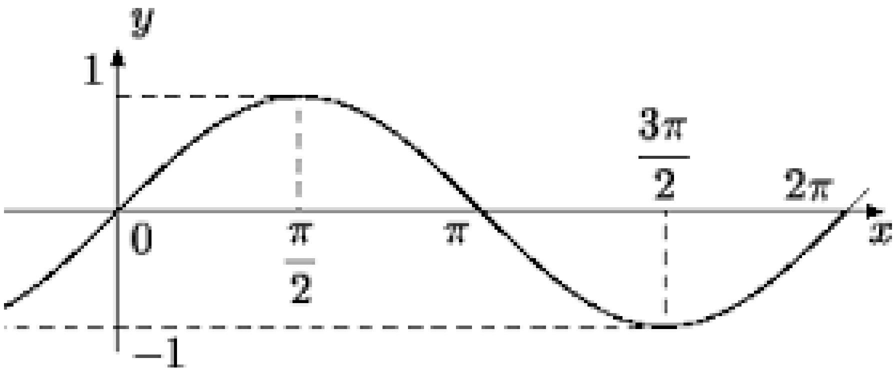
З нерівностей $(*)$ та $(**)$ випливає (2).

Теорему доведено.

Рівність (2) використовують для знаходження варіації функції на сегменті. При цьому, враховуючи формулу (2) і теорему 1, при обчисленні варіації функції весь сегмент слід розбити на частини, на кожній з яких функція є монотонною.

Приклад 5. Знайти варіацію функції $f(x) = \sin x$ на сегменті $[0; 2\pi]$.

Розв'язання.



$$\bigvee_0^{2\pi} \sin x = \bigvee_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x + \bigvee_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x + \bigvee_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin x = \left|\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right| +$$

$$+\left|\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right|+\left|\sin 2\pi-\sin\frac{3\pi}{2}\right|=$$

$$=|1-0|+|-1-1|+|0-(-1)|=1+2+1=4.$$

Приклад 6. Знайти варіацію функції

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0;\ 1),\\ -1, & x=1.\end{cases}$$

Розв'язання.

Виберемо деяку точку $c\in(0,1)$. Матимемо, що

$$\bigvee_0^1 f=\bigvee_0^c f+\bigvee_c^1 f\ =c+\ \bigvee_c^1 f.$$

В останній рівності здійснимо граничний перехід при $c\to 1-0$. Отримаємо:

$$\bigvee_0^1 f=1+|-1-1|=3.$$

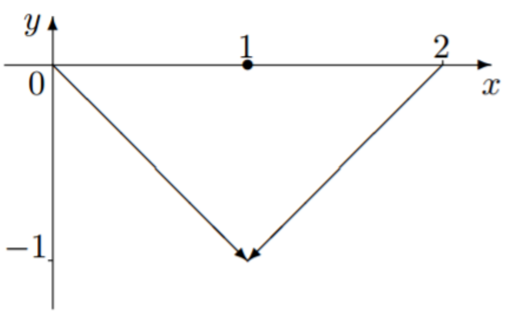
В загальному випадку, якщо $f(x)$ – монотонна на інтервал $(a;b)$, то

$$\bigvee_a^b f=|f(a+0)-f(a)|+|f(b-0)-f(a+0)|+|f(b)-f(b-0)|.$$

Приклад 7. Знайти варіацію функції $f(x)$ на сегменті $[0;2]$, де

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=1,\\ |x-1|-1, & x\in[0;\ 1)\cup(1;2].\end{cases}$$

Розв'язання.



Враховуючи, що функція $f(x)$ спадає на $[0;1)$ і зростає на $(1;2]$, маємо:

$$\bigvee_0^2 f=\bigvee_0^1 f+\bigvee_1^2 f=$$

$$= 0 + |-1 - 0| + |0 - (-1)| + |-1 - 0| + |0 - (-1)| + 0 =$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

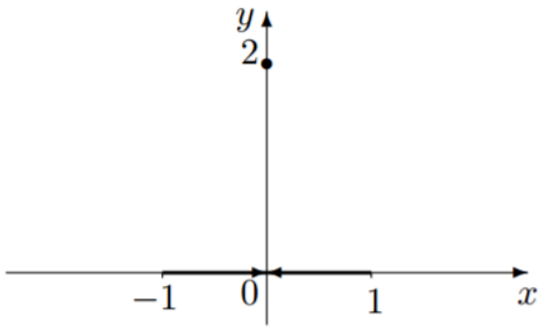
Приклад 8. Знайти варіацію функції

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;\ 0) \cup (0; 1], \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

на сегменті $[-1, 1]$.

Розв'язання.

Зобразимо графік функції.



I спосіб.

З графіка функції $f(x)$, враховуючи геометричне тлумачення варіації, бачимо, що

$$\bigvee_{-1}^{1} f = 4.$$

Формальне доведення рівності випливає із означення варіації. Для цього, згідно із означенням точної верхньої межі, достатньо показати, що:

1) для кожного розбиття T сегмента $[-1; 1]$ виконується нерівність $V(T) \le 4$;

2) існує таке розбиття T_0, для якого $V(T_0) = 4$.

Таким чином:

1) Розглянемо довільне розбиття сегмента $[-1; 1]$

$$T : x_0 = -1 < x_1 < \ldots < x_n = 1 .$$

Якщо точка $0 \notin T$, то

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = |0 - 0| = 0,\ k \in \overline{0; n-1},$$

тому $V(T) = 0 \le 4$.

Якщо ж точка $0 \in T$, то $x_j = 0$ для деякого $j \in \overline{1; n-1}$. Тоді маємо, що

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \begin{cases} 0, & k \in \{0, \ldots, n-1\} \setminus \{j-1, j\}, \\ 2, & k \in \{j-1, j\}. \end{cases}$$

Тому $V(T) = 4$. Отже, $V(T) \leq 4$ для довільного розбиття T.

2) Розглянемо довільне розбиття

$$T_0: \; x_0 = -1 < x_1 = 0 < x_2 = 1 .$$

Тоді

$$V(T_0) = |f(0) - f(-1)| + |f(1) - f(0)| = 4.$$

Звідси випливає, що

$$\bigvee_{-1}^{1} f = \sup_T V(T) = 4.$$

II спосіб.

Оскільки функція $f(x)$ є монотонною на кожному з сегментів $[-1;\ 0]$ та $[0;\ 1]$, то

$$\bigvee_{-1}^{0} f = |f\,(0) - f(-1)| = 2, \qquad \bigvee_{0}^{1} f = |f\,(1) - f(0)| = 2,$$

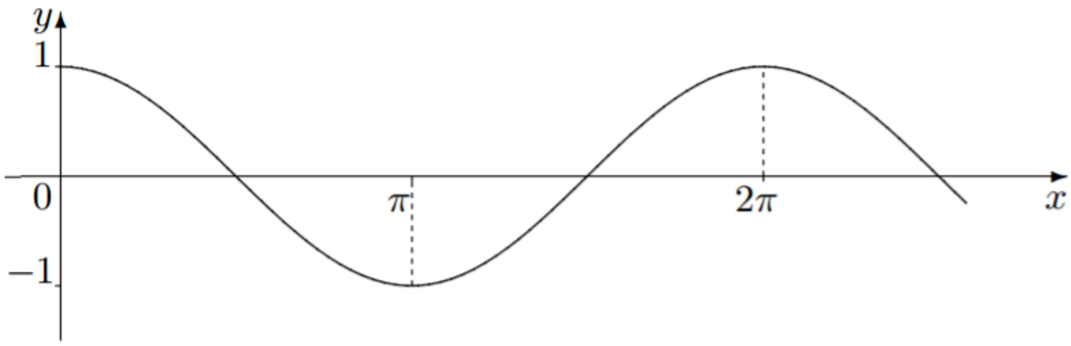
З властивості адитивності варіації слідує, що

$$\bigvee_{-1}^{1} f = \bigvee_{-1}^{0} f + \bigvee_{0}^{1} f = 4.$$

Приклад 9. Знайти варіацію функції $f(x) = \cos x$ на сегменті $[0, 100\pi]$.

Розв'язання.

Зобразимо частину графіка функції при $x \in [0; 2\,\pi]$.



Функція $f(x)$ монотонна на кожному із сегментів $[\pi k;\ \pi\ +\ \pi k]$, $k = \overline{0;99}$, при цьому

$$\bigvee_{\pi k}^{\pi+\pi k} f\ =\ |f(\pi(k\ +\ 1))\ -\ f(\pi k)| = |(-1)^{k+1}\ -\ (-1)^{k}\ |\ =\ 2.$$

Користуючись адитивністю варіації, одержуємо:

$$\bigvee_{0}^{100\pi} f = \sum_{k=0}^{99}\ \bigvee_{\pi k}^{\pi+\pi k} f\ =\ 2\ \cdot\ 100\ =\ 200.$$

Геометричне тлумачення варіації.

Варіація функції $f(x)$ на сегменті $[a;b]$ дорівнює довжині шляху, що проходить проекція точки P на вісь Oy, якщо точка P рухається по графіку функції $f(x)$ від точки $(a,f(a))$ до точки $(b,f(b))$, причому довжина вертикальних відрізків, що сполучають точки $(x_0,f(x_0))$ та $(x_0,f(x_0+0))$, де x_0 – точка стрибка функції $f(x)$, теж враховуються.

Приклад 10. Функція $f(x)$ має обмежену варіацію на сегменті $[0;1]$. Довести, що функція $F(x) = f(ax+b), a > 0$, має обмежену варіацію на сегменті $\left[-\frac{b}{a};\ \frac{1-b}{a}\right]$, причому

$$\bigvee_{0}^{1} f = \bigvee_{-\frac{b}{a}}^{\frac{1-b}{a}} F.$$

Розв’язання.

Припустимо, що функція $F(x) = f(ax+b)$ має необмежену варіацію на $\left[-\frac{b}{a}; \frac{1-b}{a}\right]$. Тоді для будь-якого $M \in \mathbb{N}$ можна знайти розбиття сегмента $\left[-\frac{b}{a}; \frac{1-b}{a}\right]$ точками

$$T: \ y_0 = -\frac{b}{a} < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = \frac{1-b}{a}$$

таке, що

$$\sum_{k=0}^{n-1} |F(y_{k+1}) - F(y_k)| > M.$$

Розіб'ємо тепер сегмент $[0; 1]$ точками $x_k = ay_k + b$, $k = \overline{0; n}$.

Тоді

$$V(T) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} |f(ay_{k+1} + b) - f(ay_k + b)| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} |F(y_{k+1}) - F(y_k)| > M.$$

Отже, якби $F(x)$ мала необмежену варіацію на $\left[-\frac{b}{a}; \frac{1-b}{a}\right]$, то і $f(x)$ також мала б необмежену варіацію на $[0; 1]$.

Звідси випливає, що $F(x)$ має обмежену варіацію на $\left[-\frac{b}{a}; \frac{1-b}{a}\right]$ і

$$\sup_T V(T) = \bigvee_0^1 f = \bigvee_{-\frac{b}{a}}^{\frac{1-b}{a}} F.$$

Приклад 11. Нехай неперервна на сегменті $[a; b]$ функція $f(x)$ має похідну $f'(x)$ на цьому сегменті за винятком скінченної множини точок і $f'(x)$ інтегровна за Ріманом на $[a; b]$. Довести, що $f(x)$ є функцією обмеженої варіації на $[a; b]$ і

$$\bigvee_a^b f = \int_a^b |f'(x)|dx.$$

Розв’язання.

1) Розглянемо довільне розбиття сегмента $[a;b]$ T: $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

Покажемо, що $V(T) \leq \int_a^b |f\,'(x)|dx$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що розбиття T містить точки, в яких не існує похідна f'. Використовуючи формулу Ньютона – Лейбніца, адитивність інтеграла Рімана та відповідні нерівності для інтеграла, маємо:

$$V(T) = \sum_{k=0}^{n-1} |f\,(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f\,'(x)|dx = \int_a^b |f\,'(x)|dx.$$

2) Для кожного $k \in \overline{0, n-1}$ за теоремою Лагранжа існує така точка $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, що $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = |f'(\xi_k)|(x_{k+1} - x_k)$.

Внаслідок теореми Дарбу одержимо:

$$V(T) = \sum_{k=0}^{n-1} |f'(\xi_k)|\Delta x_k \to \int_a^b |f'(x)|dx\,, \qquad \lambda(T) \to 0\,.$$

Теорема 6 (теорема Жордана про структуру функції обмеженої варіації). Для того, щоб функція $f(x)$ була функцією обмеженої варіації на сегменті $[a;b]$, необхідно і достатньо, щоб її можна було представити у вигляді різниці двох монотонно неспадних на $[a;b]$ функцій.

Доведення.

Необхідність. Нехай $f(x) = g(x) - h(x)$, де $g(x), h(x)$– монотонно неспадні функції на сегменті $[a;b]$. Внаслідок теореми 1 , функції $g(x)$ та $h(x)$ – це функції обмеженої варіації на сегменті $[a;b]$, але тоді і різниця $g(x) - h(x)$, згідно із теоремою 4, також буде функцією обмеженої варіації на сегменті $[a;b]$.

Достатність. Нехай $f(x)$ − функція обмеженої варіації на сегменті $[a;b]$. Розглянемо функцію

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = a, \\ \bigvee_a^x f, & x \in (a,b]. \end{cases}$$

Покажемо, що функція $g(x)$ є монотонно неспадною на сегменті $[a;b]$. Нехай $a \le x < y \le b$. Тоді

$$g(y) = \bigvee_a^y f = \bigvee_a^x f + \bigvee_x^y f.$$

Так як $\bigvee_x^y f \geq 0$, то

$$g(y) \geq \bigvee_a^x f = g(x).$$

Тобто для всіх $x < y$, виконується нерівність $g(x) \le g(y)$. Розглянемо функцію

$$h(x) = g(x) - f(x). \qquad (*)$$

Покажемо, що функція $h(x)$ також монотонно неспадає на сегменті $[a;b]$. Маємо:

$$h(y) = g(y) - f(y) = \left(\bigvee_a^x f + \bigvee_x^y f\right) - f(y) = g(x) - f(y) + \bigvee_x^y f.$$

Звідси слідує, що

$$h(y) - h(x) = g(x) - f(y) + \bigvee_x^y f - g(x) + f(x) = f(x) - f(y) + \bigvee_x^y f.$$

Оскільки

$$\bigvee_x^y f \geq |f(y) - f(x)| \geq f(y) - f(x),$$

то

$$\bigvee_x^y f - f(y) + f(x) \geq 0,$$

тобто $h(y) - h(x) \geq 0$.

Якщо $a \leq x < y \leq b$, $h(x)$ − монотонно неспадна функція на сегменті $[a; b]$, то із $(*)$ випливає, що

$$f(x) = g(x) - h(x),$$

тобто функцію $f(x)$ зобразили у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій на сегменті $[a; b]$.

Зауваження 1. Якщо $f(x) -$ неперервна функція на сегменті $[a; b]$, то функції $g(x)$ та $h(x)$ також є неперервними на цьому сегменті. Це означає, що кожну неперервну функцію обмеженої варіації можна подати як різницю двох монотонно неспадних неперервних функцій.

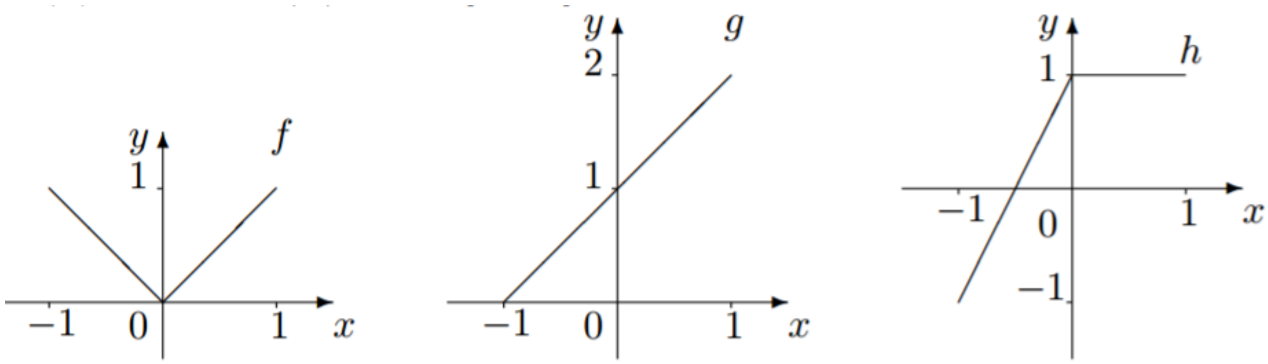
Приклад 12. Представити функцію $f\,(x) = |x|, \quad x \in [-1; 1]$, у вигляді різниці неспадних на $[-1; 1]$ функцій.

Розв'язання.

Кусково-монотонна функція $f\,(x)$ є функцією обмеженої варіації. Тому згідно із теоремою Жордана існують такі неспадні на $[-1;\ 1]$ функції $g(x)$ і $h(x)$, що $f\,(x) = g\,(x) - h\,(x),\ x \in [-1; 1]$. Їх можна знайти, як і в доведенні теореми Жордана. Тобто,

$$g\,(-1) = 0, \qquad g\,(x) = \bigvee_{-1}^{x} f = 1 + x,$$

$$h(x) = 1 + x - |x|,\ x \in [-1, 1].$$



Зауваження. Функції $g(x)$ і $h(x)$ можна було б означити й інакше. Наприклад:

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1;\ 0),\\ x, & x\in(0;\ 1],\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}x, & x\in[-1;\ 0),\\ 0, & x\in(0;\ 1].\end{cases}$$

Приклад 13. Подати функцію $f\,(x)=\cos^2 x$ у вигляді різниці монотонно неспадних на $[0;\pi]$ функцій.

Розв'язання.

Неперервна функція $f\,(x)=\cos^2 x$ є спадною $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ і зростаючою на $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ функцією, а, отже, функцією обмеженої варіації. Згідно з теоремою Жордана існують такі неспадні на $[0;\pi]$ функції $g(x)$ і $h(x)$, що $f\,(x)=g\,(x)-h\,(x),\ x\in[0;\pi]$. Їх можна побудувати, як і в доведенні теореми Жордана. А саме,

$$g\,(0)=\ 0,\qquad g\,(x)=\bigvee_0^x f\,,\qquad h(x)=g(x)-f(x),\qquad x\in(0;\pi].$$

Отже, $g\,(0)=\ 0$.

Нехай $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Тоді

$$g(x) = \bigvee_{0}^{x} f = |f(x) - f(0)| = |\cos^2 x - 1| = 1 - \cos^2 x.$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \bigvee_{0}^{\frac{\pi}{2}} f = 1.$$

Нехай $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Тоді

$$g(x) = \bigvee_{0}^{x} f = \bigvee_{0}^{\frac{\pi}{2}} f + \bigvee_{\frac{\pi}{2}}^{x} f = 1 + \left|f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| =$$

$$= |\cos^2 x - 0| = 1 + \cos^2 x.$$

$$g(\pi) = \bigvee_{0}^{\pi} f = 2.$$

Таким чином

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \cos^2 x, & x \in [0; \frac{\pi}{2}), \\ 1 + \cos^2 x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 - 2\cos^2 x, & x \in [0; \frac{\pi}{2}), \\ 1, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

Приклад 14. Зобразити функцію

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in [0; 1), \\ 0, & x = 1, \\ 1, & x \in (1; 2]. \end{cases}$$

у вигляді різниці монотонно неспадних на $[0; 2]$ функцій.

Розв'язання.

Функція $f(x)$ є спадною на $[0; 1)$ і неспадною на $[1; 2]$ функцією, а, отже, функцією обмеженої варіації. Тому, згідно з теоремою Жордана

$$f(x) = g(x) - h(x), \qquad x \in [0; 2];$$

$$g\,(0) = \ 0, \qquad g\,(x) = \bigvee_0^x f\,, \qquad h(x) = g(x) - f(x), \qquad x \in (0;2].$$

Нехай $x \in [0;1)$. Тоді

$$g\,(x) = \bigvee_0^x f = |f(x) - f(0)| = |-x^2 - 0| = x^2.$$

$$g(1) = \bigvee_0^1 f = |f(1-0) - f(0+0)| + |f(1) - f(1-0)| = 1 + 1 = 2.$$

Нехай $x \in (1;2]$. Тоді

$$g\,(x) = \bigvee_0^x f = \bigvee_0^1 f + \bigvee_1^x f = 2 + |f(1+0) - f(1)| =$$

$$= 2 + |1 - 0| = 3.$$

Таким чином

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0;1), \\ 2, & x = 1, \\ 3, & x \in (1;2]. \end{cases}$$

$$h\,(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \in [0;1), \\ 2, & x \in [1;2]. \end{cases}$$

Означення 2. Множину точок

$$\Gamma = \{(x,y,z) : \ x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \ z = \eta(t), \ t \in [\alpha;\beta]\,\},$$

де функції $\varphi(t), \psi(t), \eta(t) -$ неперервні на сегменті $[\alpha;\ \beta]$ називають неперервною кривою.

Розглянемо довільне розбиття T сегмента $[\alpha;\beta]$ точками

$$T: \ \ t_0 = \alpha < t_1 < \cdots < t_n = \beta.$$

Точка (x_k, y_k, z_k), де $x_k = \varphi(t_k),\ y_k = \psi(t_k),\ z_k = \eta(t_k),\ \ k = \overline{0,n}$ належить кривій Γ. Для кожного $k = \overline{0,n}$, з'єднаємо точки $\big(\varphi(t_k), \psi(t_k), \eta(t_k)\big)$ і $\big(\varphi(t_{k+1}), \psi(t_{k+1}), \eta(t_{k+1})\big)$ відрізками прямої. Нехай

$\Gamma(T)$ − утворена ламана. Тоді довжина цієї ламаної обчислюється за формулою

$$l\big(\Gamma(T)\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\big(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)\big)^2 + \big(\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)\big)^2 + \big(\eta(t_{k+1}) - \eta(t_k)\big)^2}\ .$$

Позначимо:

$$|T| = \max_{k=\overline{0,n-1}} |t_{k+1} - t_k|.$$

Означення 3. Неперервна крива Г називається спрямлюваною, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{|T|\to 0} l\big(\Gamma(T)\big) = l(\Gamma),$$

яка не залежить від розбиття T, а число $l(\Gamma)$ називають довжиною кривої Г.

Теорема 7 (Жордана). Для того, щоб крива Г була спрямлюваною, необхідно і достатньо, щоб функції $\varphi(t_k), \psi(t_k), \eta(t_k)$ були функціями обмеженої варіації на сегменті $[\alpha;\beta]$.

Приклад 15. Довести, що крива, задана функцією

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \in (0;\ 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не є спрямлюваною на $[0; 1]$.

Розв'язання.

Функція $f(x)$ не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0; 1]$, тому згідно з теоремою Жордана крива, що задана цією функцією не є спрямлюваною.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати означення зростаючої (спадної); незростаючої (неспадної) функції. Яка функція називається монотонною?
2. Сформулювати означення лівосторонньої і правосторонньої границі функції в точці.
3. Що називають стрибком функції в точці; стрибком функції в точці справа (зліва)?
4. Які точки розриву може мати монотонна функція?
5. Якою може бути множина точок розриву монотонної функції?
6. Сформулювати означення функції стрибків неспадної функції.
7. Сформулювати теорему про функцію $\varphi(x) = f(x) - S(x)$, де $f(x) -$ неспадна на сегменті $[a; b]$ і $S(x)$ – її функція стрибків.
8. Як можна подати будь-яку монотонну функцію?
9. Сформулювати означення функції обмеженої варіації на сегменті.
10. Чи є функція, монотонна на сегменті, функцією обмеженої варіації?
11. Чи кожна неперервна функція є функцією обмеженої варіації?
12. Сформулювати теорему 2 про диференційовну функцію з обмеженою похідною.
13. Сформулювати властивості варіації; властивості функції обмеженої варіації.
14. Сформулювати теорему Жордана про структуру функції обмеженої варіації.
15. Навести геометричне тлумачення варіації.
16. Що називають неперервною кривою?
17. Яку криву називають спрямлюваною; що називають довжиною кривої?

18. Сформулювати необхідну і достатню умову спрямлюваності кривої.

Розділ 2. Інтеграл Стілтьєса

2.1. Інтеграл Стілтьєса по монотонній функції. Суми Дарбу-Стілтьєса

Нехай на сегменті $[a; b]$ задана деяка обмежена функція $f(x)$ і деяка монотонно неспадна функція $g(x)$. Розглянемо довільне розбиття T сегмента $[a; b]$ точками

$$T: \ x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Введемо позначення

$$m_k = \inf_{x \in [x_k;\ x_{k+1}]} f(x), \qquad M_k = \sup_{x \in [x_k;\ x_{k+1}]} f(x), \qquad k = \overline{0, n-1}.$$

Утворимо суми

$$s(f, g, T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \left(g(x_{k+1}) - g(x_k)\right),$$

$$S(f, g, T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \left(g(x_{k+1}) - g(x_k)\right).$$

Виберемо довільним чином точки $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$. Розглянемо також суму

$$\sigma(f, g, T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \left(g(x_{k+1}) - g(x_k)\right).$$

Суми $s(f, g, T)$, $S(f, g, T)$ і $\sigma(f, g, T, \xi)$ називають відповідно нижньою сумою Дарбу-Стілтьєса, верхньою сумою Дарбу-Стілтьєса та інтегральною сумою функції $f(x)$ по функції $g(x)$, що відповідають розбиттю T і набору проміжних точок ξ_k

Для $k = \overline{0, n-1}$ має місце нерівність

$$\inf_{x \in [a;\ b]} f(x) \le m_k \le f(\xi_k) \le M_k \le \sup_{x \in [a;\ b]} f(x). \qquad (1)$$

Домножимо нерівність (1) на $(g(x_{k+1})-g(x_k))\geq 0$ і додамо одержані нерівності по всіх $k=\overline{0,n-1}$

$$\inf_{x\in[a;\,b]} f(x)\left(g(b)-g(a)\right)\leq s(f,g,T)\leq \sigma(f,g,T,\xi)\leq S(f,g,T)\leq$$

$$\leq \sup_{x\in[a;\,b]} f(x)\big(g(b)-g(a)\big). \qquad (2)$$

З нерівності (2) випливає, що суми Дарбу-Стілтьєса є обмежені, а тому існують

$$\sup_T s(f,g,T) \quad \text{та} \quad \inf_T S(f,g,T).$$

Означення 1. Числа

$$\int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)dg(x)=\sup_T s(f,g,T)$$

та

$$\int\limits_{a}^{\overline{b}} f(x)dg(x)=\inf_T S(f,g,T).$$

називаються відповідно нижнім та верхнім інтегралами Стілтьєса (Рімана-Стілтьєса) функції $f(x)$ по функції $g(x)$ на сегменті $[a;b]$.

Означення 2. Якщо має місце рівність

$$\int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)dg(x)=\int\limits_{a}^{\overline{b}} f(x)dg(x)$$

то кажуть, що функція $f(x)$ інтегровна по функції $g(x)$ на сегменті $[a;b]$ в розумінні Рімана-Стілтьєса, а число

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dg(x)=\int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)dg(x)=\int\limits_{a}^{\overline{b}} f(x)dg(x)$$

називають інтегралом Стілтьєса (Рімана-Стілтьєса) функції $f(x)$ по функції $g(x)$ на сегменті $[a;b]$.

Множину всіх функцій $f(x)$ інтегровних по функції $g(x)$ на сегменті $[a;b]$ позначають $RS(g,[a;b])$.

Інтеграл Стілтьєса є узагальненням інтеграла Рімана. У випадку, коли $g(x)=x$, інтеграл Стілтьєса перетворюється в інтеграл Рімана.

Властивості нижніх і верхніх сум та інтегралів Стілтьєса

1. Із подрібненням розбиття T верхні суми Дарбу-Стілтьєса не зростають, а нижні не спадають.

Тобто якщо $T \subset T'$ то $S(f,g,T) \geq S(f,g,T')$, $s(f,g,T) \leq s(f,g,T')$.

Дійсно, це випливає із того, що із зменшенням сегментів розбиття $[x_k;\ x_{k+1}]$ $\inf\limits_{x\in[x_k;\,x_{k+1}]} f(x)$ – збільшується, $\sup\limits_{x\in[x_k;\,x_{k+1}]} f(x)$ – зменшується.

2. Для будь-яких розбиттів T_1 і T_2 виконується

$$s(f,g,T_1) \leq S(f,g,T_2).$$

Справді, розглянемо розбиття $T = T_1 \cup T_2$. Тоді

$$s(f,g,T_1) \leq s(f,g,T) \leq S(f,g,T) \leq S(f,g,T_2).$$

3. Має місце нерівність

$$\underline{\int_{a}}^{b} f(x)dg(x) \leq \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dg(x).$$

Теорема 1 (критерій інтегровності). Для того, щоб функція $f(x)$ була інтегровною по функції $g(x)$ на сегменті $[a;b]$ в розумінні Рімана-Стілтьєса, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувало таке розбиття T, що

$$S(f,g,T) - s(f,g,T) < \varepsilon.$$

2.2. Класи інтегровних функцій у розумінні Рімана-Стілтьєса

Теорема 1. *Якщо* функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$, а функція $g(x)$ монотонно неспадна на $[a;b]$, то функція $f(x)$ інтегровна по функції $g(x)$ на сегменті $[a;b]$ в розумінні Рімана-Стілтьєса.

Доведення.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$, $g(x)$ − монотонно неспадна на $[a;b]$ і $g(b)-g(a)>0$. Виберемо довільне $\varepsilon>0$. Оскільки $f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$, то згідно з теоремою Кантора, $f(x)$ буде рівномірно неперервною на цьому сегменті, тобто для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta>0$, що для всіх точок $x',x''\in[a;b]$, для яких $|x'-x''|<\delta$, буде виконуватись нерівність $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$.

Розглянемо довільне розбиття T, для якого

$$|T|=\max_{k=\overline{0,n-1}}(x_{k+1}-x_k)<\delta.$$

Тоді

$$S(f,g,T)-s(f,g,T)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\big(g(x_{k+1})-g(x_k)\big)-\sum_{k=0}^{n-1}m_k\big(g(x_{k+1})-g(x_k)\big)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)\cdot\big(g(x_{k+1})-g(x_k)\big)<$$

$$<\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\sum_{k=0}^{n-1}\big(g(x_{k+1})-g(x_k)\big)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\big(g(x_1)-g(a)+g(x_2)+\cdots+g(b)-g(x_{n-1})\big)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}(g(b)-g(a))=\varepsilon.$$

Згідно з критерієм інтегровності функція $f(x)$ буде інтегровною по функції $g(x)$ на сегменті $[a;b]$ в розумінні Рімана-Стілтьєса.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Нехай виконуються умови теореми 1. Крім того мають місце нерівності:

$$s(f,g,T) \leq \sigma(f,g,T,\xi) \leq S(f,g,T),$$

$$s(f,g,T) \leq \int_a^b f(x)dg(x) \leq S(f,g,T),$$

де $\xi -$ множина вибраних довільним чином точок $\xi_k \in [x_k;\ x_{k+1}]$, $k = \overline{0,n-1}$.

Звідси випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх розбиттів T, для яких $|T| < \delta$, і для довільного вибору точок ξ, виконується

$$\left|\sigma(f,g,T,\xi) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| < \varepsilon.$$

Це означає, що при виконанні умов теореми 1

$$\lim_{|T|\to 0} \sigma(f,g,T,\xi) = \int_a^b f(x)dg(x).$$

Приклад 1. Знайти

$$\int_0^1 x^2\, dg(x), \quad \text{якщо} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 2, & x \in (0;1), \\ 3, & x = 1. \end{cases}$$

Розв'язання.

Функція $f(x) = x^2$ – неперервна на сегменті $[0;1]$, $g(x) -$ монотонно неспадна на $[0;1]$, тому внаслідок теореми 1 функція $f(x)$ інтегровна по функції $g(x)$ на $[0;1]$.

Розглянемо довільне розбиття $T: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, і довільним чином виберемо точки $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$.

Складемо інтегральні суми

$$\sigma(f, g, T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) =$$

$$= {\xi_0}^2(2-1) + {\xi_1}^2(2-2) + \cdots + \xi_{n-2}^2(2-2) + \xi_{n-1}^2(3-2) = {\xi_0}^2 + \xi_{n-1}^2.$$

Нехай $|T| = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}}(x_{k+1} - x_k)$. Якщо $|T| \to 0$, то $\xi_0 \to 0, \xi_{n-1} \to 1$, а, отже, $\lim\limits_{|T|\to 0}\left({\xi_0}^2 + {\xi_1}^2\right) = 1$.

Теорема 2. *Якщо функція $f(x)$ монотонна на сегменті $[a; b]$, а функція $g(x)$ − неперервна і монотонно неспадна на сегменті $[a; b]$, то функція $f(x)$ інтегровна по функції $g(x)$ на сегменті $[a; b]$ в розумінні Рімана-Стілтьєса.*

Доведення.

Нехай для означеності функція $f(x)$ монотонно неспадна і $f(b) - f(a) > 0$. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки функція $g(x)$ неперервна на сегменті $[a; b]$, то за теоремою Кантора $g(x)$ – рівномірно неперервна на цьому сегменті. Тобто для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх точок $x', x'' \in [a; b]$, для яких $|x' - x''| < \delta$, виконується нерівність $|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

Розглянемо довільне розбиття T, для якого $|T| < \delta$. Будемо мати

$$S(f, g, T) - s(f, g, T) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} M_k\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) - \sum_{k=0}^{n-1} m_k\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k) \cdot \big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\big) \cdot \big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \big(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(b) - f(x_{n-1})\big) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon.$$

Теорему доведено.

Зауваження 2. При виконанні умов теореми 2

$$\lim_{|T| \to 0} \sigma(f, g, T, \xi) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

2.3. Властивості інтеграла Стілтьєса

1. Якщо функція $f(x)$ інтегровна по функції $g(x)$ на сегменті $[a; b]$, то функція $cf(x)$, $c \in \mathbb{R}$, також інтегровна по функції $g(x)$ на сегменті $[a; b]$ і

$$\int_a^b cf(x) dg(x) = c \int_a^b f(x)\, dg(x).$$

2. Якщо функції $f_1(x), f_2(x)$ інтегровні по функції $g(x)$ на сегменті $[a; b]$, то функція $(f_1(x) + f_2(x))$ також інтегровна по функції $g(x)$ на сегменті $[a; b]$ і

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dg = \int_a^b f_1(x) dg(x) + \int_a^b f_2(x) dg(x).$$

3. Якщо функція $f(x)$ інтегровна по функції $g(x)$ на сегменті $[a; b]$, то при кожному $c \in (a; b)$, функція $f(x)$ також є інтегровною по функції $g(x)$ на сегментах $[a; c]$ і $[c; b]$ і

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)\, dg(x).$$

Зауваження. Обернене твердження хибне. Наведемо приклад.

Приклад 1. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;\ 0], \\ 1, & x \in (0;\ 1], \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;\ 0), \\ 1, & x \in [0;\ 1]. \end{cases}$$

Показати, що функція $f(x)$ інтегровна по функції $g(x)$ на сегментах $[-1;0]$ і $[0;1]$, але в той же час функція $f(x)$ не є інтегровною по функції $g(x)$ на сегменті $[-1;1]$.

Розв'язання.

Для довільного розбиття сегмента $[-1;0]$ і довільного вибору точок ξ_k на цьому сегменті, виконується $f(\xi_k) = 0$. Це означає, що

$s(f,g,T) = \sigma(f,g,T,\xi) = S(f,g,T) = 0$, тому

$$\int_{-1}^{0} f(x)\, dg(x) = 0.$$

Розглянемо тепер сегмент $[0;1]$. На цьому сегменті $g(x) = 1$, тому $g(x_k) = g(x_{k+1}) = 1$. Звідси випливає, що $g(x_k) - g(x_{k+1}) = 0$. Значить на сегменті $[0;\ 1]$ виконується

$$s(f,g,T) = \sigma(f,g,T,\xi) = S(f,g,T) = 0,$$

тому

$$\int_0^1 f(x)\, dg(x) = 0.$$

Розглянемо тепер сегмент $[-1;1]$. Покажемо, що $\int_{-1}^1 f(x)dg\,(x)$ не існує. Візьмемо таке розбиття T щоб точка 0 не була точкою поділу

$$T:\ x_0 = -1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < 0 < x_{m+1} < \cdots < x_n = 1.$$

Складемо інтегральні суми

$$\sigma(f, g, T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) =$$

$$= f(\xi_m)(1-0) = f(\xi_m) = \begin{cases} 0, & \xi_m \le 0, \\ 1, & \xi_m > 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що границі інтегральних сум $\sigma(f, g, T, \xi)$ при $|T| \to 0$ не існує.

$$s(f, g, T) = 0 \text{ і } S(f, g, T) = 1 \Longrightarrow\ S(f, g, T) - s(f, g, T) = 1.$$

4. **Теорема про середнє.** Якщо функція $f(x)$ інтегровна по функції $g(x)$ на сегменті $[a; b]$, то має місце нерівність:

$$\inf_{x \in [a;\, b]} f(x)\,(g(b) - g(a)) \le \int_a^b f(x) dg(x) \le \sup_{x \in [a;\, b]} f(x)(g(b) - g(a)).$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a; b]$, то існує точка $\theta \in [a; b]$ така, що виконується

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(\theta)\big(g(b) - g(a)\big).$$

5. Якщо функції $f_1(x), f_2(x)$ інтегровні по функції $g(x)$ на сегменті $[a; b]$, і $f_1(x) \le f_2(x)$, $x \in [a; b]$, то виконується

$$\int_a^b f_1(x) dg(x) \le \int_a^b f_2(x) dg(x).$$

Звідси випливає, що якщо $f(x) \ge 0$ при $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dg(x) \ge 0.$$

6. Якщо функція $f(x)$ інтегровна по функції $g(x)$ на сегменті $[a;b]$, то і функція $|f(x)|$ інтегровна по функції $g(x)$ на сегменті $[a;b]$ і

$$\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right| \leq \int_a^b |f(x)|dg(x).$$

7. Якщо функція $f(x)$ інтегровна по функції $g_1(x)$ на сегменті $[a;b]$ і інтегровна по функції $g_2(x)$ на сегменті $[a;b]$, то функція $f(x)$ інтегровна по функції $(g_1(x)+g_2(x))$ на сегменті $[a;b]$ і

$$\int_a^b f(x)d(g_1(x)+g_2(x)) = \int_a^b f(x)dg_1(x) + \int_a^b f(x)dg_2(x).$$

Доведення цих властивостей є аналогічними до доведення відповідних властивостей інтеграла Рімана.

2.4. Інтеграл Стілтьєса по функції обмеженої варіації

Нехай $g(x)$ − функція обмеженої варіації на сегменті $[a;b]$. Тоді згідно з теоремою Жордана функцію $g(x)$ можна представити у вигляді

$$g(x) = \alpha(x) - \beta(x), \qquad (1)$$

де $\alpha(x), \beta(x)$ − монотонно неспадні функції на сегменті $[a;b]$.

Тоді інтеграл Стілтьєса від функції обмеженої варіації можна означити за формулою

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)d\alpha(x) - \int_a^b f(x)d\beta(x). \qquad (2)$$

Представлення(1) для функції $g(x)$ не є однозначним. Покажемо, що формула (2) не залежить від (1).

Нехай можливе й інше представлення $g(x) = \tilde{\alpha}(x) - \tilde{\beta}(x)$, де $\tilde{\alpha}(x)$ та $\tilde{\beta}(x)$ − монотонно неспадні на сегменті $[a;b]$ функції. Тоді

$$\alpha(x) - \beta(x) = \tilde{\alpha}(x) - \tilde{\beta}(x),$$

$$\alpha(x)+\tilde{\beta}(x)=\tilde{\alpha}(x)+\beta(x).$$

Для інтеграла Стілтьєса, згідно із властивістю 7, буде виконуватися

$$\int_a^b f(x)d\left(\alpha(x)+\tilde{\beta}(x)\right)=\int_a^b f(x)d\alpha(x)+\int_a^b f(x)d\tilde{\beta}(x)=$$

$$=\int_a^b f(x)dg(\tilde{\alpha}(x)+\beta(x))=\int_a^b f(x)d\tilde{\alpha}(x)+\int_a^b f(x)d\beta(x).$$

Тобто, маємо, що

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)+\int_a^b f(x)d\tilde{\beta}(x)=\int_a^b f(x)d\tilde{\alpha}(x)+\int_a^b f(x)d\beta(x).$$

Спираючись на теореми 1 і 2 пункту 2.2 можна гарантувати існування інтеграла Стілтьєса в таких випадках:

1. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на сегменті $[a;b]$, а функція $g(x)-$ функцією обмеженої варіації на цьому сегменті.

2. Якщо функція $f(x)$ є функцією обмеженої варіації на $[a;b]$, а $g(x)-$ непепервною на $[a;b]$ і функцією обмеженої варіації на цьому сегменті.

Для інтеграла Стілтьєса має місце формула інтегрування частинами.

Теорема 1. Якщо існує один з інтегралів

$$\int_a^b f(x)dg(x) \text{ або } \int_a^b g(x)df(x),$$

то існує й інший інтеграл і має місце формула:

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(x)g(x)|_a^b-\int_a^b g(x)df(x). \tag{3}$$

Доведення.

Нехай існує

$$\int_a^b f(x)dg(x).$$

Розглянемо інтегральну суму для цього інтеграла:

$$\sigma(f,g,T,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) =$$

$$= f(\xi_0)g(x_1) + f(\xi_1)g(x_2) + f(\xi_2)g(x_3) + \cdots + f(\xi_{n-1})g(x_n) -$$

$$-\big(f(\xi_0)g(x_0) + f(\xi_1)g(x_1) + f(\xi_2)g(x_2) + \cdots + f(\xi_{n-1})g(x_{n-1})\big) =$$

$$= -f(\xi_0)g(x_0) + f(\xi_{n-1})g(x_n) -$$

$$-\Big(g(x_1)\big(f(\xi_1) - f(\xi_0)\big) + g(x_2)\big(f(\xi_2) - f(\xi_1)\big) + \cdots$$

$$+ g(x_{n-1})\big(f(\xi_{n-1}) - f(\xi_{n-2})\big)\Big) =$$

$$= f(x)g(x)|_a^b - \big(f(b)g(x_n) - f(a)g(x_0)\big) - f(\xi_0)g(x_0) + f(\xi_{n-1})g(x_n) -$$

$$-\Big(g(x_1)\big(f(\xi_1) - f(\xi_0)\big) + g(x_2)\big(f(\xi_2) - f(\xi_1)\big) + \cdots$$

$$+ g(x_{n-1})\big(f(\xi_{n-1}) - f(\xi_{n-2})\big)\Big) = f(x)g(x)|_a^b -$$

$$-\Big(g(x_0)\big(f(\xi_0) - f(a)\big) + g(x_1)\big(f(\xi_1) - f(\xi_0)\big) + \cdots$$

$$+ g(x_{n-1})\big(f(\xi_{n-1}) - f(\xi_{n-2})\big) + g(x_n)\big(f(b) - f(\xi_{n-1})\big)\Big). \quad (4)$$

Точки $a \le \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{n-1} \le b$ утворюють розбиття сегмента $[a;b]$. Позначитимо $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$; $\Delta \xi_k = \xi_{k+1} - \xi_k$;

$$|T| = \max_{k=\overline{0,n-1}} \Delta x_k.$$

Тоді при $|T| \longrightarrow 0$ виконується

$$|T'| = \max_k \Delta \xi_k \longrightarrow 0.$$

При цьому точка $x_k \in [\xi_{k-1};\ \xi_k];\ a \in [a;\ \xi_0],\ b \in [\xi_{n-1}; b]$. Внаслідок цього вираз, що стоїть в дужках в (4) є інтегральною сумою для інтеграла Стілтьєса функції $g(x)$ по функції $f(x)$ на сегменті $[a; b]$.

В якості розбиття беремо $T' : a \leq \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{n-1} \leq b.$

В якості точок, в яких обчислюється значення функції $g(x)$ беремо наступні точки $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b.$

Ми одержали рівність

$$\sigma(f, g, T, \xi) = f(x)g(x)|_a^b - \sigma(\,g, T', f, x).$$

Ліва частина має границю при $|T| \longrightarrow 0$, тому і права частина буде мати границю при $|T'| \longrightarrow 0$. Звідси випливає, що існує інтеграл Стілтьєса функції $g(x)$ по функції $f(x)$ і має місце формула (3).

Теорему доведено.

2.5. Обчислення інтеграла Стілтьєса

Обчислення інтеграла Стілтьєса зводиться до обчислення інтеграла Рімана.

Теорема 1. Нехай функція $f(x)$ є неперервною на сегменті $[a; b]$, а функція $g(x)$ в кожній точці сегмента $[a; b]$ має похідну $g'(x)$, яка є інтегровною за Ріманом. Тоді функція $f(x)$ інтегровна по функції $g(x)$ на сегменті $[a; b]$ в розумінні Рімана-Стілтьєса і має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx. \qquad (1)$$

Доведення.

Оскільки $g'(x)$ є інтегровною за Ріманом на сегменті $[a; b]$, то згідно з необхідною умовою інтегровності, функція $g'(x)$ є обмеженою, а, отже, $g(x)$ є функцією обмеженої варіації. Це означає, що інтеграл Стілтьєса існує. Запишемо для нього інтегральні суми:

$$\sigma(f,g,T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(g(x_{k+1})-g(x_k)\big).$$

Згідно з теоремою Лагранжа про скінченні прирости маємо:

$$g(x_{k+1})-g(x_k)=g\,'(\eta_k)\Delta x_k, \qquad \text{де } \eta_k\in(x_k,x_{k+1}).$$

Підставивши останню рівність в інтегральну суму, одержимо

$$\sigma(f,g,T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g\,'(\eta_k)\Delta x_k.$$

Так як інтеграл Стілтьєса існує, то існує скінченна границя інтегральних сум $\sigma(f,g,T,\xi)$ при $|T|\longrightarrow 0$, яка не залежить від розбиття T сегмента $[a;b]$ і вибору точок $\xi_k\in[x_k;\ x_{k+1}]$.

Виберемо точки ξ_k так, щоб вони співпадали з точками η_k: $\xi_k=\eta_k$. Маємо

$$\sigma(f,g,T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k)g'(\eta_k)\Delta x_k)$$

– інтегральна сума для інтеграла в правій частині (1). Оскільки існує границя

$$\lim_{|T|\to 0}\sigma(f,g,T,\xi),$$

то існує

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

і має місце формула (1).

Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці $c\in[a;b]$, а функція $g(x)$ задана на сегменті $[a;b]$ і має вигляд

$$g(x) = \begin{cases} g(c-0), & x < c, \\ g(c), & x = c, \\ g(c+0), & x > c, \end{cases}$$

де $g(c-0) \le g(c) \le g(c+0)$.

Тоді

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(c)\big(g(c+0) - g(c-0)\big).$$

Доведення.

Оскільки функція $g(x)$ монотонно неспадна, то

$$g(c-0) \le g(c) \le g(c+0).$$

Складемо інтегральну суму і нехай точка c не є точкою розбиття сегмента $[a;b]$, тоді

$$\sigma(f,g,T,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big) = f(\xi_{\tilde{k}}) \cdot \big(g(x_{\tilde{k}+1}) - g(x_{\tilde{k}})\big) =$$

$$= f(\xi_{\tilde{k}}) \cdot \big(g(c+0) - g(c-0)\big), \qquad \text{де } c \in [x_{\tilde{k}}; x_{\tilde{k}+1}],\ \xi_{\tilde{k}} \in [x_{\tilde{k}}; x_{\tilde{k}+1}].$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці c, то

$$\lim_{\xi_{\tilde{k}} \to c} f(\xi_{\tilde{k}}) = f(c).$$

Якщо $|T| \longrightarrow 0$, то $\xi_{\tilde{k}} \to c$. Перейдемо в інтегральній сумі до границі при $|T| \to 0$. Одержимо потрібну нам рівність.

Нехай точка c є точкою поділу сегмента $[a;b]$

$$T: \ a < x_1 < \cdots < x_{m-1} < c = x_m < x_{m+1} < \cdots < x_n = b.$$

Тоді в інтегральній сумі залишаться такі доданки:

$$\sigma(f,g,T,\xi) = f(\xi_{m-1})\big(g(c) - g(x_{m-1})\big) + f(\xi_m)\big(g(x_{m+1}) - g(c)\big) =$$

$$= f(\xi_{m-1})\big(g(c) - g(c-0)\big) + f(\xi_m)\big(g(c+0) - g(c)\big).$$

Якщо $|T| \longrightarrow 0$, то $\xi_{m-1} \to c$, $\xi_m \to c$, $f(\xi_{m-1}) \to f(c)$.

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(c)\big(g(c) - g(c-0)\big) + f(c)\big(g(c+0) - g(c)\big) =$$

$$= f(c) \cdot \big(g(c+0) - g(c-0)\big).$$

Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$, а функція $g(x)$ є сталою на кожному із інтервалів $(a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_n, b)$, де $a < c_1 < \dots < c_n < b, k = \overline{1, n}$, тоді

$$\int_a^b f(x)dg(x) =$$

$$= f(a)\big(g(a+0) - g(a)\big) + \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\big(g(c_k + 0) - g(c_k - 0)\big) +$$

$$+ f(b)\big(f(b) - g(b-0)\big). \qquad (2)$$

Доведення теореми випливає з попередньої теореми і властивості 3 інтеграла Стілтьєса.

Теорема 4. Нехай функція $f(x)$ є неперервною на сегменті $[a;b]$, функція $g(x)$ має скінченну кількість точок розриву першого роду $c_1, c_2, \dots, c_n \in (a;\ b)$, а у всіх інших точках сегмента $[a;b]$ існує похідна $g'(x)$, інтегровна за Ріманом на цьому сегменті, тоді

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx + \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\big(g(c_k + 0) - g(c_k - 0)\big).$$

Доведення теореми випливає з теорем 1 і 3.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int_0^2 f(x)dg(x), \qquad \text{де}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;\ 1), \\ x + 1, & x \in [1;\ 2], \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;\ 1] \\ x, & x \in (1;\ 2], \end{cases}$$

різними способами:

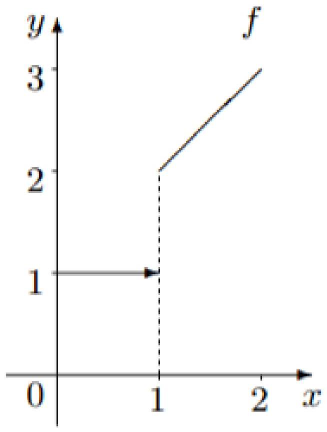
1) за означенням, використовуючи суми Дарбу-Стілтьєса;

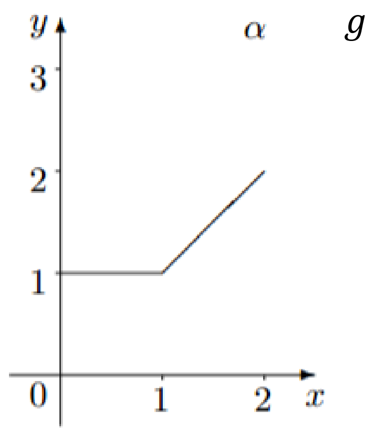
2) як границю інтегральних сум;

3) зведенням до інтеграла Рімана.

Розв'язання.

Зобразимо графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$:





1) Розглянемо довільне розбиття $T : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2$ сегмента [0; 2]. Беручи до уваги властивість верхніх та нижніх сум Дарбу – Стілтьєса, можна вважати, що $1 \in T$. Тоді $x_j = 1$ для деякого $j \in \{1, \ldots, n - 1\}$.

Оскільки функція $f(x)$ неспадна, то

$$m_k = \inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} f(x) = f(x_k), 0 \leq k \leq n - 1.$$

Окрім того, $g(x_{k+1}) - g(x_k) = 0,\ 0 \leq k \leq j - 1,$

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = x_{k+1} - x_k = \Delta x_k, \qquad j \leq k \leq n - 1.$$

Тому

$$s(f,g;\ T)=\sum_{k=0}^{j-1} f(x_k)\left(g(x_{k+1})-g(x_k)\right)+\sum_{k=j}^{n-1} f(x_k)\big(g(x_{k+1})-g(x_k)\big)=$$

$$=\sum_{k=j}^{n-1}(x_k+1)\Delta x_k = \ s(x\ +\ 1, T'\,),$$

де $s(x\ +\ 1, T') -$ нижня сума Дарбу для функції $g\ (x)=x+1,\ \ x\in[1;2]$, що відповідає розбиттю $T\ '\ :1=x_{\text{o}}<\cdots<x_n=2$ сегмента $[1;2]$.

Звідси випливає, що

$$\underline{\int_0}^{2} f(x)\,dg(x)=\sup_T s(f,g;\ T)=\sup_{T'} s(f,g;\ T')=\underline{\int_1}^{2}(x\ +\ 1)dx.$$

Враховуючи, що $g(x)$ неперервна на $[1;2]$, а, отже, інтегровна за Ріманом на цьому сегменті, то за формулою Ньютона – Лейбніца маємо:

$$\underline{\int_0}^{2} f(x)\,dg(x)=\underline{\int_1}^{2}(x\ +\ 1)\,dx=\int_1^2(x\ +\ 1)\,dx\ =f(x)\frac{(x+1)^2}{2}\bigg|_1^2=\frac{5}{2}.$$

Аналогічно одержується, що

$$\overline{\int_0^2} f(x)\,dg(x)=\overline{\int_1^2}(x+1)dx=\frac{5}{2}.$$

Отже,

$$\underline{\int_0}^{2} f(x)\,dg(x)=\overline{\int_1^2} f(x)\,dg(x)=\frac{5}{2},$$

тому $f(x)$ інтегровна у розумінні Рімана-Стілтьєса на $[0;2]$ по функції $g(x)$ і

$$\int_0^2 f(x)\,dg(x)=\frac{5}{2}.$$

2) Оскільки функції $f(x)$ і $g(x)$ – неспадні, причому $g(x)$ неперервна на $[0;2]$, то $f(x)$ інтегровна у розумінні Рімана-Стілтьєса на $[0;2]$ по функції $g(x)$ та

$$\int_0^2 f(x)\,dg(x) = \lim_{|T|\to 0} \sigma(f, g;\ T, \xi).$$

Оскільки границя інтегральних сум існує, то обчислити її можна як границю послідовності $\lim_{n\to\infty} \sigma(f, g;\ T_n, \{\xi|T_n\})$, підібравши відповідні розбиття $\{T_n: n \ \geq\ 1\}$ такі, що $|T_n| \to 0, n \to \infty$, і проміжні точки.

Покладемо

$$T_n = \left\{\frac{k}{n}: 0 \le k \le 2n\right\}, \xi_k = \frac{k}{n}, 0 \le k \le 2n-1, n \ge 1.$$

Тоді

$$\sigma(f, \alpha;\ T_n, \{\xi|T_n\}) \ =\ \sum_{k=0}^{2n-1} f(\xi_k)(g(x_k+1) - g(x_k)) \ =$$

$$=\ \sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{k}{n}+1\right)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\ \sum_{k=n}^{2n-1} (n+k) =$$

$$= \frac{1}{n^2}(n+n\ +\ n\ +\ 2n\ -\ 1)\cdot\ n\cdot\frac{1}{2} \to\ \frac{5}{2}, \qquad n\ \to\ \infty.$$

Отже, $\int_0^2 f(x)\,dg(x) = \dfrac{5}{2}$.

3) Функція $f(x)$ монотонна, тому $f(x)$ інтегровна за Ріманом на сегменті $[0;2]$. Крім того, $g(x)$ неперервна на $[0;2]$

$g'(x) = 0,\ x \in [0;1),\ g'(x) = 1,\ x \in (1;2]$.

Означивши функцію $g'(x)$ у точці 1 довільним чином, одержимо, що $g'(x)$ інтегровна за Ріманом на $[0;2]$.

Користуючись теоремою 4, адитивністю інтеграла Рімана, а також незалежністю його від значень підінтегральної функції на скінченній множині точок, маємо

$$\int_0^2 f(x)dg(x) = \int_0^2 f(x)g'(x)dx = \int_0^1 1\cdot 0\,dx + \int_1^2 (x+1)dx = \frac{5}{2}\ .$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int_0^2 2^x d(x\,\mathrm{sgn}\,(\cos\pi x)).$$

Розв'язання.

Маємо $f(x) = 2^x$, $g(x) = x\,\mathrm{sgn}\,(\cos\pi x)$

$$\int_0^2 2^x d(x\,\mathrm{sgn}\,(\cos\pi x)) =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2^x\cdot x'\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 2^x\cdot(-x)'\,dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 2^x\cdot x'\,dx + 2^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) +$$

$$+2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{2^x}{\ln 2}\bigg|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2^x}{\ln 2}\bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} + \frac{2^x}{\ln 2}\bigg|_{\frac{3}{2}}^{2} - \sqrt{2} + 6\sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2}\right) + 5\sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(3 - 2\sqrt{2}\right) + 5\sqrt{2}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграли

1) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\,d(\arcsin x)$;   2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,d(\mathrm{sing}(\sin x))$;

3) $\int_0^3 \frac{1}{x+1} dg(x)$, де

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;\ 1], \\ x^2+1, & x \in (1;\ 2], \\ 2, & x \in (2;\ 3]. \end{cases}$$

Розв'язання.

1) $f(x) = x$, $g(x) = \text{arcsin}x$, $x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. Функція $g(x)$ точок розриву не має, тому у правій частині формули буде лише інтеграл. Оскільки $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, то будемо мати

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x d(\text{arcsin}x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0\,.$$

2) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \text{sing}\,(\sin x) = \begin{cases} 0, & x \in \{-\pi, 0, \pi\}, \\ 1, & x \in (0, \pi), \\ -1, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$

Функція $g(x)$ має три точки розриву: $z_1 = -\pi$; $z_2 = 0$; $z_3 = \pi$. Оскільки $g\,'(x) = 0$, $x\ (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, то за відповідною теоремою

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dg(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\ g\,'(x)\, dx +$$

$$+\cos(-\pi) \cdot (g(-\pi+0) - g(-\pi+0)) +$$

$$+\cos 0 \cdot (g(0+0) - g(0-0)) + \cos\pi \cdot (g(\pi) - g(\pi-0)) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 0 \cdot dx + (-1)\cdot(-1-0) + 1\cdot\big(1-(-1)\big) + (-1)\cdot(0\ -\ 1) = 4.$$

3) $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Функція $g(x)$ має дві точки розриву $z_1 = 1$; $z_2 = 2$.

Оскільки

$$g\,'(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;\ 1), \\ 2x, & x \in (1;\ 2), \\ 0, & x \in (2;\ 3], \end{cases}$$

то

$$\int_0^3 f(x)dg(x) = \int_0^3 f(x)g'(x)dx + f(1)\big(g(1+0) - g(1-0)\big) +$$

$$+ f(2)\cdot(g(2+0) - g(2-0)) =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x+1} + \int_1^2 \frac{2x}{1+x}dx + \int_2^3 0\cdot dx + \frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{3}(2-5) =$$

$$= \ln|x+1|\big|_0^1 + \int_1^2 \frac{2x+2}{1+x}dx - 2\int_1^2 \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2} - 1 =$$

$$= \ln 2 + 2x|_1^2 - 2\ln|x+1|\big|_1^2 - \frac{1}{2} =$$

$$= \ln 2 + 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 - \frac{1}{2} =$$

$$= 3\ln 2 - 2\ln 3 + \frac{3}{2} = \ln 8 - \ln 9 + \frac{3}{2}.$$

2.6. Фізичний зміст інтеграла Стілтьєса

Нехай на сегменті $[a;b]$ розподілена деяка маса m_0 із густиною $\rho = \rho(x)$, де $\rho(x)$ – неперервна функція на $[a;b]$.

Тобто якщо $m(x)$ – маса відрізка $[a;b]$, то існує

$$\lim_{t\to 0}\frac{m(x+t) - m(x)}{t} = m'(x) = \rho(x),$$

$$m(b) = m_0, \qquad m(x) = \int_a^x \rho(u)du.$$

Припустимо, що у точках $z_1, \dots, z_n$ сегмента $[a;b]$ також зосереджені додатні маси $m_1, \dots, m_n$ відповідно. Нехай $g(a) = 0$, $g(x) -$ сумарна маса сегмента $[a;\ x], a < x \leq\ b$. Тоді:

1) маса відрізка $[a;b]$ обчислюється за формулою

$$\int_a^b dg(x) = \int_a^b \rho(x)dx + \sum_{k=1}^{n} m_k;$$

2) статичний момент відрізка $[a;b]$ відносно початку координат обчислюється за формулою

$$\int_a^b xdg(x) = \int_a^b x\rho(x)dx + \sum_{k=1}^{n} z_k m_k;$$

3) момент інерції відрізка $[a;b]$ відносно початку координат дорівнює

$$\int_a^b x^2 dg(x) = \int_a^b x^2\rho(x)dx + \sum_{k=1}^{n} z_k^2\, m_k\ .$$

Приклад 1. Нехай одинична маса рівномірно розподілена на сегменті $[0;2]$, крім того, у точках $x\ =\ 0$ і $x\ =\ 1$ додатково розміщені одиничні маси.

Нехай $g(0) = 0, g(x)$– маса, що зосереджена на сегменті $[0;\ x],\ 0 < x \leq\ 2$.

1) Знайти функцію g.

2) Обчислити масу множин $(x_1, x_2]$, $[x_1, x_2]$, $[x_1, x_2)$, (x_1, x_2), $0\ \leq x_1 < x_2 \leq\ 2$.

3) Знайти інтеграли

$$\int_0^2 dg(x), \quad \int_0^2 xdg(x).$$

Розв’язання.

1) Густина рівномірно розподіленої одиничної маси є сталою $\rho(x) = c, x \in [0;\ 2]$. Цю сталу знайдемо із співвідношення

$$c \cdot (2 - 0) = 1, \qquad c = \frac{1}{2}.$$

Таким чином

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 + \dfrac{x}{2}, & x \in (0; 1), \\ 2 + \dfrac{x}{2}, & x \in [1; 2]. \end{cases}$$

2) Через $m(A)$ позначимо масу множини $A \subset [0;\ 2]$. Тоді матимемо:

$$m\big((x_1;\ x_2]\big) = m([0;\ x_2]) - m([0;\ x_1]) = g(x_2) - g(x_1),\ x_1 > 0;$$

$$m\big((0;\ x_2]\big) = g(x_2) - g(0+0) = g(x_2) - 1;$$

$$m([x_1;\ x_2]) = g(x_2) - g(x_1 - 0), x_1 > 0;$$

$$m([0;\ x_2]) = g(x_2);$$

$$m\big([x_1;\ x_2)\big) = g(x_2 - 0) - g(x_1 - 0), x_1 > 0;$$

$$m([0; x_2)) = g(x_2 - 0);$$

$$m\big((x_1;\ x_2)\big) = g(x_2 - 0) - g(x_1), x_1 > 0;$$

$$m((0; x_2)) = g(x_2 - 0) - g(0+0) = g(x_2 - 0) - 1.$$

3) Точками розриву функції $g(x)$ є $z_1 = 0,\ z_2 = 1$. Окрім того $g'(x) = \frac{1}{2}, x \in (0;\ 1) \cup (1;\ 2]$. Тому матимемо:

$$\int_0^2 dg(x) = \int_0^2 \frac{1}{2} dx + 1 \cdot (g(0+0) - g(0)) + 1 \cdot (g(1+0) - g(1-0)) =$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$\int_0^2 x dg(x) = \int_0^2 \frac{x}{2} dx + 0 \cdot \big(g(0+0) - g(0)\big) + 1 \cdot \big(g(1+0) - g(1-0)\big) =$$

$$= 1 + 1 = 2.$$

Зазначимо, що із врахуванням умов задачі, рівність

$$\int_0^2 dg(x) = 3$$

є очевидною, оскільки цей інтеграл виражає масу сегмента $[0;\ 2]$.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати означення нижньої суми Дарбу-Стілтьєса, верхньої суми Дарбу-Стілтьєса функції $f(x)$ по функції $g(x)$.
2. Навести означення інтегральної суми функції $f(x)$ по функції $g(x)$.
3. Сформулювати означення нижнього та верхнього інтеграла Стілтьєса.
4. Сформулювати означення функції інтегровної на сегменті в розумінні Рімана-Стілтьєса; означення інтеграла Стілтьєса функції.
5. Навести властивості нижніх і верхніх сум та інтегралів Стілтьєса.
6. Сформулювати критерій інтегровності в розумінні Рімана-Стілтьєса.
7. Сформулювати теореми про класи інтегровних функцій в розумінні Рімана-Стілтьєса.
8. Навести властивості інтеграла Стілтьєса.
9. Сформулювати теорему про середнє.
10. Як означається інтеграл Стілтьєса по функції обмеженої варіації?
11. При яких умовах існує інтеграл Стілтьєса по функції обмеженої варіації?
12. Навести формулу інтегрування частинами для інтеграла Стілтьєса.
13. Сформулювати теореми про обчислення інтеграла Стілтьєса.
14. Фізичний зміст інтеграла Стілтьєса: обчислення маси відрізка; статичного моменту відрізка відносно початку координат; моменту інерції відрізка відносно початку координат.

Індивідуальні завдання до теми “Функції обмеженої варіації. Інтеграл Стілтьєса”

Варіант 1

1. Знайти варіацію функції $f(x) = \cos(x+1)$ на сегменті $[0; 10\pi]$.
2. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{1}{x^2}, & x \in (0; 1], \end{cases}$$

не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0; 1]$.

3. Зобразити функцію $f(x) = x^2 + x$ у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій сегменті $[-1; 1]$.
4. Обчислити інтеграл Стілтьєса

$$\int_0^2 x^7 dg(x),$$

якщо $g(x) = \operatorname{arctg} x$.

Варіант 2

1. Знайти варіацію функції $f(x) = |1 - x^2|$ на сегменті $[-2; 2]$.
2. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0; 1]$.

3. Зобразити функцію $f(x) = x^2 - |x|$ у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій сегменті $[-1; 1]$.

4. Обчислити інтеграл Стілтьєса

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{x+1} dg(x) ,$$

якщо

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 1], \\ x^2 + 1, & x \in (1; 2], \\ x^2, & x \in (2; 3]. \end{cases}$$

Варіант 3

1. Знайти варіацію функції

$$f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \in [-2; 0), \\ -x+3, & x \in [0; 2], \end{cases}$$

на сегменті $[-2; 2]$.

2. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sin\frac{\pi}{x}, & x \in (0; 1], \end{cases}$$

не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0; 1]$.

3. Зобразити функцію $f(x) = |\sin x|$ у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій сегменті $[0; 2\pi]$.

4. Обчислити інтеграл Стілтьєса

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 dg(x) ,$$

якщо $g(x) = \arcsin x$.

Варіант 4

1. Знайти варіацію функції $f(x) = |\cos x|$ на сегменті $[0; 4\pi]$.
2. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n-1}, & x = \dfrac{1}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \neq \dfrac{1}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0; 1]$.

3. Зобразити функцію $f(x) = x^3 - |x|$ у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій сегменті $[-1; 1]$.
4. Обчислити інтеграл Стілтьєса

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dg(x) \,,$$

якщо

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{x+1}{2}, & x \in (0; \pi], \\ \dfrac{x^2}{2}, & x \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right], \\ 20, & x \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]. \end{cases}$$

Варіант 5

1. Знайти варіацію функції

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & x \in [-1; 0), \\ x - 2, & x \in [0; 3], \end{cases}$$

на сегменті $[-1; 3]$.

2. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right), & x \in (0;1], \end{cases}$$

не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0;1]$.

3. Зобразити функцію $f(x) = \cos x$ у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій сегменті $[0;2\pi]$.

4. Обчислити інтеграл Стілтьєса

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dg(x) \, ,$$

якщо $g(x) = \text{sign}\ (\sin x)$.

Варіант 6

1. Знайти варіацію функції

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 - x^2, & x \in (0;1), \\ 2, & x = 1, \end{cases}$$

на сегменті $[0;1]$

2. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x \in (0;1], \end{cases}$$

не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0;1]$.

3. Зобразити функцію $f(x) = x^2 - x$ у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій сегментів $[-1;1]$.

4. Обчислити інтеграл Стілтьєса

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2+1}\,dg(x)\,,$$

якщо

$$g(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0;1],\\ 2x-1, & x\in(1;2),\\ 1, & x\in[2;3].\end{cases}$$

Варіант 7

1. Знайти варіацію функції

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\in[-2;0),\\ -2, & x=0,\\ -x^2, & x\in(0;1],\end{cases}$$

на сегменті $[-2;1]$.

2. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0,\\ x\,\mathrm{sign}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right), & x\in(0;1],\end{cases}$$

не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0;1]$.

3. Зобразити функцію $f(x)=xe^{-x}$ у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій сегменті $[0;3]$.

4. Обчислити інтеграл Стілтьєса

$$\int_0^{2\pi} \cos x\,dg(x)\,,$$

якщо

$$g(x)=\begin{cases} 2, & x=0,\\ 1-x, & x\in(0;\pi),\\ x^2, & x\in[\pi;2\pi].\end{cases}$$

Варіант 8

1. Знайти варіацію функції $f(x) = [2x]$ на сегменті $[1; 3]$.

2. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \cos\dfrac{\pi}{x}, & x \in (0; 1], \end{cases}$$

не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0; 1]$.

3. Зобразити функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0, \end{cases}$$

у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій сегменті $[-1; 1]$.

5. Обчислити інтеграл Стілтьєса

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + 1) dg(x),$$

якщо

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0], \\ \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & x \in (0; 1]. \end{cases}$$

Варіант 9

1. Знайти варіацію функції

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [0; 1), \\ 5, & x = 1, \\ x^2, & x \in [1; 2], \end{cases}$$

на сегменті $[0; 2]$.

2. Довести, що функція $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \operatorname{sign}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right), & x \in (0; 1], \end{cases}$

не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0; 1]$.

3. Зобразити функцію $f(x) = |x| - 1$ у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій сегменті $[-2; 1]$.

4. Обчислити інтеграл Стілтьєса

$$\int_1^6 x dg(x),$$

якщо $g(x) = [x] + 1$.

Варіант 10

1. Знайти варіацію функції $f(x) = \sin 3x$ на сегменті $[0; 6\pi]$.

2. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = \dfrac{1}{2n-1}, & n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \neq \dfrac{1}{2n-1}, & n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

не є функцією обмеженої варіації на сегменті $[0; 1]$.

3. Зобразити функцію

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x = 0, \\ 1 - x, & x \in (0; 1), \\ 3, & x = 1, \end{cases}$$

у вигляді різниці двох монотонно неспадних функцій сегменті $[-1; 1]$.

5. Обчислити інтеграл Стілтьєса

$$\int_0^2 x dg(x) ,$$

якщо $g(x) = x[x^2]$.

Література

1. Денисьєвський М.О., Курченко О.О., Нагорний В.Н., Петрова Т. О., Чайковський А.В. Збірник задач з математичного аналізу. Функції однієї змінної. Київ: ВПЦ “ Київський університет”, 2005. 240 с.

2. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Ч. 1. Київ: Либідь, 1994. 320 с.

3. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Ч. 2. Київ: Либідь, 1994. 304

4. Заболоцький М. В., Сторож О. Г., Тарасюк С. І. Математичний аналіз: підручник. Київ: Знання, 2008. 421 с.

5. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч.2. Київ: Вища школа, 2005. 510 с.

6. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у прикладах та задачах. Ч.1. Київ: Вища школа, 2002. 462 с.

7. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у прикладах та задачах. Ч.2. Київ: Вища школа, 2003. 470 с.

Навчально-методичне видання

Федуник-Яремчук Оксана Володимирівна
Бушев Дмитро Миколайович
Соліч Катерина Василівна

Функції обмеженої варіації. Інтеграл Стілтьєса:

методичні вказівки

Друкується в авторській редакції