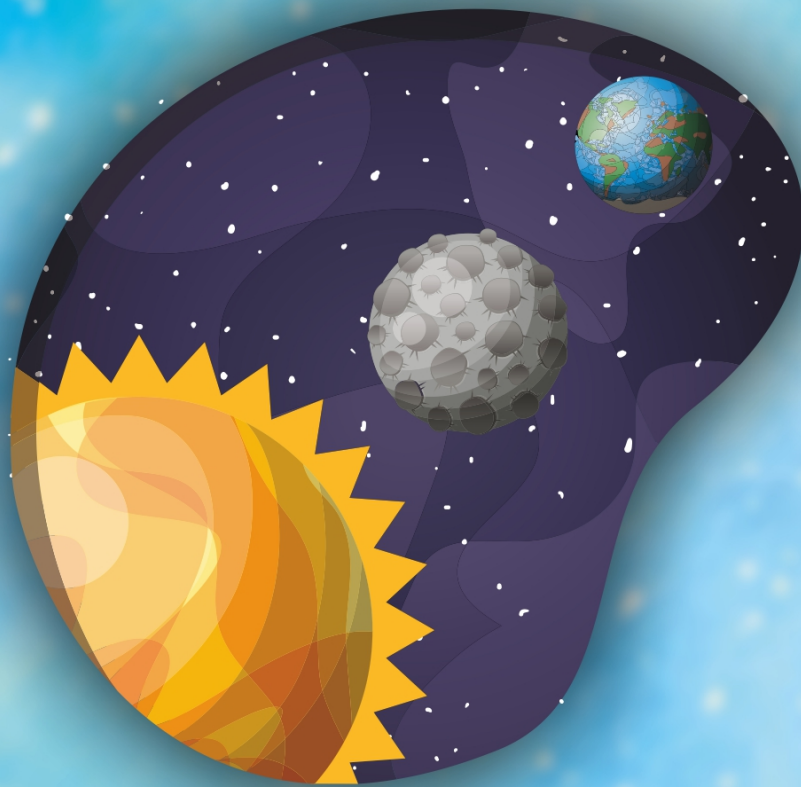


**ПЕТРО ТРОХИМЧУК**  
**ПАВЛО ШИГОРІН**

**ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ**  
**З АСТРОНОМІЇ ТА АСТРОФІЗИКИ**



Міністерство освіти і науки України  
Волинський національний університет імені Лесі Українки

**Петро Трохимчук, Павло Шигорін**

## **Задачі та вправи з астрономії та астрофізики**

*Навчальний посібник*

Луцьк  
Вежа-Друк  
2024

УДК 52 (076.1)  
Т 76

*Рекомендовано до друку вченою радою  
Волинського національного університету імені Лесі Українки  
(протокол №3 від 22.02.2024 року)*

**Рецензенти:**

**Луньов С. В.** – професор кафедри фізики та вищої математики Луцького національного технічного університету, д.ф.-м.н., м. Луцьк;

**Маханець О. М.** – професор кафедри термоелектрики та медичної фізики, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, д.ф.-м.н., м. Чернівці;

**Новосад О. Л.** – доцент кафедри експериментальної фізики, інформаційних та освітніх технологій, навчально-наукового фізико-технологічного інституту Волинського національного університету імені Лесі Українки, к.ф.-м.н., м. Луцьк.

Подано праці V-их читань Анатолія Вадимовича Свідзинського.

Матеріали були заслухані на читаннях, їх подано в авторській редакції та підготовлено до друку програмно-організаційним комітетом.

**Трохимчук Петро, Шигорін Павло**

Т 76 **Задачі та вправи з астрономії та астрофізики [Текст]: навчальний посібник /**  
Петро Трохимчук, Павло Шигорін. – Луцьк: Вежа-Друк, 2024. – 104 с.

ISBN 978-966-940-550-0

У навчальному посібнику наведено типові задачі з основних розділів астрономії та астрофізики, включаючи небесну механіку, практичну астрономію, теоретичну та експериментальну астрофізику, космологію, астроінженерію та т. п.

Для студентів фізичних спеціальностей, а також біологів, хіміків, математиків та інших фахівців, котрі цікавляться сучасними проблемами астрономії та астрофізики.

**УДК 52 (076.1)**

ISBN 978-966-940-550-0

© Трохимчук Петро, Шигорін Павло, 2024

© Олейник Анастасія (обкладинка), 2024

## ПЕРЕДМОВА

*Числа правлять світом  
Піфагор*

Необхідність написання цієї книги обумовлена відсутністю достатньої кількості збірників задач та вправ з астрономії університетського рівня, особливо з астрофізики.

В підручник включені задачі які використовувались та використовуються при читанні курсів Астрономії та Астрофізики для студентів математиків, фізиків, землемірів та біологів у Волинському національному університеті імені Лесі Українки Трохимчуком П. П.; та для студентів фізиків та слухачів малої академії Шигоріним П.П. Також включені задачі, які використовувались при проведенні обласних олімпіад з астрономії та при читанні лекцій на курсах підвищення кваліфікації вчителів при ВНУ імені Лесі Українки обома авторами.

Задачі 1.1 – 1.23, 2.1 – 2.22, 3.8– 3.14, 4.5 – 4.10, 5.5 – 5.12, 6.4 – 6.9, 7.8 – 7.11 складені та запропоновані Шигоріним П. П., всі інші задачі підібрані, складені та запропоновані Трохимчуком П. П.

Слід зазначити, що задачі підібрані так, щоб «задовольнити» весь контингент слухачів та студентів. Так для математиків та фізиків при наявності часу давались елементи загальної теорії відносності та сучасної космології. Тому цей розділ виділений окремо. Також необхідно було включити останні досягнення сучасної астрономії та астрофізики. Це й космічна астрономія, відкриття екзопланет та планетоїдів, коричневі карлики.

Наведено також дані про темну матерію та темну енергію, проблеми стійкості та стабільності як Всесвіту в цілому, так і окремих астрофізичних об'єктів, включаючи планети, зорі, зоряні скупчення, Галактики та скупчення галактик.

Є й задачі про роль критичних процесів в сучасній астрономії та астрофізиці. Це насамперед інфляційна космологічна модель, природа підходу та відходу зір до головної послідовності діаграми Герцшпрунга – Рессела.

Проаналізовано нейтронні зорі, еруптивні галактики. Багато задач приділено проблемам акреції речовини особливо для кратних зоряних систем. Придільена значна увага також основним фотометричним проблемам сучасної астрофізики, акцентується зв'язок між фізичною та астрофізичною фотометрією.

Багато задач присвячено астрономічним та астрофізичним проблемам планет, їх супутників та зір, включаючи кратні системи. Зокрема чимало місця виділено сонячній активності.

Цілий розділ виділений для задач практичної астрономії: знаходження координат світил, обчислення часу, основні використання горизонтальної та екваторіальних систем координат та зв'язок їх географічними координатами.

Частина задач описує небесну механіку. Показано, що її методи можуть використовуватись для будь-яких ділянок Всесвіту.

Розглянуто основні задачі практичної астрономії: зокрема основи вимірювальної апаратури та роль обчислень в отриманні достовірної астрофізичної інформації.

Наведені задачі на протон-протонні та CNO-цикли, що проходять в надрах зір. Показана роль ядерних реакцій в процесах формування там еволюції різноманітних астрофізичних об'єктів.

Нарешті включені задачі астроінженерного типу, які необхідні для виживання та еволюції людства, а також для освоєння та використання космічної матерії для розвитку як нових технологій так і для збереження життя на Землі.

## **Вступ**

*Дайте мені точку опори і я переверну весь світ.  
Архімед*

Навчально-методичний посібник «ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ З АСТРОНОМІЇ ТА АСТРОФІЗИКИ» призначений для студентів різних спеціальностей та спеціалізацій для яких викладаються такі дисципліни як «Астрономія», «Астрофізика», «Проблеми сучасної фізики та астрономії» тощо.

Необхідність видання такого підручника українською мовою обумовлена тим, що якщо збірників задач з астрономії є доволі багато, це і перекладені українською мовою збірники задач Воронцова-Вельямінова та Чепрасова, які, на жаль, не включають останні досягнення в цій галузі знань. Також слід зазначити видання підручників для загальноосвітніх закладів та олімпіадні задачі для школярів. Тому якщо з астрономічними задачами проблема більш-менш розв'язана, то з астрофізикою трохи не так. Єдиним збірником з астрофізики є збірник Мартынов Д. Я., Липунов В. М. Сборник задач по астрофизике. Москва: Наука, 1986. 128 с. Це прекрасний збірник був для свого часу та й зараз перебиває біля 80 відсотків програми з астрофізики. Загальних збірників задач з університетського курсу астрофізики та космології українською мовою взагалі нема.

В основу підручника покладені задачі, які були складені та підібрані Трохимчуком П. П. при читанні курсів «Астрономії» студентам математикам, фізикам, біологам; «Астрофізики» – студентам фізикам; «Проблеми сучасної фізики та астрономії» - студентам фізикам та біологам та окрім того олімпіадні задачі які пропонувались на обласних шкільних олімпіадах з астрономії. Також наведено 77 задач складених Шигпріним П. П., які були використані при викладанні курсу «Астрономія» для студентів фізиків, слухачів Малої Академії та пропонувались на обласних шкільних олімпіадах з астрономії. Задачі 1.1 – 1.21; 2.1 – 2.22; 3.7 – 3.20; 4.7 – 4.11; 5.5 – 5.10; 6.3 – 6.6; 7.6 – 7.10 були складені та запропоновані Шигоріним П. П.; всі інші задачі були підібрані, складені та підібрані Трохимчуком П.П.

Збірник складається з семи розділів.

У першому розділі наведені задачі з практичної астрономії. Богато задач присвячено вивчення карті зоряного неба, кульмінації світил, затемнення, обчислення кутових та геометричних розмірів астрономічних об'єктів тощо.

У другому розділі підібрані основні задачі небесної механіки. Зокрема розрахунок елементів орбіти, траєкторій небесних та земних тіл, включаючи астероїди, штучні супутники Землі, комети тощо.

У третьому розділі розглянуто інші задачі астрономії, зокрема задачі з акреції небесних об'єктів. Також включені астроінженерні задачі, проблема знаходження інших планет та планет придатних для життя.

Четвертий розділ присвячений задачам практичної астрофізики. Зокрема, основні астрофізичні закони, астрономічна та астрофізична апаратура, включаючи елементи рентгенівської та гамма астрономії тощо.

У п'ятому розділі наведені основи загальної астрофізики, включаючи фізику планет, зір, галактик, подвійні та змінні зорі, спектральний аналіз планетарних туманностей, зір та галактик.

Шостий розділ присвячений основним задачам космології, включаючи елементи теорії відносності та застосування їх в астрофізиці. Наведено задачі з фізики чорних зір, темної матерії та темної енергії.

У сьомому розділі проаналізовано змішані задачі астрофізики. Зокрема спалахи зір, астрономічно-астрофізичні задачі.

## Розділ 1. Практична астрономія

**1.1.** На якій широті у день літнього сонцестояння висота Сонця в момент нижньої кульмінації дорівнює  $-6^\circ$ ?

*Розв'язок*

У момент нижньої кульмінації висота світила  $h_H$  пов'язана із його схиленням  $\delta$  та широтою спостерігача співвідношенням:

$$h_H = \varphi + \delta - 90^\circ.$$

У день літнього сонцестояння схилення Сонця становить  $\delta = 23^\circ 26'$ . Тоді, якщо висота Сонця в нижній кульмінації дорівнює  $h_H = -6^\circ$ , то географічна широта спостерігача

$$\begin{aligned} \varphi &= 90^\circ - h_H - \delta = \\ &= 90^\circ + 6^\circ - 23^\circ 26' = 60^\circ 34'. \end{aligned}$$

Зауважимо, що якщо значення висоти Сонця в нижній кульмінації  $-6^\circ \leq h_H \leq 0^\circ$ , то у даній місцевості спостерігаються білі ночі.

**1.2.** Упродовж ночі двічі спостерігалася кульмінація певної зорі: у верхній кульмінації її висота дорівнювала  $80^\circ$ , а у нижній становила  $60^\circ$ . Визначити широту місця спостереження та пору року, коли воно проводилося. Зробити схематичний рисунок.

*Розв'язок*

У момент нижньої кульмінації висота світила  $h_H$  пов'язана із його схиленням  $\delta$  та широтою спостерігача співвідношенням

$$h_H = \varphi + \delta - 90^\circ.$$

У момент верхньої кульмінації висота світила  $h_B$  пов'язана із його схиленням  $\delta$  та широтою спостерігача співвідношеннями

$$\begin{aligned} h_B &= 90^\circ - \varphi + \delta \quad (\text{кульмінація до півдня}), \\ h_B &= 90^\circ + \varphi - \delta \quad (\text{кульмінація до півночі}). \end{aligned}$$

Виключимо із цих співвідношень невідоме схилення світила. Таким чином маємо два розв'язки для широти:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{h_B + h_H}{2}, & \varphi_2 &= \frac{180^\circ - h_B + h_H}{2}. \\ \varphi_1 &= \frac{80^\circ + 60^\circ}{2} = 70^\circ, & \varphi_2 &= \frac{180^\circ - 80^\circ + 60^\circ}{2} = 80^\circ. \end{aligned}$$

Схематичне зображення одержаних розв'язків на моделі небесної сфери має вигляд Рис. 1.1.

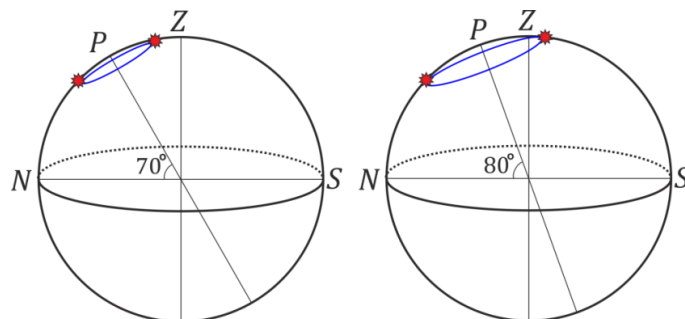


Рис. 1.1.

**1.3.** У результаті спостережень за рухом Юпітера упродовж доби було виявлено, що планета перебувала на висоті  $45^\circ$  у верхній кульмінації на південь від zenіту і на висоті  $2^\circ$  у нижній кульмінації. Оцініть час, від моменту даного спостереження, через який Юпітер зійде над

горизонтом у точці сходу. Нахилом орбіти Юпітера до екліптики можна знехтувати. Період обертання Юпітера навколо Сонця становить 11.86 років.

*Розв'язок*

Оскільки нахилом орбіти Юпітера до екліптики можна знехтувати, то вважаємо, що планета рухається по екліптиці. Небесні світила сходять у точці сходу, якщо вони перебувають на небесному екваторі. Знайдемо положення Юпітера на екліптиці. Для цього розрахуємо схилення Юпітер на момент спостережень. Використаємо співвідношення між висотою світила та його схиленням:

$$h_H = \varphi + \delta - 90^\circ, \quad h_B = 90^\circ - \varphi + \delta.$$

Звідси

$$\delta = \frac{h_B + h_H}{2} = \frac{45^\circ + 2^\circ}{2} = 23.5^\circ = 23^\circ 30'.$$

Таким чином Юпітер перебуває у точці літнього сонцестояння. Час руху до небесного екватора становить чверть періоду обертання навколо Сонця. Отже, шуканий час

$$t = \frac{T}{4} = \frac{11.86 \text{ років}}{4} = 2.965 \text{ року} = 1083 \text{ доби.}$$

**1.4.** Висота Сонця над горизонтом в істинний полудень 21 грудня дорівнює  $15^\circ 44'$ . Визначте географічну широту місця спостереження. Зробити схематичне креслення умови задачі на моделі небесної сфери.

*Розв'язок*

В істинний полудень Сонце перебуває у верхній кульмінації. 21 грудня його схилення становить  $\delta = -23^\circ 26'$ . Використаємо співвідношення між висотою світила та його схиленням:

$$h_B = 90^\circ - \varphi + \delta.$$

Звідси:

$$\varphi = 90^\circ + \delta - h_B = 90^\circ - 23^\circ 26' - 15^\circ 44' = 50^\circ 50'.$$

На даній широті знаходиться територія Волині. Схематичне креслення умови задачі на моделі небесної сфери має наступний вигляд (Рис. 1.2).

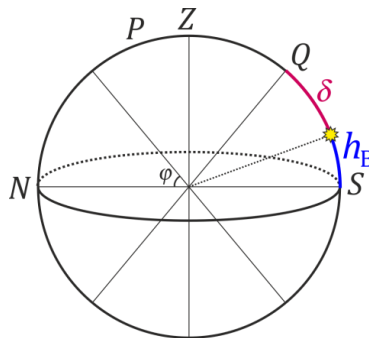


Рис. 1.2.

**1.5.** 11 січня екваторіальні координати планети Марс несуттєво змінюються поблизу значень:  $\delta = +2^\circ 30'$ ,  $\alpha = 0^{\text{h}} 25^{\text{m}}$ . Оцінити максимальну висоту над горизонтом на якій може спостерігатися планета у цей день на території Волині. Середня широта Волині  $\varphi = 50^\circ 30'$ . У якій частині небесної сфери можна спостерігати планету на максимальній висоті? Враховуючи, що пряме піднесення Сонця 11 січня становить  $\alpha_\odot = 19^{\text{h}} 30^{\text{m}}$ , оцініть місцевий сонячний час, коли Марс перебуватиме на максимальній висоті.

*Розв'язок*

Планета перебуває на максимальній висоті у момент верхньої кульмінації

$$h_{\max} = 90^\circ - \varphi + \delta = 90^\circ - 50^\circ 30' + 2^\circ 30' = 42^\circ.$$

У момент верхньої кульмінації світило перебуває на півдні.

Знайдемо зоряний час верхньої кульмінації Марса

$$s = \alpha + t = 0^h 25^m + 0^h = 0^h 25^m.$$

З іншого боку:

$$s = \alpha_{\odot} + t_{\odot} = 19^h 30^m + t_{\odot} = 0^h 25^m.$$

Звідси:

$$t_{\odot} = 0^h 25^m - 19^h 30^m = -19^h 05^m = 04^h 55^m.$$

Таким чином, місцевий сонячний час верхньої кульмінації Марса

$$T_{\odot} = t_{\odot} + 12^h = 04^h 55^m + 12^h = 16^h 55^m.$$

Отже, о 5 годині вечора Марс перебуватиме у південній частині зоряного неба на висоті  $42^\circ$ .

**1.6.** Деякого дня у році на території Волині (середня широта  $50^\circ 30'$ ) мінімальна довжина сонячної тіні від стовпа висотою 1.0 м становить 3.1 м. Розрахуйте схилення Сонця у цей день та оцініть відповідну календарну дату. При розрахунках вважайте Сонце точковим об'єктом, а явищем атмосферної рефракції знехтуйте.

*Розв'язок*

Мінімальна довжина сонячної тіні від стовпа буде відкидатися у справжній полудень, коли Сонце перебуватиме у верхній кульмінації. Висоту Сонця у верхній кульмінації знаходимо з прямокутного трикутника (Рис. 1.3):

$$\tan h_B = \frac{H}{L} = \frac{1.0}{3.1} = 0.32,$$

$$h_B = 17.9^\circ.$$

Рис.1.3.

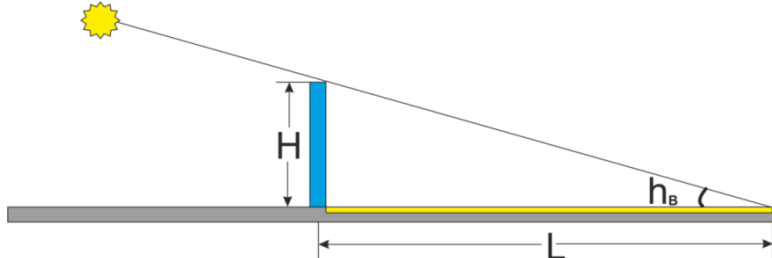


Рис. 1.3.

Для знаходження схилення Сонця у цей момент скористаємося зв'язком між екваторіальними та горизонтальними координатами у момент верхньої кульмінації для північної півкулі

$$h_B = 90^\circ - \varphi + \delta_{\odot}.$$

Звідси:

$$\delta_{\odot} = h_B - 90^\circ + \varphi = 17.9^\circ - 90^\circ + 50.5^\circ = -21.6^\circ.$$

Наближено схилення Сонця можемо розрахувати за формулою:

$$\delta_{\odot}(n) = 23.45^\circ \sin\left(\frac{360^\circ n}{356.2422}\right).$$

Тоді знайдемо номер дня від 21 березня:

$$-21.6^\circ = 23.45^\circ \sin\left(\frac{360^\circ n}{356.2422}\right),$$

$$\frac{360^\circ n}{356.2422} = (-1)^k \arcsin(-0.9211) + \pi k.$$

Знайдемо два найближчі номери дня:



$$\frac{360^\circ n_1}{356.2422} = 247^\circ, \quad n_1 = 251,$$
$$\frac{360^\circ n_2}{356.2422} = 293^\circ, \quad n_2 = 298.$$

Відповідні дати: 27 листопада 2019 року та 13 січня 2020 року.

**1.7.** Зоря Вега знаходиться у верхній кульмінації о  $20^h 00^m 00^s$  за сонячним часом. О котрій годині відбудеться її нижня кульмінація через 8 днів?

*Розв'язок*

У момент верхньої кульмінації зоряний час дорівнює прямому піднесенню зорі:

$$s = \alpha.$$

Відповідне значення сонячного часу одержимо зі співвідношення:

$$s = \alpha_\odot + t_\odot = \alpha.$$

Тоді сонячний час верхньої кульмінації

$$T_\odot = t_\odot + 12^h = \alpha - \alpha_\odot + 12^h = 20^h 00^m.$$

Через 8 днів пряме піднесення Сонця зміниться на величину

$$\Delta\alpha_\odot = \frac{4^m}{\text{добу}} \times 8 \text{ діб} = 32^m.$$

Тоді верхня кульмінація Веги через 8 діб відбудеться о

$$T'_\odot = t'_\odot + 12^h = \alpha - \alpha'_\odot + 12^h = \alpha - (\alpha_\odot + 32^m) + 12^h = 19^h 28^m.$$

Нижня кульмінація Веги через 8 днів відбудеться на 12 годин раніше верхньої, тобто о

$$T''_\odot = T'_\odot - 12^h = 19^h 28^m - 12^h = 07^h 28^m.$$

**1.8.** У південній Америці (Чилі) розташована обсерваторія «Ла-Сілья» (географічні координати:  $29,25^\circ$  пд. ш. та  $70,73^\circ$  зх. д.), яка є складовою частиною Європейської південної обсерваторії. 25 лютого 2017 року о 22:30 за поясним часом обсерваторії заплановано початок онлайн-трансляції рідкісного астрономічного явища: поглинання чорною дірою газової хмарини. Розрахуйте дату та час початку онлайн-трансляції за київським часом.

*Розв'язок*

Для розрахунку різниці київського часу та часу обсерваторії розрахуємо номер поясу, у якому розташована Ла-Сілья.

$$N = \frac{\lambda}{15^\circ} = \frac{-70.73^\circ}{15^\circ} = -4.7 = -5.$$

Всесвітній час онлайн-трансляції

$$T_0 = T_{\text{Ла-Сілья}} - N = 22:30 - (-5 \text{ год}) = 27:30.$$

Звідси знаходимо київський час трансляції

$$T_{\text{Київ}} = T_0 + 2 \text{ год} = 27:30 + 2 \text{ год} = 29:30 = 05:30.$$

Таким чином, за київським часом онлайн-трансляція почнеться о 05:30 наступної доби (26 лютого).

**1.9.** У 2020 році у м. Токіо (Японія) були проведені XXXII літні Олімпійські ігри. Церемонія відкриття ігор розпочалася 24 липня о 19:00 за поясним часом Токіо (географічні координати:  $35^\circ 41'$  пн. ш.,  $139^\circ 40'$  сх. д.). Розрахуйте дату та час початку церемонії за київським часом.

*Розв'язок*

Знайдемо різницю в поясному часі між Києвом та Токіо. Місцевість з довготою  $139^\circ 40'$  сх. д. знаходиться у +9 годинному поясі:

$$139^\circ/15^\circ = 9.27.$$

Всесвітній час на момент 19:00 у Токіо становить:

$$T_0 = 19:00 - 9^h = 10:00.$$

Оскільки київський час є часом у +2 годинному поясі, то відповідний київський час

$$T_{\text{Київ}} = T_0 + 2^h = 10:00 + 2^h = 12:00.$$

Таким чином початок церемонії відкриття XXXII літніх Олімпійських ігор за київським часом 12:00. Дата та ж сама – 24 липня.

**1.10.** Осьовий та орбітальний періоди обертання Землі становлять  $23^h56^m$  та  $8765^h48^m$  відповідно. Розрахуйте тривалість сонячної доби на Землі. Як би змінилась тривалість доби, якщо б обертання Землі було ретроградним?

*Розв'язок*

Тривалість сонячної доби у випадку прямого обертання:

$$\begin{aligned} S &= \frac{T_{\text{орб}} T_{\text{ос}}}{T_{\text{орб}} - T_{\text{ос}}} = \\ &= \frac{(8765 \times 60 + 48)^m \times (23 \times 60 + 56)^m}{(8765 \times 60 + 48)^m - (23 \times 60 + 56)^m} = 1440^m = 24^h. \end{aligned}$$

Тривалість сонячної доби у випадку ретроградного обертання:

$$\begin{aligned} S &= \frac{T_{\text{орб}} T_{\text{ос}}}{T_{\text{орб}} + T_{\text{ос}}} = \\ &= \frac{(8765 \times 60 + 48)^m \times (23 \times 60 + 56)^m}{(8765 \times 60 + 48)^m + (23 \times 60 + 56)^m} = 1432^m = 23^h52^m. \end{aligned}$$

**1.11.** Висота найбільшого вулкану на Марсі 27 км. З якої максимальної відстані його може розгледіти космонавт, якщо цю гору видно на краєві диска планети? Роздільна здатність людського ока складає  $1'$ .

*Розв'язок*

Для максимальної віддаленості космонавта від поверхні Марса  $L$  кутовий розмір вулкану  $d$  буде мінімальним і дорівнювати роздільній здатності людського ока  $1'$ .

Одержуємо:

$$\operatorname{tg} d = \frac{l}{L}, \quad \operatorname{tg} 1' = \frac{27 \text{ км}}{L}.$$

Звідси:

$$L = \frac{27 \text{ км}}{\operatorname{tg} 1'} = \frac{27 \text{ км}}{\operatorname{tg} \left( \frac{1}{60} \right)^\circ} = 92800 \text{ км}.$$

**1.12.** На краю диска Сонця із земної обсерваторії був зафіксований протуберанець, кутовий розмір якого дорівнює  $1'$ . Оцініть лінійний розмір протуберанця? Відстань від Землі до Сонця становить 149 600 000 км.

*Розв'язок*

Кутовий розмір протуберанця:

$$\operatorname{tg} d = \frac{l}{L}, \quad \operatorname{tg} 1' = \frac{l}{149\,600\,000 \text{ км}}.$$

Тоді лінійні розміри протуберанця:

$$\begin{aligned} l &= 149\,600\,000 \text{ км} \times \operatorname{tg} 1' = 149\,600\,000 \text{ км} \times \operatorname{tg} \left( \frac{1}{60} \right)^\circ \\ &= 43\,500 \text{ км}. \end{aligned}$$

**1.13.** Знайдіть відношення довжини сонячної тіні, яку відкидає Нептун до довжини тіні від Землі у момент, коли планети перебувають на середній відстані від Сонця. Середня відстань Нептуна та Землі відповідно дорівнюють 30 а.о та 1 а.о. Діаметр Нептуна у 3.88 разів більший земного.

*Розв'язок*

Зобразимо геометрію утворення сонячної тіні від планети (Рис. 1.4).

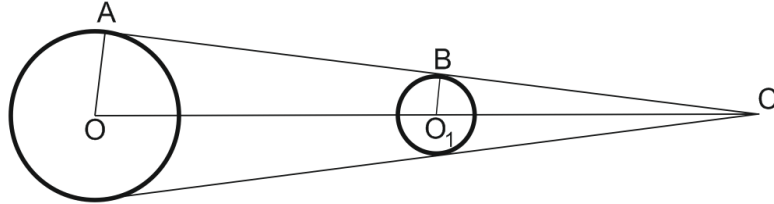


Рис. 1.4.

Тут  $OA = R_{\odot}$  – радіус Сонця,  $OO_1 = a$  – середня відстань планети від Сонця,  $O_1C = L$  – довжина тіні.

Із подібності трикутників  $OAC$  та  $O_1BC$  одержуємо співвідношення

$$\frac{O_1C}{OC} = \frac{O_1B}{OA} \quad \text{або} \quad \frac{L}{L+a} = \frac{R_{\text{планети}}}{R_{\odot}}.$$

З останнього співвідношення одержуємо

$$L = a \frac{R_{\text{планети}}}{R_{\odot} - R_{\text{планети}}} \cong a \frac{R_{\text{планети}}}{R_{\odot}}.$$

Таким чином, відношення довжини тіні Нептуна до довжини тіні Землі складає

$$\frac{L_{\text{Нептун}}}{L_{\text{Земля}}} = \frac{a_{\text{Нептун}} R_{\text{Нептун}}}{a_{\text{Земля}} R_{\text{Земля}}} = \frac{30}{1} \times 3.88 = 116.$$

**1.14.** На фото праворуч (автор Кріс Томас) зображена «Астрономічна

картинка дня», яка фігурувала на сайті космічного агентства NASA (<https://apod.nasa.gov>) 29 вересня 2010 р. Беручи до уваги, що фотографія зроблена з поверхні Землі, а кутові розміри Місяця та розмах крил літака дорівнюють  $30'$  та  $45$  м відповідно, оцініть на якій висоті над поверхнею Землі летить літак.



*Розв'язок*

Для оцінки будемо вважати, що крила літака закривають половину поверхні Місяця, тобто їх кутові розміри  $d = 15'$ . Тоді відстань від фотокамери до літака

$$L = \frac{l}{\text{tg } d} = \frac{45 \text{ м}}{\text{tg} \left( \frac{15}{60} \right)^{\circ}} = 10300 \text{ м.}$$

Зауважимо, як говорилося вище, при обчисленні тангенсів малих кутів ( $d \rightarrow 0$ ) можна скористатися наближеною схемою:

$$\text{tg } d \cong d(\text{рад}) = \frac{d''}{206\,265}.$$

Тоді:

$$\text{tg } 15' \cong \frac{15 \times 60''}{206\,265} = 0.00436332.$$

Точне значення становить:

$$\text{tg } 15' = 0.00436335.$$

**1.15.** На фото праворуч наведено зображення статуї «Христос–Спаситель» (Ріо-де-Жанейро, Бразилія) на фоні Місяця у повні. Статуя є 39,6 метрів заввишки та має розмах рук 28 метрів. Враховуючи, що середня відстань Місяця від Землі складає 384 400 км, а лінійний радіус Місяця становить 1737 км, оцініть відстань, з якої було зроблено знімок (відстань від статуї до фотографа).



*Розв'язок*

Геометрична схема утворення даного зображення має наступний вигляд (Рис. 1.6).

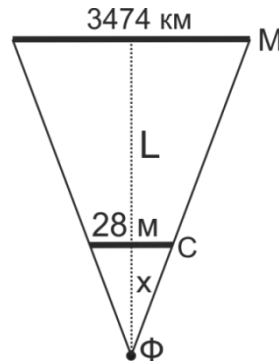


Рис. 1.6.

Із подібності трикутників одержуємо:

$$\frac{x}{L} = \frac{28 \text{ м}}{3474 \text{ км}}$$

Таким чином відстань, з якої було зроблено знімок (відстань від статуї до фотографа) становить:

$$x = \frac{28 \text{ м}}{3474 \text{ км}} \times 384\,400 \text{ км} = 3100 \text{ м} = 3.1 \text{ км}.$$

**1.16.** На знімку праворуч наведено зображення планети Сатурн одержане космічним телескопом Габбл у червні 2018 року. У цей момент планета знаходилася на відстані 1.6 млрд км від поверхні Землі і мала кутовий діаметр 15". Використовуючи дане зображення оцініть радіус зовнішнього кільця Сатурна, а також відстань від центра планети до щілини Кассіні. Відповідь запишіть у кілометрах.



*Розв'язок*

Спочатку встановимо масштаб малюнка. За допомогою лінійки знаходимо діаметр планети на зображенні. Він становить 2.35 см.

Знайдемо лінійний діаметр планети  $D$  за кутовим діаметром  $d$  і відстанню до планети  $L$ :

$$D = L \operatorname{tg} d = 1.6 \times 10^9 \text{ км} \times \operatorname{tg} \left( \frac{15''}{3600} \right) = 116\,355 \text{ км}.$$

Таким чином масштаб малюнка

$$\frac{116355 \text{ км}}{2.35 \text{ см}} = 49\,513 \frac{\text{км}}{\text{см}}$$

Вимірюємо діаметр зовнішнього кільця. Одержуємо значення 5.30 см. Таким чином, радіус зовнішнього кільця Сатурна становить

$$\frac{5.30 \text{ см}}{2} \times 49\,513 \frac{\text{км}}{\text{см}} = 131\,000 \text{ км.}$$

Аналогічно для щілини Кассіні. Діаметр 4.60 см. Таким чином, відстань від центра планети до щілини Кассіні становить

$$\frac{4.6 \text{ см}}{2} \times 49\,513 \frac{\text{км}}{\text{см}} = 114\,000 \text{ км.}$$

**1.17.** Використовуючи таблицю схилень Сонця, визначте дату початку і тривалість полярного дня на острові Діксон, географічна широта якого  $73^\circ$ .

*Розв'язок*

Безперервний полярний день розпочинається і триває у ті дні в році, коли Сонце не заходить під горизонт. Математично це означає, що висота Сонця у нижній кульмінації має бути невід'ємною:

$$h_{\odot H} \geq 0^\circ.$$

Як відомо, висота світила у нижній кульмінації пов'язана із його схиленням та широтою місця спостереження співвідношенням

$$h_H = \varphi + \delta - 90^\circ.$$

Одержуємо умову, яку має задовольняти схилення Сонця у ті дні, коли воно не заходить за горизонт:

$$\varphi + \delta_{\odot} - 90^\circ \geq 0.$$

Звідси знаходимо:

$$\delta_{\odot} \geq 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 73^\circ = 17^\circ.$$

За допомогою таблиці схилення Сонця (Додаток 1) знаходимо календарні дати для яких  $\delta_{\odot} = 17^\circ$ :

8 травня (початок полярного дня),

6 серпня (кінець полярного дня).

Тривалість безперервного полярного дня на острові Діксон складає 90 днів.

**1.18.** Фотокамера, яка нерухомо «націлена» на південну частину неба, щоденно упродовж року робить коротку експозицію о 12:00 середнього сонячного часу на одну і ту ж фотопластинку. Визначити і зобразити траєкторію, яку опише центр диска Сонця на фотопластинці. Позначити на рисунку положення Сонця в дні рівнодень та сонцестоянь. Оцінити поперечні розміри траєкторії.

Розв'язок

Річна траєкторія полуденного Сонця називається аналемою. Її вигляд нагадує вісімку і залежить від широти місця спостереження (Рис. 1.5).

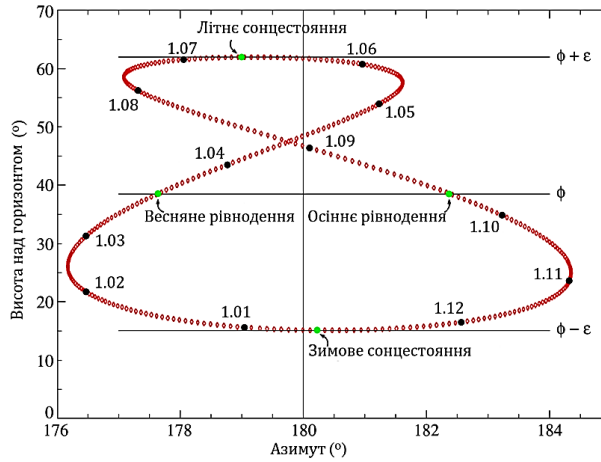


Рис. 1.5.

Нижче наведено аналему одержану з гринвіцької обсерваторії (зображення розміщене за адресою: [https://en.wikipedia.org/wiki/Analemma#/media/File:Analemma\\_Earth.png](https://en.wikipedia.org/wiki/Analemma#/media/File:Analemma_Earth.png)).

Така форма аналеми пов'язана із двома факторами: зміною схилення Сонця упродовж року у межах від  $-23.4^\circ$  до  $+23.4^\circ$ , що призводить до зміни висоти Сонця у верхній кульмінації та нерівномірністю істинного сонячного часу, що призводить до зміни азимута Сонця у полудень. Поперечні розміри аналеми:

Висота дорівнює різниці максимального та мінімального значень схилення Сонця  $23.4^\circ - (-23.4^\circ) = 46.8^\circ$ . Ширина дорівнює різниці максимального та мінімального значень рівняння часу, тобто різниці максимального випередження та відставання істинного сонячного часу від середнього  $14^m 17^s - (-16^m 24^s) = 30^m 41^s = 7.7^\circ$

**1.19.** Для трьох спостерігачів, які знаходяться: А) у місцевості з широтою  $\varphi = 45^\circ$ ; Б) на екваторі; В) на Північному полюсі, зобразити на моделі небесної сфери наступні елементи: полюс світу ( $P$ ); вісь світу ( $PP'$ ); небесний екватор ( $QQ'$ ); добову паралель світила; позначити точки, які відповідають верхній ( $B$ ) та нижній ( $H$ ) кульмінаціям світила (Рис. 1.6).

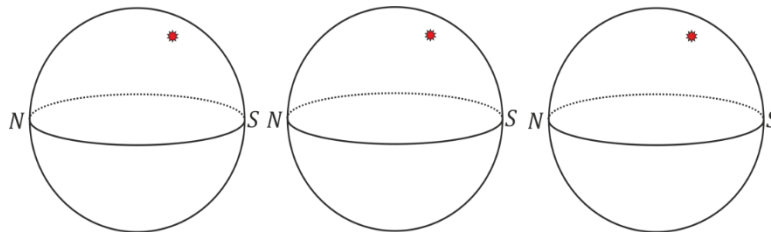


Рис. 1.6.

Розв'язок

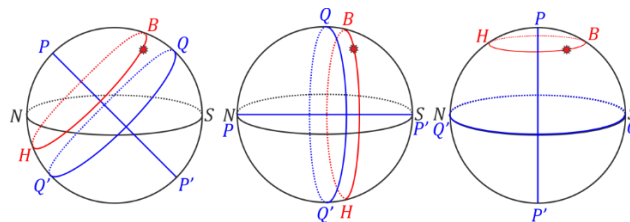


Рис. 1.7.

**1.20.** На Рис. 1.8 наведено фрагмент зоряного неба над Луцьком 11 січня 2019 року. Уважно вивчіть цей фрагмент та за допомогою карти зоряного неба і лінійки виконайте наступні завдання:

- a) Позначте на даному знімку наступні сузір'я: Лебідь, Ліра, Близнюки, Велика Ведмедиця, Оріон, Візничий, Дракон, Кассіопея, Мала Ведмедиця, Персей.
- b) Позначте на даному знімку Полярну зірку.
- c) Визначте екваторіальні координати (пряме піднесення та схилення) для наступних зір: Вега, Капелла, Рігель, Сиріус.
- d) У день проведення олімпіади екваторіальні координати планети Марс несуттєво змінюються поблизу значень:  $\delta = +2^{\circ}30'$ ,  $\alpha = 0^h 25^m$ . Розрахуйте та позначте на фрагменті зоряного неба положення Марса.
- e) На даному фрагменті зоряного неба також знаходиться зображення Місяця. Відомо, що він розміщений поруч із сузір'ям Водолія. Позначте на фрагменті зоряного неба положення Місяця.



Рис. 1.8.

Розв'язок

а) Див. фрагмент зоряного неба (Рис. 1.9).

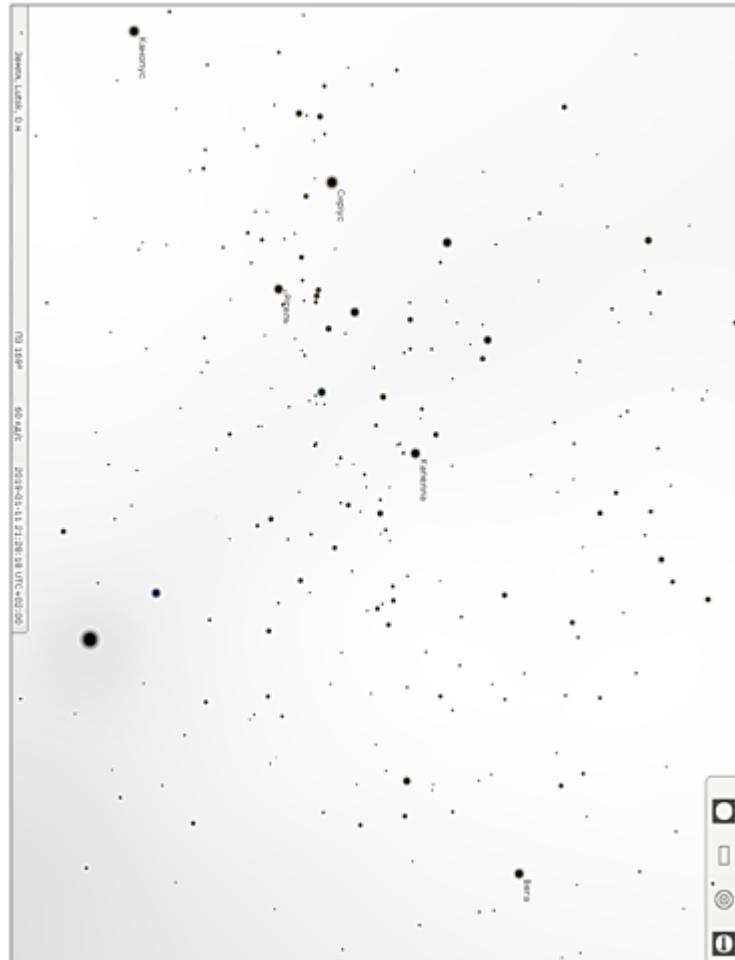


Рис. 1.9.

б) За допомогою карти зоряного неба (Рис. 1.10) знаходимо екваторіальні координати зір:

Проціон  $\alpha = 7^{\text{h}}40^{\text{m}}$ ,  $\delta = 5^{\circ}$ .

Капелла  $\alpha = 5^{\text{h}}15^{\text{m}}$ ,  $\delta = 45^{\circ}$ .

Бетельгейзе  $\alpha = 5^{\text{h}}55^{\text{m}}$ ,  $\delta = 7^{\circ}$ .

Рігель  $\alpha = 5^{\text{h}}15^{\text{m}}$ ,  $\delta = -8^{\circ}$ .

с) В кульмінації перебувають сузір'я, які перетинають небесний меридіан: Візничий, Оріон.

д) Див. фрагмент зоряного неба.

е) А) Місяць перебуває у сузір'ї Близнюки.

Б) У момент, коли було зроблено знімок зоряного неба, пояс Оріона знаходиться на небесному меридіані, тобто у верхній кульмінації. Зоряний час у цей момент дорівнює прямому піднесенню зір із поясу Оріона і становить

$$\frac{\alpha_{\text{Бетельгейзе}} + \alpha_{\text{Рігель}}}{2} = \frac{5^{\text{h}}55^{\text{m}} + 5^{\text{h}}15^{\text{m}}}{2} = 5^{\text{h}}35^{\text{m}}.$$



У момент, коли Місяць буде у верхній кульмінації, зоряний час буде становити  $7^{\text{h}}30^{\text{m}}$ .  
Таким чином, шуканий проміжок часу становить:

$$\Delta s = 7^{\text{h}}30^{\text{m}} - 5^{\text{h}}35^{\text{m}} = 1^{\text{h}}55^{\text{m}}.$$

Тобто приблизно через дві години.

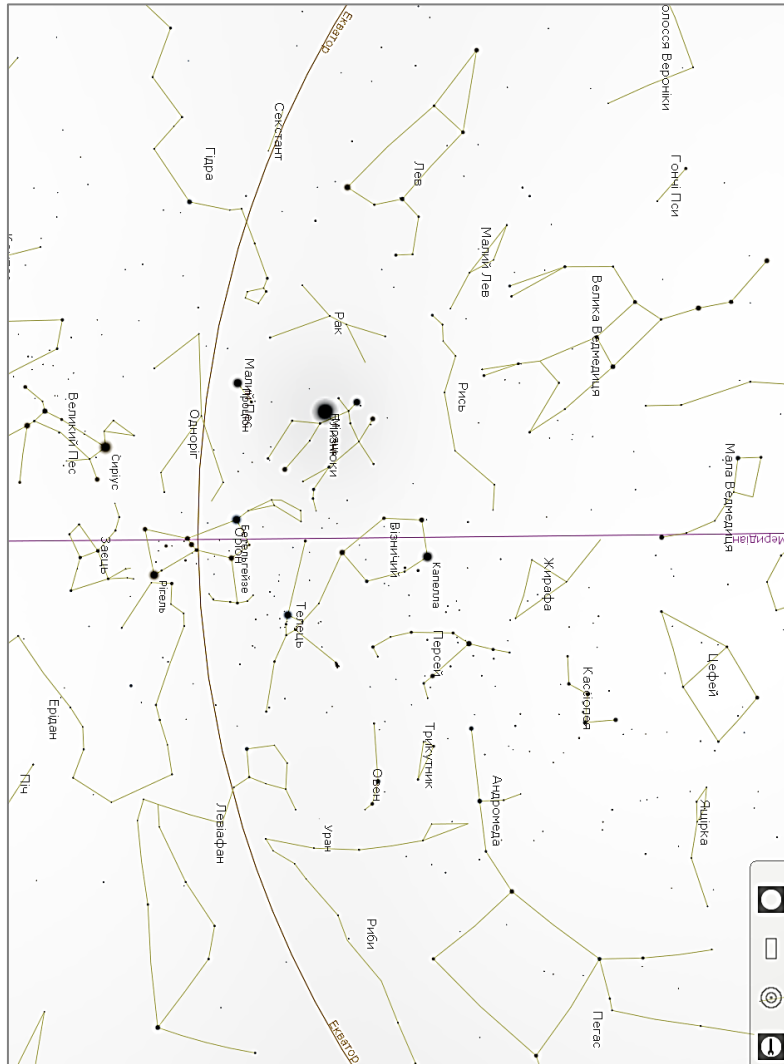


Рис. 1.10.

**1.21.** На Рис. 1.11 зображено фрагмент зоряного неба над Луцьком 15 січня 2015 року на момент часу  $01:37$ . Позначені на рисунку зорі Капелла та Арктур мають наступні екваторіальні координати:  $(\alpha_1 = 5^{\text{h}}17^{\text{m}}, \delta_1 = +46^\circ)$  та  $(\alpha_1 = 14^{\text{h}}16^{\text{m}}, \delta_1 = +19^\circ)$  відповідно. Уважно дослідіть це зображення і виконайте наступні завдання:

- А) Зобразіть на рисункові сузір'я Кассіопея, Волопас, Лев, Мала Ведмедиця.
- Б) Враховуючи, що планета Юпітер у цей момент має пряме сходження  $\alpha_1 = 9^{\text{h}}32^{\text{m}}$  розрахуйте та позначте його положення на рисунку.
- В) Обчисліть схилення Юпітера у розглянутий момент часу.



- б) Позначте на даному знімку Полярну зірку.  
Визначте екваторіальні координати (пряме піднесення та схилення) для наступних зір: Проціон, Капелла, Бетельгейзе, Сиріус, Рігель.
- с) Вкажіть назви сузір'їв, які перебувають в кульмінації.
- д) Зобразіть на фрагменті зоряного неба наступні астеризми:  
А) Зимовий трикутник (вершини:  $\alpha$  Великого Пса,  $\alpha$  Малого Пса,  $\alpha$  Оріона).  
Б) Зимове коло (вершини:  $\alpha$  Великого Пса,  $\alpha$  Малого Пса,  $\beta$  Близнюків,  $\alpha$  Близнюків,  $\beta$  Візничого,  $\alpha$  Візничого,  $\alpha$  Тельця,  $\beta$  Оріона).
- е) На даному фрагменті зоряного неба також знаходиться зображення Місяця. Екваторіальні координати Місяця у момент, коли було зроблено знімок зоряного неба становлять  $\alpha = 7^h 30^m$ ,  $\delta = 22^\circ$ .
- А) Вкажіть назву сузір'я у якому перебуває Місяць.  
Б) Оцініть мінімальний проміжок часу від моменту, коли було зроблено знімок зоряного неба, через який Місяць буде перебувати на максимальній висоті над горизонтом.

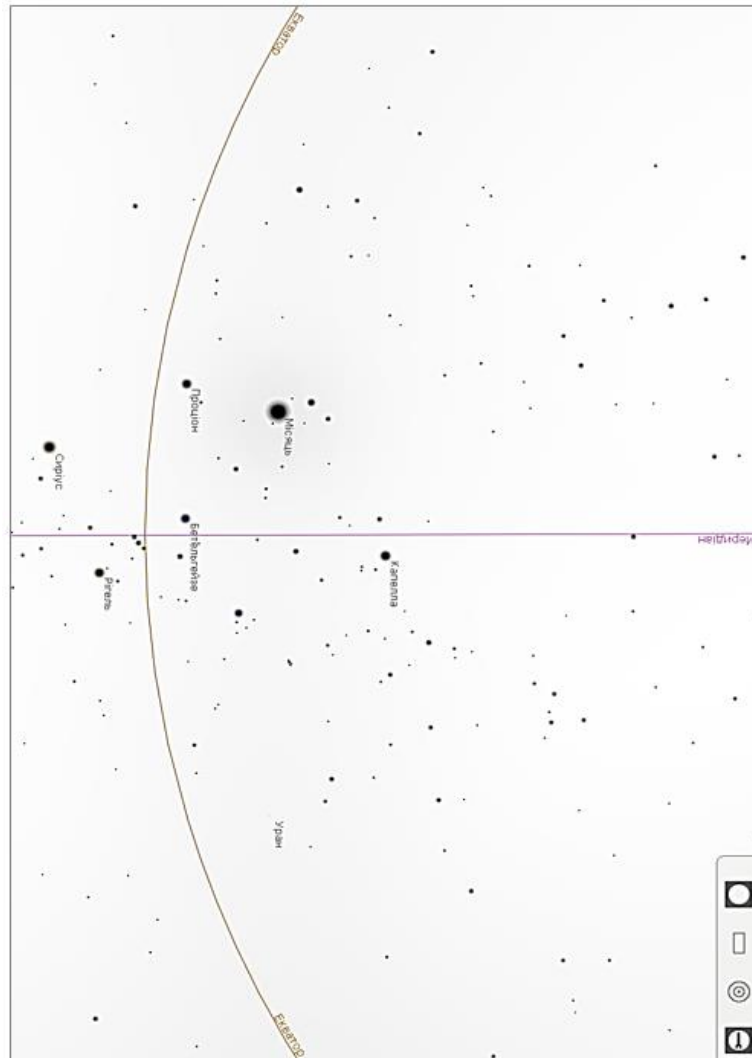


Рис. 1.13.

**1.24.** Знайдіть місцевий, та поясний час у Запоріжжі (II пояс,  $\lambda=35^\circ 10'$ ) в момент,

коли в Ташкенті (V пояс) на міському годиннику буде  $8^{\text{h}} 40^{\text{m}}$  вечора.

**1.25.** Яка приблизно повинна бути кількість зір нульової величини для того, щоб їх світло замінило сумарне світло зір від 19-ої до 20-ої зоряної величини, якщо їх кількість рівна  $4,4 \cdot 10^8$ ?

**1.26.** Яку умову повинно задовольняти сходження  $\delta$  зірки, щоб вона не заходила на широті  $\varphi$  ?

**1.27.** Радіостанція експедиції в момент  $9^{\text{h}} 7^{\text{m}} 13^{\text{s}}$  середнього місцевого часу прийняла радіосигнал “12 годин за поясним часом VIII пояса”. Визначте за цими даними географічну довготу місцезнаходження експедиції та поясний час експедиції.

**1.28.** Яку умову повинно задовільняти сходження  $\delta$  зірки, щоб вона не сходила на широті  $\varphi$  ?

**1.29.** Визначити наближено місцевий зоряний час 24 квітня в момент  $T_m = 20^{\text{h}} 39^{\text{m}}$  за середнім часом.

**1.30.** В даний момент зоряний час  $s = 6^{\text{h}} 38^{\text{m}}$ . Визначити пряме сходження світил, які будуть знаходитись у верхній кульмінації через  $2^{\text{h}} 10^{\text{m}}$ .

**1.31.** Обчислити місцевий середній час 12 січня в момент спостереження верхньої кульмінації зорі з прямим сходженням  $\alpha = 5^{\text{h}} 13^{\text{m}}$ .

**1.32.** Радіостанція експедиції в момент  $8^{\text{h}} 7^{\text{m}} 13^{\text{s}}$  середнього місцевого часу прийняла радіосигнал “11 годин за поясним часом VIII пояса”. Визначте за цими даними географічну довготу місцезнаходження експедиції та поясний час експедиції.

**1.33.** Зірок 6-ої величини на північному небі 2000. В скільки разів їх загальне світло сильніше світла Сіріуса, яскравість якого – 1,6 зоряної величини?

**1.34.** Знайти геометричне місце точок сфери, для яких астрономічна довгота рівна прямому сходженню.

**1.35.** Знайдіть місцевий та поясний час у Запоріжжі (II пояс,  $\lambda = 35^{\circ} 10'$ ) в момент, коли в Ташкенті (V пояс) на міському годиннику буде  $5^{\text{h}} 40^{\text{m}}$  вечора.

**1.36.** Знайти геометричне місце точок сфери, для яких астрономічна широта рівна схиленню.

**1.37.** Обчислити поясний час у Львові в справжній полудень 1 жовтня. Знайти різницю між поясний і середнім часом у Львові, якщо відомо, що він знаходиться у другому поясі і його довгота  $\lambda = 1^{\text{h}} 36^{\text{m}}, 1$ . Рівняння часу 1 жовтня  $\eta = -10^{\text{m}}, 0$ .

**1.38.** Знайдіть пряме сходження тієї зорі, яка проходить через південну частину меридіана в Полтаві ( $\lambda = 2^{\text{h}} 18^{\text{m}}, 3$ ) в той момент, коли в місті Фрунзе ( $\lambda = 4^{\text{h}} 58^{\text{m}}, 3$ ) зоря  $\varepsilon$  В. Ведмедиці спостерігається у нижній кульмінації.

**1.39.** Обчислити місцевий середній час 21 вересня в момент спостереження верхньої кульмінації зорі з прямим сходженням  $\alpha = 4^{\text{h}} 13^{\text{m}}$ .

**1.40.** Паралакс Сонця  $8'', 8$ , а видимий радіус Сонця рівний  $16' 1''$ . У скільки разів радіус Сонця більше радіуса Землі? Який діаметр Сонця?

**1.41.** Обчислити поясний час у Львові в справжній полудень 1 липня. Знайти різницю між поясний і середнім часом у Львові, якщо відомо, що він лежить у другому поясі і його довгота  $\lambda = 1^{\text{h}} 36^{\text{m}}, 1$ . Рівняння часу 1 жовтня  $\eta = -4^{\text{m}}, 0$ .

**1.42.** Користуючись наближеним способом переведення зоряного часу в середній час і навпаки, знайдіть зоряний час 24 лютого в момент  $16^{\text{h}} 37^{\text{m}}$  середнього часу.

**1.43.** Зоря, яка не заходить має висоту  $20^{\circ}$  в нижній кульмінації і  $50^{\circ}$  у верхній. Знайти схилення цієї зорі і широту місця спостереження. *Вказівка:* намалюв. малюнок.

- 1.44.** В Харкові полудень, а в Казані в цей же час годинник показує  $21^{\text{h}} 46^{\text{m}}$ . Яка довгота Казані від Грінвіча? (Довгота Харкова від Грінвіча  $2^{\text{h}} 25^{\text{m}}$ ).
- 1.45.** Якщо сьогодні деяка зоря кульмінавала в  $8^{\text{h}} 0^{\text{m}}$  вечора, то коли вона буде кульмінавати через 10 днів?
- 1.46.** Вивести три формули перетворення горизонтальних координат  $A$  і  $z$  в екваторіальні  $t$  і  $\delta$  для місцевості з широтою  $\varphi$ . Привести їх до логарифмічного виду.
- 1.47.** Знайти зенітну відстань і азимут  $\alpha$  Дракона ( $\alpha = 14^{\text{h}} 1^{\text{m}} 57^{\text{s}}$ ,  $\delta = 64^{\circ} 48',8$ ) в Ленінграді ( $\varphi = 59^{\circ} 56',6$ ) в  $16^{\text{h}} 24^{\text{m}} 33^{\text{s}}$  зоряного часу.
- 1.48.** 11 лютого по поясному часу Сонце зійшло в  $7^{\text{r}} 6^{\text{xb}}$ , зайшло в  $16^{\text{r}} 24^{\text{xb}}$ . Чому рівна різниця між поясним і середнім місцевим часом даного місця? *Вказівка:* 11 лютого – максимум рівняння часу  $+14^{\text{m}}$ .
- 1.49.** Обчислити місцевий середній час 12 січня в момент спостереження верхньої кульмінації зорі з прямим сходженням  $= 5^{\text{h}} 13^{\text{m}}$ .
- 1.50.** Чому рівне максимально можливе число неділь у лютому, для якого і при яких умовах?
- 1.51.** Визначте періоди часу в році, в які можна спостерігати від  $21^{\text{h}}$  до  $24^{\text{h}}$ : спіральну галактику М31 ( $\alpha = 0^{\text{h}} 40^{\text{m}},0$ ;  $\delta = 41^{\circ} 00'$ ), кульове зоряне скупчення М22 ( $\alpha = 18^{\text{h}} 33^{\text{m}},3$ ;  $\delta = -23^{\circ} 58'$ ) у вашій місцевості.
- 1.52.** Обчислити поясний час у Львові в справжній полудень 1 жовтня. Знайти різницю між поясним і середнім часом у Львові, якщо відомо, що він лежить у другому поясі і його довгота  $\lambda = 3^{\text{h}} 36^{\text{m}},1$ . Рівняння часу 1 жовтня  $\eta = -10^{\text{m}},0$ .
- 1.53.** Зірка Малої Ведмедиці ( $\alpha = 15^{\text{h}} 20^{\text{m}} 49^{\text{s}}$ ) спостерігалась в нижній кульмінації, причому зоряний годинник в цей час показував  $3^{\text{h}} 39^{\text{m}} 33^{\text{s}}$ . Яка поправка годинника?
- 1.54.** В Харкові полудень, а в Казані в цей же час годинник показує  $12^{\text{h}} 46^{\text{m}}$ . Яка довгота Казані від Грінвіча? (Довгота Харкова від Грінвіча  $2^{\text{h}} 25^{\text{m}}$ ).
- 1.55.** Радіостанція експедиції в момент  $9^{\text{h}} 7^{\text{m}} 13^{\text{s}}$  середнього місцевого часу прийняла радіосигнал “4 годин за поясним часом VIII поясу”. Визначте за цими даними географічну довготу місцезнаходження експедиції та поясний час експедиції.
- 1.56.** 26 вересня Сонце в пункті з довготою  $\lambda = 2^{\text{r}} 30^{\text{xb}}$  сходить по середньому місцевому часу в  $5^{\text{r}} 51^{\text{xb}}$  ранку, а заходить в  $5^{\text{r}} 51^{\text{xb}}$  вечора. Чому рівне в цей день рівняння часу?
- 1.57.** В Харкові полудень, а в Казані в цей же час годинник показує  $10^{\text{h}} 46^{\text{m}}$ . Яка довгота Казані від Грінвіча? (Довгота Харкова від Грінвіча  $2^{\text{h}} 25^{\text{m}}$ ).
- 1.58.** Зірка Малої Ведмедиці ( $\alpha = 15^{\text{h}} 20^{\text{m}} 49^{\text{s}}$ ) спостерігалась в нижній кульмінації, причому зоряний годинник в цей час показував  $3^{\text{h}} 39^{\text{m}} 33^{\text{s}}$ . Яка поправка годинника?
- 1.59.** В Харкові полудень, а в Казані в цей же час годинник показує  $12^{\text{h}} 46^{\text{m}}$ . Яка довгота Казані від Грінвіча? (Довгота Харкова від Грінвіча  $2^{\text{h}} 25^{\text{m}}$ ).
- 1.60.** Знайти поясний час в Харкові ( $\lambda = 2^{\text{h}} 24^{\text{m}} 56^{\text{s}}$ , II пояс) для моменту  $18^{\text{h}} 24^{\text{m}} 30^{\text{s}}$  місцевого середнього часу.
- 1.61.** У деякому населеному пункті в  $20^{\text{h}} 35^{\text{m}}$  середнього часу було прийнято радіосигнал “19 годин за московським часом”. Визначте географічну довготу пункту і номер годинного пояса, в якому цей пункт лежить
- 1.62.** В Харкові полудень, а в Казані в цей же час годинник показує  $12^{\text{h}} 46^{\text{m}}$ . Яка довгота Казані від Грінвіча? (Довгота Харкова від Грінвіча  $2^{\text{h}} 25^{\text{m}}$ ).
- 1.63.** Визначити день року, в який в  $8^{\text{h}} 30^{\text{m}}$  вечора у верхній кульмінації знаходиться зоря :1) Вега ; 2) Альдебаран .

- 1.64.** Обчисліть зоряний і середній час Дніпра ( $\lambda = 2^{\text{h}} 20^{\text{m}}, 0$ ) 19 лютого в той момент, коли в Грінвічі зоря Кастор спостерігається у верхній кульмінації.
- 1.65.** Якщо сьогодні деяка зоря кульмінувала о 8-й годині вечора, то коли вона кульмінує через 10 діб.
- 1.66.** Користуючись наближеним способом переведення зоряного часу в середній час і навпаки, знайдіть середній час 1 вересня в момент  $13^{\text{h}} 42^{\text{m}}$  зоряного часу.
- 1.67.** Які основні лінії та точки небесної сфери?
- 1.68.** Як розташовані основні лінії та точки небесної сфери, якщо спостерігач стоїть лицем на північ?
- 1.69.** Чому шлях по екліптиці Місяць проходить за 27,32 діб, а Сонце – за рік?
- 1.70.** З якими явищами на небесній сфері пов'язані поняття «полудень» та «північ»?
- 1.71.** Чому по знаку схилення світила неможливо відокремити, чи заходить воно чи не заходить?
- 1.72.** Чому зірки завжди сходять і заходять в тих самих точках горизонту, а Сонце і Місяць — ні?
- 1.73.** Чому пряме сходження відраховується від точки весняного рівнодення у бік, протилежному напрямку обертання небесної сфери?
- 1.74.** За яких умов і де на Землі: висота зорі над горизонтом протягом доби не змінюється?
- 1.75.** Паралакс Сонця  $8'', 8$ , а видимий радіус Сонця рівний  $16' 1''$ . В скільки разів радіус Сонця більший за радіус Землі? Який діаметр Сонця?

**Розділ 2. Небесна механіка**

**2.1.** Людина, що перебуває у стані спокою на екваторі Землі, рухається із певною швидкістю відносно її центра. Космонавт, що стоїть на екваторі Місяця, рухається із певною швидкістю відносно центра Місяця. У скільки разів відрізняються швидкості людини та космонавта, якщо відомо, що радіус Землі у 4 рази більший за радіус Місяця.

*Розв'язок*

Лінійна швидкість тіла на екваторі планети

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Тоді

$$\frac{v_3}{v_M} = \frac{\frac{2\pi R_3}{T_3}}{\frac{2\pi R_M}{T_M}} = \left(\frac{R_3}{R_M}\right) \times \left(\frac{T_M}{T_3}\right)$$

Період обертання Місяця навколо осі збігається з його орбітальним періодом обертання навколо Землі (синхронне обертання) і дорівнює 27.3 доби.

Остаточно

$$\frac{v_3}{v_M} = \left(\frac{4}{1}\right) \times \left(\frac{27.3}{1}\right) = 109 \text{ разів.}$$

**2.2.** Корабель пливе уздовж меридіана. Моряк за допомогою секстанта вимірює висоту Полярної зірки. За добу її висота змінилася з  $55^\circ$  до  $45^\circ$ . З якою швидкістю пливе корабель і у який бік, якщо вважати, що його швидкість постійна?

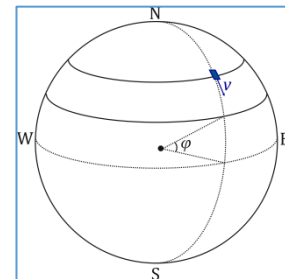
*Розв'язок*

Як відомо (теорема про висоту полюсу світу над горизонтом), висота Полярної зорі дорівнює географічній довготі місцевості. Таким чином корабель пливе уздовж меридіана у напрямі зменшення широти (від N до S) з місцевості із широтою  $\varphi_1 = 55^\circ$  у місцевість із широтою  $\varphi_2 = 45^\circ$ . Знайдемо шлях, який має подолати корабель пливучи з постійною швидкістю

$$l = vt = 2\pi R_3 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{360^\circ}$$

Звідси

$$v = 2\pi R_3 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{360^\circ t} = 2\pi \times 6378 \times \frac{55^\circ - 45^\circ}{360^\circ \times 24} = 46.4 \frac{\text{км}}{\text{год}}$$



**2.3.** Світовий рекорд зі стрибків у висоту на Землі становить 2.45 м. Визначте, на яку відповідну висоту зміг би підскочити рекордсмен в умовах гравітації Місяця? Маса Землі у 81 разів більша маси Місяця, відношення радіуса Землі до радіуса Місяця дорівнює 3.66.

*Розв'язок*

Максимальна висота стрибка:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Поверхнева гравітація:

$$g = G \frac{M}{R^2}.$$

Таким чином одержуємо:

$$\frac{h_M}{h_3} = \frac{g_3}{g_M} = \left(\frac{M_3}{M_M}\right) \times \left(\frac{R_M}{R_3}\right)^2 = \left(\frac{81}{1}\right) \times \left(\frac{1}{3.66}\right)^2 = 6.$$

Отже максимальна висота стрибка на поверхні Місяця могла би бути

$$h_M = 6 \times 2.45 \text{ м} = 14.7 \text{ м}.$$

**2.4.** Як зміниться прискорення вільного падіння на поверхні планети, якщо, маса планети збільшиться в  $m$  разів, а середня густина планети збільшиться в  $n$  разів?

*Розв'язок*

Прискорення вільного падіння:

$$g = G \frac{M}{R^2}.$$

Виразимо радіус планети через густину та масу. Оскільки:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3},$$

то

$$R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3}.$$

Таким чином, залежність прискорення вільного падіння від маси планети  $M$  та її густини  $\rho$  має вигляд

$$g \sim MR^{-2} \sim (M\rho^2)^{1/3}.$$

Якщо маса планети збільшиться в  $m$  разів, а середня густина планети збільшиться в  $n$  разів, то

$$g' = g(m \cdot n^2)^{1/3}.$$

**2.5.** На малюнку зображено два фотознімки Місяця, зроблені однією фотокамерою, встановленою на телескопі, що знаходиться на поверхні Землі. Перший знімок зроблений в момент, коли Місяць знаходився в перигеї, другий – в апогеї (Рис. 2.1). На основі цих даних визначте ексцентриситет орбіти Місяця.



Рис. 2.1.

*Розв'язок*

Відомо, що ексцентриситет орбіти пов'язаний із відстанню до об'єкта у перигеї та апогеї співвідношенням:



$$e = \frac{r_A - r_{\Pi}}{r_A + r_{\Pi}} = \frac{\frac{r_A}{r_{\Pi}} - 1}{\frac{r_A}{r_{\Pi}} + 1}$$

З геометричних міркувань випливає, що

$$\frac{r_A}{r_{\Pi}} = \frac{d_{\Pi}}{d_A},$$

де  $d_{\Pi}$  та  $d_A$  кутові діаметри Місяця в перигеї та апогеї.

За допомогою лінійки визначаємо, що  $d_{\Pi} = 3.6$  см,  $d_A = 3.2$  см.

Таким чином знаходимо, що ексцентриситет орбіти Місяця становить

$$e = \frac{\frac{d_{\Pi}}{d_A} - 1}{\frac{d_{\Pi}}{d_A} + 1} = \frac{\frac{3.6}{3.2} - 1}{\frac{3.6}{3.2} + 1} = 0.059.$$

Табличне значення ексцентриситету Місяця дорівнює 0.055.

**2.6.** Визначте ексцентриситет орбіти комети, якщо відомо, що її лінійна швидкість в перигелії більша у 4,5 разів за швидкість в афелії.

*Розв'язок*

Ексцентриситет орбіти:

$$e = \frac{r_A - r_{\Pi}}{r_A + r_{\Pi}} = \frac{\frac{r_A}{r_{\Pi}} - 1}{\frac{r_A}{r_{\Pi}} + 1}$$

Оскільки

$$v_A r_A = v_{\Pi} r_{\Pi},$$

То:

$$\frac{r_A}{r_{\Pi}} = \frac{v_{\Pi}}{v_A} = 4.5.$$

Отже:

$$e = \frac{4.5 - 1}{4.5 + 1} = 0.64$$

Такий ексцентриситет у комети 67P/Чурюмова-Герасименко.

**2.7.** На фото (автор Кеоні Еверінгтон) наведено поруч два зображення Місяця у повні (28 липня 2017р. – міні-Місяць та 2 січня 2018р. – супер-Місяць) (Рис. 2.2). Кутові розміри Місяця дорівнюють  $29'38''$  та  $33'15''$ . Враховуючи, що середня відстань Місяця від Землі складає 384 400 км обчислити відстань від Землі до Місяця у перигеї та апогеї.

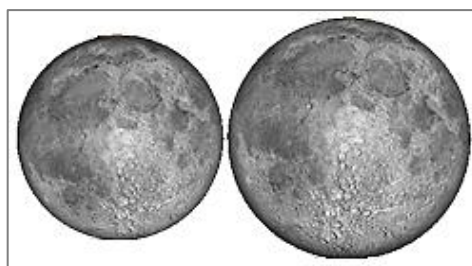


Рис. 2.2.

*Розв'язок*

Спочатку визначимо ексцентриситет орбіти Місяця:

$$e = \frac{r_A - r_{\Pi}}{r_A + r_{\Pi}} = \frac{\frac{r_A}{r_{\Pi}} - 1}{\frac{r_A}{r_{\Pi}} + 1} =$$

$$= \frac{\frac{33'15''}{29'38''} - 1}{\frac{33'15''}{29'38''} + 1} = \frac{\frac{33.25}{29.63} - 1}{\frac{33.25}{29.63} + 1} = 0.058.$$

Відстані від Землі до Місяця у перигеї та апогеї становлять:

$$r_{\Pi} = a(1 - e) = 384\,400(1 - 0.058) = 362\,105 \text{ км.}$$

$$r_A = a(1 + e) = 384\,400(1 + 0.058) = 406\,695 \text{ км.}$$

**2.8.** У жовтні 2015 року жителі Землі спостерігали заворожливе астрономічне явище – малий парад планет. При цьому Венера, Марс та Юпітер перебувають в сполученні. Розрахуйте мінімальний проміжок часу, через який Венера та Марс знову будуть перебувати у сполученні. Орбіти планет вважають коловими. Сидеричні періоди обертань планет  $T_B = 225^d$ ,  $T_M = 689^d$ .

*Розв'язок*

Розглянемо схематично конфігурації планет у сполученнях:

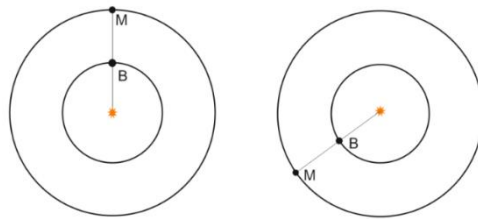


Рис. 2.3.

Два послідовних сполучення відбудуться через проміжок часу  $S$ , за який Венера пережене Марс на кут  $360^\circ$ . За час  $S$  планети повернуться навколо Сонця на кути:

$$\varphi_B = \frac{360^\circ}{T_B} S, \quad \varphi_M = \frac{360^\circ}{T_M} S.$$

Тоді:

$$\varphi_B - \varphi_M = 360^\circ = \left( \frac{360^\circ}{T_B} - \frac{360^\circ}{T_M} \right) S.$$

Звідси знаходимо мінімальний проміжок часу, через який повторюються сполучення Венери та Марса з Сонцем

$$S = \frac{T_M T_B}{T_M - T_B} = \frac{698 \times 225}{698 - 225} \cong 334 \text{ доби.}$$

Спочатку визначимо ексцентриситет орбіти Місяця

$$e = \frac{r_A - r_{\Pi}}{r_A + r_{\Pi}} = \frac{\frac{r_A}{r_{\Pi}} - 1}{\frac{r_A}{r_{\Pi}} + 1} =$$

$$= \frac{\frac{33'15''}{29'38''} - 1}{\frac{33'15''}{29'38''} + 1} = \frac{\frac{33.25}{29.63} - 1}{\frac{33.25}{29.63} + 1} = 0.058$$

Відстані від Землі до Місяця у перигеї та апогеї становлять

$$r_{\Pi} = a(1 - e) = 384\,400(1 - 0.058) = 362\,105 \text{ км.}$$

$$r_{\text{А}} = a(1 + e) = 384\,400(1 + 0.058) = 406\,695 \text{ км.}$$

**2.9.** Протистояння малої планети повторюється через кожні 512 діб. Визначити середню відстань планети до Сонця в а.о.

*Розв'язок*

Напишемо рівняння синодичного руху малої планети:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_{\Pi}}$$

Звідси орбітальний період малої планети

$$T_{\Pi} = \frac{ST_3}{S - T_3} = \frac{512 \times 365.2422}{512 - 365.2422} = 1274 \text{ діб} = 3.49 \text{ років.}$$

Середню відстань малої планети до Сонця знайдемо із третього закону Кеплера:

$$a_{\Pi} = \sqrt[3]{T_{\Pi}^2} = \sqrt[3]{3.49^2} = 2.3 \text{ а. о.}$$

Таким чином, мала планета про яку йдеться у задачі знаходиться в поясі астероїдів (2.2 а.о – 3.6 а.о).

**2.10.** Останнє протистояння Марса відбулося 22 травня 2016 року. Розрахуйте орієнтовну дату наступного протистояння Марса із Землею. Зоряні періоди обертання Марса та Землі 687 і 365.26 діб відповідно. Отриману дату записати у системі Юліанського датування (номер юліанського дня на момент 1 січня 2000 року – JD 2 451 545).

*Розв'язок*

Розрахуємо час повторення певної конфігурації Марса та Землі (синодичний період без урахування еліптичності орбіт):

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{Землі}}} - \frac{1}{T_{\text{Марса}}},$$

$$S = \frac{T_{\text{Землі}}T_{\text{Марса}}}{T_{\text{Марса}} - T_{\text{Землі}}} = \frac{687 \times 365.26}{687 - 365.26} = 780 \text{ діб.}$$

780 діб після 22 травня 2016 року припадає на 11 липня 2018 року (точний результат з урахуванням еліптичності дає 27 липня 2018 року). Юліанська дата на момент 1 січня 2000 року становить JD 2 451 545. Від 1 січня 2000 року до 11 липня 2018 року пройде:

$$5 \times 366 + 13 \times 365 + 191 = 6766 \text{ діб.}$$

Отже у системі Юліанського датування наступне протистояння Марса відбудеться у день з номером:

$$\text{JD } 2\,451\,545 + 6766 = \text{JD } 2\,458\,311.$$

**2.11.** У таблиці наведені дати послідовних протистоянь Юпітера (Юпітер, Земля та Сонце розташовані на одній прямій) за попередні три роки. На основі цих даних визначте

Розділ 2. Небесна механіка

синодичний період протистоянь Юпітера та спрогнозуйте дати цих протистоянь у 2019 та 2020 роках. Зобразіть схематично на одному рисунку розміщення Юпітера, Землі та Сонця для протистоянь у період з 2016 по 2020 роки. На основі одержаних результатів, оцініть період обертання Юпітера навколо Сонця.

2016	2017	2018	2019	2020
8 березня	7 квітня	9 травня		

*Розв'язок*

Знайдемо проміжки часу між послідовними протистояннями

$$8.03.2016 - 7.04.2017: \quad 395 \text{ діб}$$

$$7.04.2017 - 9.05.2018: \quad 397 \text{ діб}$$

Таким чином середній синодичний період Юпітера  $S = 396$  діб (точне значення 398,88 діб). Протистояння у 2019 році:  $9.05.2018 + 396 \text{ діб} = 9.06.2019$  (за ефемеридами Юпітера 10.06.2019).

Протистояння у 2020 році:  $9.06.2019 + 396 \text{ діб} = 9.07.2020$  (за ефемеридами Юпітера 14.07.2020).

2016	2017	2018	2019	2020
8 березня	7 квітня	9 травня	9 червня	9 липня

Знайдемо зоряний (сидеричний) період обертання Юпітера (Рис. 2.4).

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\text{Ю}}}$$

$$T_{\text{Ю}} = \frac{ST_{\oplus}}{S - T_{\oplus}} = \frac{396 \times 365.2422}{396 - 365.2422} = 4702 \text{ діб} = 12.87 \text{ років}$$

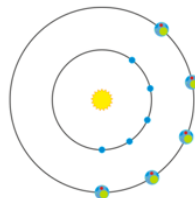


Рис. 2.4.

**2.12.** Обчислити гіпотетичний період обертання Місяця навколо Землі при умові, що маса Землі зросла вчетверо, а Місяць опинився на вдвічі більшій відстані. Сидеричний період обертання Місяця при його реальній орбіті дорівнює 27.3 діб.

*Розв'язок*

Період обертання визначається масою центрального тіла та великою піввіссю орбіти

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (2a_0)^3}{G(4M_0)}} = \sqrt{2} T_0 = \sqrt{2} \times 27.3 \text{ діб.}$$

**2.13.** Визначте відношення маси Землі до маси Марса, якщо супутник Фобос віддалений від Марса на 9300 км і здійснює один оберт навколо планети за 7 год 40 хв. Відстань від Землі до Місяця 380 тисяч кілометрів. Місяць здійснює оберт навколо Землі за 27.3 діб.

*Розв'язок*

За узагальненим третім законом Кеплера знаходимо

Розділ 2. Небесна механіка

$$T_{\text{Фобос}}^2 = \frac{4\pi^2 r_{\text{Фобос}}^3}{GM_{\text{Марс}}}, \quad T_{\text{Місяць}}^2 = \frac{4\pi^2 r_{\text{Місяць}}^3}{GM_{\text{Земля}}}.$$

Звідси:

$$\begin{aligned} \frac{M_{\text{Земля}}}{M_{\text{Марс}}} &= \left(\frac{r_{\text{Місяць}}}{r_{\text{Фобос}}}\right)^3 \times \left(\frac{T_{\text{Фобос}}}{T_{\text{Місяць}}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{380000}{9300}\right)^3 \times \left(\frac{7.67}{27.3 \times 24}\right)^2 = 9.14. \end{aligned}$$

**2.14.** Найближчий супутник Юпітера Іо обертається навколо нього за 42 год 28 хв на середній відстані 421 800 км. За скільки діб другий супутник Юпітера – Європа, обертається навколо нього? Велика піввісь орбіти Європи – 671 100 км.

*Розв'язок*

За третім законом Кеплера знаходимо

$$\frac{T_{\text{Європа}}^2}{T_{\text{Іо}}^2} = \frac{r_{\text{Європа}}^3}{r_{\text{Іо}}^3}.$$

Звідси:

$$\begin{aligned} T_{\text{Європа}} &= T_{\text{Іо}} \sqrt{\frac{r_{\text{Європа}}^3}{r_{\text{Іо}}^3}} \\ &= 42.47 \sqrt{\left(\frac{671100}{421800}\right)^3} = 85.23 \text{ год} = 85 \text{ год } 14 \text{ хв}. \end{aligned}$$

**2.15.** Супутник робить один повний оберт за 4.7 доби навколо астероїда діаметр якого становить 215 км. Радіус орбіти супутника 1190 км. Орбіту супутника вважати коловою. Оцінити густину астероїда.

*Розв'язок*

За узагальненим третім законом Кеплера знаходимо:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}.$$

Звідси визначаємо масу астероїда:

$$\begin{aligned} M &= \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \\ &= \frac{4\pi^2 \times 1\,190\,000^3}{6.67 \times 10^{-11} \times (4.7 \times 24 \times 3600)^2} = 6.04 \times 10^{18} \text{ кг}. \end{aligned}$$

Середня густина речовини астероїда:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{M}{V} = \frac{6M}{\pi d^3} \\ &= \frac{6 \times 6.04 \times 10^{18}}{\pi \times 215\,000^3} = 1160 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \end{aligned}$$

**2.16.** Супутник Нептуна Тритон має радіус орбіти, що дорівнює радіусу орбіти Місяця навколо Землі, але робить один оберт навколо Нептуна за 6 діб. У скільки разів відрізняються маси Нептуна і Землі?

*Розв'язок*

Супутник Нептуна Тритон має радіус орбіти, що дорівнює радіусу орбіти Місяця навколо Землі, але робить один оберт навколо Нептуна за 6 діб. У скільки разів відрізняються маси Нептуна і Землі?

За узагальненим третім законом Кеплера знаходимо

$$T_{\text{Тритон}}^2 = \frac{4\pi^2 r_{\text{Тритон}}^3}{GM_{\text{Нептун}}}, \quad T_{\text{Місяць}}^2 = \frac{4\pi^2 r_{\text{Місяць}}^3}{GM_{\text{Земля}}}$$

Звідси:

$$\begin{aligned} \frac{M_{\text{Земля}}}{M_{\text{Нептун}}} &= \left(\frac{r_{\text{Місяць}}}{r_{\text{Тритон}}}\right)^3 \times \left(\frac{T_{\text{Фобос}}}{T_{\text{Місяць}}}\right)^2 = \left(\frac{T_{\text{Фобос}}}{T_{\text{Місяць}}}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{6}{27.3}\right)^2 = 0.048 \end{aligned}$$

**2.17.** Комета Енке (2P/Енке), яка відноситься до короткоперіодичних комет, востаннє наближалася на мінімальну відстань до Сонця (перебувала у перигелії своєї орбіти) 10 березня 2017 року. Відстані комети до Сонця у перигелії та афелії орбіти становлять відповідно 0.33 а. о. та 4.11 а. о. Розрахуйте дату наступного перигелію комети.

*Розв'язок*

Наступний перигелій комети відбудеться через проміжок часу, що дорівнює періоду обертання комети.

Із третього закону Кеплера знаходимо:

$$T = \sqrt{a^3}.$$

Велика піввісь орбіти комети

$$a = \frac{r_{\text{П}} + r_{\text{А}}}{2} = \frac{0,33 \text{ а. о.} + 4,11 \text{ а. о.}}{2} = 2.22 \text{ а. о.}$$

Період обертання комети:

$$T = \sqrt{2.22^3} = 3.31 \text{ року} = 1208 \text{ діб.}$$

Наступний після 10 березня 2017 року перигелій комети відбудеться 30 червня 2020 року.

**2.18.** Екзопланетна система TRAPPIST-1, яка знаходиться у сузір'ї Водолія, складається із центральної зорі TRAPPIST-1 та семи планет земної групи. Найбільшу схожість із Землею має четверта екзопланета цієї системи – TRAPPIST-1e. На основі даних наведених у таблиці, виконайте наступні завдання:

а) розрахуйте прискорення вільного падіння на поверхні екзопланети (поверхневу гравітацію);

б) оцініть масу центральної зорі у системі TRAPPIST-1 (відповідь виразіть у масах Сонця).

Параметр екзопланети TRAPPIST-1e	Значення
Маса	0.772 $M_{\oplus}$
Радіус	0.910 $R_{\oplus}$
Велика піввісь орбіти	0.029 а. о.
Орбітальний період	6 діб 2 год

Тут  $M_{\oplus}$  – маса Землі,  $R_{\oplus}$  – радіус Землі.

*Розв'язок*

а) Прискорення вільного падіння на поверхні планети:

$$\begin{aligned} g &= G \frac{M}{R^2}, \\ \frac{g}{g_{\oplus}} &= \frac{M/M_{\oplus}}{(R/R_{\oplus})^2} = \frac{0.772}{0.910^2} = 0.932, \\ g &= 0.932g_{\oplus} = 9.15 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \end{aligned}$$

б) Масу зорі оцінимо на основі третього закону Кеплера, узагальненого Ньютоном

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2}.$$

$$v = \frac{2\pi R}{T}.$$

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}.$$

$$\frac{M}{M_{\odot}} = \frac{\left(\frac{R}{1 \text{ а.о.}}\right)^3}{\left(\frac{T}{365.2422 \text{ діб}}\right)^2} = \frac{0.029^3}{\left(\frac{6.083 \text{ діб}}{365.2422 \text{ діб}}\right)^2} = 0.088.$$

$$M = 0.088 M_{\odot}.$$

**2.19.** Екзопланетна система Kepler-65, яка знаходиться у сузір'ї Ліра, складається із центральної зорі Kepler-65 та чотирьох планет земної групи. Найбільшу схожість із Землею має четверта екзопланета цієї системи – Kepler-65e, яка була відкрита у 2019 році. На даний момент відсутні дані спостережень про середню відстань цієї екзопланети від центральної зорі. На основі даних наведених у таблиці, виконайте наступні завдання:

а) розрахуйте середню відстань екзопланети Kepler-65e від центральної зорі Kepler-65 (в а. о.)

б) розрахуйте прискорення вільного падіння на поверхні екзопланети (поверхневу гравітацію) та порівняйте його із земним;

Параметр екзопланетної системи Kepler-65	Значення
Маса центральної зорі	$1,25 M_{\odot}$
Маса екзопланети	$200 M_{\oplus}$
Радіус екзопланети	$14 R_{\oplus}$
Орбітальний період	258 діб

Тут  $M_{\oplus}$  – маса Землі,  $R_{\oplus}$  – радіус Землі,  $M_{\odot}$  – маса Сонця.

*Розв'язок*

а) Для розрахунку середньої відстані екзопланети до центральної зорі скористаємося третім законом Кеплера узагальненого Ньютоном:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}.$$

Для спрощення обчислень, напишемо цей закон для системи Земля–Сонце:

$$T_{\oplus}^2 = \frac{4\pi^2 a_{\oplus}^3}{GM_{\odot}}.$$

Розділивши обидві формули, одержимо:

$$\frac{a^3}{a_{\oplus}^3} = \left(\frac{T}{T_{\oplus}}\right)^2 \frac{M}{M_{\odot}} = \left(\frac{258}{365}\right)^2 \frac{1.25 M_{\odot}}{M_{\odot}} = 0.625.$$

Звідси:

$$a = \sqrt[3]{0.625} = 0.855 \text{ а. о.}$$

б) Поверхнева гравітація на планеті Kepler-65e та Землі

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

$$g_{\oplus} = G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}$$

Звідси:

$$g = g_{\oplus} \frac{M}{M_{\oplus}} \left(\frac{R_{\oplus}}{R}\right)^2 = 9.8 \times \frac{200}{1} \times \left(\frac{1}{14}\right)^2 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$$g \cong g_{\oplus}.$$

**2.20.** Розгляньте ситуацію, коли астронавт наближається до чорної діри. На його тіло будуть діяти припливні гравітаційні сили, які намагаються розтягнути тіло уздовж напрямку на центр діри. Вважаючи, що людина може витримати розтягуючу силу, що дорівнює її вазі на Землі, оцінити масу чорної діри, в яку космонавт може «пірнути» та витримати припливні сили до моменту досягнення радіуса сфери Шварцшильда чорної діри.

*Розв'язок*

Нехай маса чорної діри буде  $M$ . Спочатку знайдемо радіус Шварцшильда

$$R = \frac{2GM}{c^2}.$$

Умовно розділимо астронавта масою  $m$  та висотою  $2L$  на дві рівних частини, які будуть розміщуватися під горизонтом подій та над ним. Тоді припливна сила на дві частини астронавта дорівнює різниці сил тяжіння на них збоку чорної діри:

$$\begin{aligned} F &= \frac{GmM}{2(R-L)^2} - \frac{GmM}{2(R+L)^2} = \frac{GmM}{2R^2} \left( \frac{1}{\left(1-\frac{L}{R}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{L}{R}\right)^2} \right) \cong \\ &\cong \frac{GmM}{2R^2} \left( 1 + \frac{2L}{R} - 1 + \frac{2L}{R} \right) = \frac{2GmML}{R^3} = \\ &= \frac{2GmML}{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3} = \frac{mLc^6}{4G^2M^2}. \end{aligned}$$

З іншого боку:

$$F \leq mg.$$

Тоді:

$$\frac{mLc^6}{4G^2M^2} \leq mg.$$

Нехай зріст астронавта буде 1.8 метра, тоді для маси чорної діри отримуємо оцінку:

$$M \geq \frac{c^3}{2G} \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{(3 \times 10^8)^3}{2 \times 6.67 \times 10^{-11}} \sqrt{\frac{0.9}{9.8}} = 6.1 \times 10^{34} \text{ кг} \cong 31000M_{\odot}.$$

**2.21.** 93 Мінерва є астероїдом із головного поясу. Його геометрія близька до сферичної із радіусом 156 км. Астероїд відноситься до типу С (темні вуглецеві об'єкти) із середньою густиною  $1900 \text{ кг/м}^3$ . Велика піввісь орбіти астероїда становить 2.75 а.о. Спостереження показують наявність в астероїда супутника – астероїда із значно меншою масою. Оцініть найбільшу відстань між астероїдом 93 Мінерва та його супутником, за якої буде існувати ця гравітаційно зв'язана система.

*Розв'язок*

Орбіту астероїда 93 Мінерва будемо вважати коловою із радіусом  $r = 2.75$  а.о. Нехай відстань між астероїдом та супутником буде  $L$ . Критерієм стійкості системи трьох тіл Сонце–астероїд–супутник ( $\odot$ –A–C) є умова, що прискорення, якого набуває супутник під дією астероїда буде не меншим аніж різниця прискорень супутника та астероїда під дією Сонця. Математично ця умова має вигляд:

$$a_{CA} \geq a_{C\odot} - a_{A\odot}.$$

На основі закону Всесвітнього тяжіння одержуємо:

$$a_{CA} = G \frac{m_A}{L^2};$$

$$a_{C\odot} = G \frac{m_{\odot}}{(r-L)^2};$$



$$a_{A\odot} = G \frac{m_{\odot}}{r^2}.$$

Таким чином, критерій стійкості:

$$\frac{m_A}{L^2} \geq \frac{m_{\odot}}{(r-L)^2} - \frac{m_{\odot}}{r^2}.$$

Оскільки  $L \ll r$ , то:

$$\frac{m_A}{L^2} \geq \frac{m_{\odot}}{r^2} \left( 1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{L}{r}\right)^2} \right) \cong \frac{2m_{\odot}L}{r^3}.$$

Таким чином, радіус орбіти супутника має задовольняти умові:

$$L \leq \sqrt[3]{\frac{m_A}{2m_{\odot}}} r.$$

Маса астероїда сферичної форми:

$$\begin{aligned} m_A &= \rho_A V_A = \frac{4}{3} \pi R_A^3 \rho_A \\ &= \frac{4}{3} \pi \times (156\,000)^3 \times 1900 = 3.02 \times 10^{19} \text{ кг.} \end{aligned}$$

Оцінимо одержане значення граничного радіусу орбіти супутника, за якого він буде залишатися супутником астероїда 93 Мінерва

$$L_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3.02 \times 10^{19}}{2 \times 2.00 \times 10^{30}}} \times 2.75 \text{ а. о.} = 0.000538 \text{ а. о.} = 81\,000 \text{ км.}$$

**2.22.** Розглянемо галактику NGC 2885, що знаходиться у сузір'ї Лева. Вона складається із кулястого скупчення зір (ядра галактики) радіусом  $R_0 = 4$  кпк та тонкого кільця радіусом  $R_0 \leq r \leq 15R_0$ . Прийmemo, що видима маса кільця набагато менша за масу ядра. Експериментальним шляхом встановлено, що лінійна швидкість зір у кільці не залежить від відстані до центру галактики і приблизно становить  $v = 240$  км/с. Знайдіть залежність густини темної матерії від відстані до центру галактики, якщо її розподіл є сферично-симетричний. Також оцініть співвідношення між масою ядра  $M_0$  та масою гало темної матерії  $M_{\text{ТМ}}$ .

*Розв'язок*

Спочатку оцінимо масу ядра з другого закону Ньютона:

$$\frac{v^2}{R_0} = \frac{GM_0}{R_0^2}.$$

Звідси:

$$M_0 = \frac{R_0 v^2}{G}$$

$$= \frac{4000 \times 206265 \times 1.496 \times 10^{11} \times (240 \times 10^3)^2}{6.67 \times 10^{-11}}$$

$$= 1.1 \times 10^{41} \text{ кг.}$$

Напишемо закон обертання для зорі, що розміщена у кільці, тобто за межами ядра:

$$v^2 = G \frac{M_0 + M_{\text{ТМ}}(r)}{r}.$$

Звідси одержуємо:

$$v^2 r = GM_0 + GM_{\text{ТМ}}(r),$$

$$v^2 dr = GdM_{\text{ТМ}}(r) = 4\pi G\rho_{\text{ТМ}}(r)r^2 dr.$$

Остаточно, густина темної матерії:

$$\rho_{\text{ТМ}}(r) = \frac{v^2}{4\pi Gr^2} = \frac{M_0}{4\pi R_0 r^2}.$$

Оцінимо масу темної матерії у галактиці NGC 2885:

$$M_{\text{ТМ}} = \int \rho_{\text{ТМ}}(r) dV = \int_{R_0}^{15R_0} \rho_{\text{ТМ}}(r) 4\pi r^2 dr = \frac{M_0}{R_0} \int_{R_0}^{15R_0} dr = 14M_0.$$

**2.23.** Обчисліть, на якій висоті повинен бути штучний супутник Землі, що обертається по коловій орбіті в площині земного екватора, щоб для спостерігача на Землі він здавався нерухомим.

**2.24.** Обчисліть, на якій висоті повинен бути штучний супутник Землі, що обертається по коловій орбіті в площині земного екватора, щоб для спостерігача на Землі він здавався нерухомим.

**2.25.** Віддаль комети Аренда (1951.X) від Сонця в перигелії  $r_{\text{П}}=1,8317$  а.о., а в афелії  $r_{\text{А}}=6,029$  а. о. Визначити середню відстань комети від Сонця, ексцентриситет орбіти та період її обертання навколо Сонця.

**2.26.** В момент протистояння Юпітера він віддалений від Землі на 628 млн. км ; кутовий діаметр його тоді рівний  $42''$ ,2. Визначити звідси лінійний діаметр цієї планети.

**2.27.** Паралакс Сонця  $8''$ ,8, а видимий радіус Сонця рівний  $16'1''$  . В скільки разів радіус Сонця більший за радіус Землі ? Який діаметр Сонця ?

**2.28.** Вивести три формули перетворення горизонтальних координат  $A$  і  $z$  в екваторіальні  $t$  і  $\delta$  для місцевості з широтою  $\phi$ . Привести їх до логарифмічного виду.

**2.29.** Які швидкості точок земної поверхні внаслідок добового руху Землі :

а) на екваторі;

б) на широті  $\phi = 48^\circ 24'$ , якщо радіус земної кулі рівний 6371 км ?

**2.30.** Визначте велику піввісь  $a$ , ексцентриситет орбіти  $e$ , висоту перигею  $h_{\text{П}}$ , швидкість в перигеї і апогеї : супутника “Космос 70” ( 2 липня 1965 р.),  $h_{\text{А}}=1154$  км,  $T=98^{\text{м}}$ ,3.

**2.31.** Протистояння малої планети Владеліни повторюється через кожні 511 діб. На якій середній віддалі від Сонця вона знаходиться?

**2.32.** Визначити в дузі великого кола відстань між зірками  $\alpha$  і  $\beta$  Великої Ведмедиці, координати яких :  $\alpha_1=10^{\text{h}} 59^{\text{m}}$ ,  $\delta_1 = +62^\circ 10'$ ,  $\alpha_2=10^{\text{h}} 57^{\text{m}}$ ,  $\delta_2 = +56^\circ 47'$ .

**2.33.** Вивести формулу перигелійної і афелійної відстані, як функцій великої півосі та ексцентриситету орбіти.

**2.34.** В романі «Гектор Сарвадак» Ж. Верн описав надуману комету «Галлія». Період її обертання навколо Сонця – два роки, а відстань від Сонця в афелії – 820 млн. км. Перевірте, чи може існувати така комета?

- 2.35.** Прапор корабля прив'язаний до щогли на висоті 100 метрів над горизонтом. На якій відстані його буде видно?
- 2.36.** Чи буде видно неозброєним оком з поверхні Землі ділянка поверхні Місяця діаметром 220 км? Провести оцінку для максимальної та мінімальної відстані Місяця від Землі та оцінити максимальну відстань, з якої можна бачити цей об'єкт. Роздільна здатність ока 2'.
- 2.37.** Зореліт досліджує нейтронну зірку з масою  $M = 2M_G$ . На якій відстані від неї приливні сили не будуть впливати на здоров'я космонавта? Безпечним вважається перевантаження не більше як  $2g$ .
- 2.38.** Спостереженнями встановлено, що Сонцю властиве диференціальне обертання навколо власної осі, причому найбільшу кутову швидкість має екваторіальна зона, найменшу – біполярна. Беручи до уваги, що кутова швидкість (у градусах за добу) фотосферних утворень визначається за формулою:  $\Omega = 14,37^\circ - 2,79^\circ \sin^2 \varphi$ , де  $\varphi$  - геліографічна широта, знайдіть числові значення добової кутової швидкості  $\Omega$  тих ділянок фотосфери, які розташовані на геліоширотах  $\varphi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  і  $80^\circ$ ; побудуйте графік залежності «період – геліоширота», тобто  $T = f(\varphi)$ . Обчисліть, знаючи радіус Сонця, лінійну швидкість обертання  $V$  (в км/с) точок що знаходяться на широтах  $\varphi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  і  $80^\circ$  та побудуйте графік залежності  $V(\varphi)$ . Порівняйте з випадком, якби Сонце мало тверду поверхню.
- 2.39.** У скільки разів запуск супутника на висоту 500 км енергетично вигідніший з екватора, ніж запуск цього супутника з середніх широт?
- 2.40.** Чому в сферичній геометрії не використовують всю сферу та яку частину її використовують?
- 2.41.** В чому суть задачі трьох тіл в небесній механіці? Наведіть приклади її розв'язання (хоча б один)?
- 2.42.** Вивести формулу для геометричної довжини променя зору всередині кільцевої туманності, що складається з оболонки товщиною  $d$  та зовнішнім радіусом  $r$ . Чи буде ця туманність виглядати як планетарна, якщо густина всередині оболонки на порядок нижча, а  $d/r = 0,1$ .
- 2.43.** Знайти припливний радіус Сатурна та порівняти його з розмірами кілець Сатурна.
- 2.44.** В чому суть задачі трьох тіл в небесній механіці? Наведіть приклади її розв'язання (хоча б один)?
- 2.45.** Скільки величин визначають повністю орбіту зорі в подвійній системі? Перерахуйте інтеграл руху.
- 2.46.** Виведіть рівняння для визначення точки Лагранжа  $L_1$  в подвійній системі. Маса компонент  $M_1$  та  $M_2$ , а велика піввісь дорівнює  $a$ . и залежить відстань точки Лагранжа до компонент системи, що виражена в одиницях великої півосі, від абсолютних значень мас компонент.
- 2.47.** Скільки величин визначають повністю орбіту зорі в потрійній системі? Перерахуйте інтеграл руху.
- 2.48.** Чи залежить довжина шляху гальмування тіла, що влітає в атмосферу Землі, від його початкової швидкості, якщо остання значно більша ніж друга космічна швидкість? Обчисліть, на якій висоті повинен бути штучний супутник Землі, що обертається по коловій орбіті в площині земного екватора, щоб для спостерігача на Землі він здавався нерухомим.
- 2.49.** Паралакс Сонця  $8'',8$ , а видимий радіус Сонця рівний  $16'1''$ . У скільки разів радіус Сонця більший від радіуса Землі? Який діаметр Сонця?
- 2.50.** Екваторіальний радіус Юпітера рівний  $R = 71300$  км, а відстань від його центра до четвертого супутника рівна  $nR$  (де  $n = 26,4$ ), час його обертання рівний  $t = 16,69$  діб (в добі 86400 секунд). Визначити, виходячи з цих даних, прискорення  $g$  на поверхні Юпітера. Яку

швидкість треба надати ракетному міжпланетному кораблю, щоб він зміг злетіти з поверхні Марса на інші планети? *Вказівка:* Дані про Марс потрібно взяти з таблиць.

**2.51.** На Рис. 2.5а та Рис. 2.5б показані абсолютні орбіти компонент подвійної системи. Яке співвідношення мас першої да другої зірок, що відповідає Рис. а? Покажіть положення зорі на Рис. б.

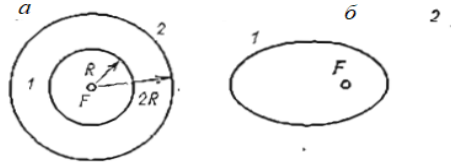


Рис. 2.5.

**2.52.** На Рис. 2.6 показана орбіта зорі 1 та положення зорі 2 (строго в центрі еліпса). Який еліпс зображений – істинний чи видимий?

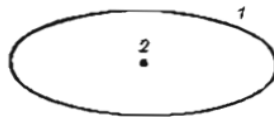


Рис. 2.6.

**2.53.** Відомі маси компонент подвійної системи та частота їх орбітального обертання. Запишіть закон збереження енергії для пробної частинки, що рухається в полі тяжіння подвійної системи, в площині орбіт зір. Початок системи координат вибраний в центрі мас системи та жорстко обертається з орбітальним періодом.

**2.54.** Складіть рівня руху для визначення положення точки Лагранжа  $L_1$  подвійної системи. Маси компонент  $M_1$  та  $M_2$  та велика піввісь  $a$ . Чи залежить відстань точки Лагранжа до компонент системи виражена в одиницях великої півосі, від абсолютних значень мас компонент? В точці Лагранжа рівнодійна сил рівна нулю.

**2.55.** Чому з поверхні Землі можна спостерігати лише частину (- 59 %) поверхні Місяця? Чому більше ніж 50%?

**2.56.** Вважаючи орбіту Місяця круговим радіусом  $R = 354\,400$  км, визначте середню швидкість природного супутника Землі.

**2.57.** Намалуйте схему виникнення кільцеподібного сонячного затемнення.

**2.58.** Чи можливе кільцеподібне місячне затемнення?

**2.59.** Що таке напівтіньове місячне затемнення?

**2.60.** Чи можна в молодик бачити поверхню Місяця?

**2.61.** Якою буде прицільна відстань, якщо Сонце і Місяць стикаються зовнішніми частинами дисків?

**2.62.** Як пояснити, що рух більшості планет по орбітах, близьких до кругових?

**2.63.** Покажіть, що швидкість Землі на орбіті  $29,5$  км/с відповідає круговому руху тіла на відстані  $1$  а.о. щодо Сонця.

**2.64.** Перерахуйте умови, необхідні для запуску ШСЗ та КА.

**2.65.** Визначте радіус  $\rho$  сфери дії Місяця щодо Землі.

**2.66.** Що таке додаткова швидкість КА і який її фізичний зміст?

**2.67.** Що мають на увазі під першою, другою та третьою космічною швидкістю?

**2.68.** Чи можна запустити ШСЗ зі швидкістю, яка менша за першу космічну?

**2.69.** Де більша швидкість ШСЗ — в апогеї чи перигеї?

**2.70.** Визначте відношення швидкостей Землі на орбіті в афелії та перигелії.

### Розділ 3. Змішані астрономічні задачі

**3.1.** В обсерваторії з широтою  $50^{\circ}44'52''$  виміряна зенітна відстань зорі в верхній кульмінації рівна  $47^{\circ}59'48''$ . Чому рівне схилення зорі з врахуванням середньої рефракції?

*Розв'язок*

Істинна зенітна відстань зорі з врахуванням рефракції задається виразом:

$$z = z' + \rho.$$

Вважаючи атмосферні умови нормальними та враховуючи, що  $z < 70^{\circ}$ , поправку на рефракцію можна записати як

$$\rho = 60,25'' \operatorname{tg} z'.$$

Для умов задачі  $z = 48^{\circ}00'55''$ . Так як зоря знаходиться в верхній кульмінації, то визначаємо її схилення як

$$\delta = \varphi - z = 50^{\circ}44'52'' - 48^{\circ}00'55'' = 2^{\circ}43'55''.$$

**3.2.** Виміряна з пароплава опівнічна висота нижнього краю Сонця була  $14^{\circ} 1'5''$ . Схилення Сонця  $\delta$  в цей день було  $+21^{\circ} 19'34''$ , а кутовий радіус  $15'47''$ . Визначіть з врахуванням рефракції широту на якій знаходилось судно.

*Розв'язок*

Спостережувана зенітна відстань центру Сонця:

$$z' = 90^{\circ} - (h' + R_c) = 75^{\circ}33'8'',$$

поправка на рефракцію  $\rho = 3'39''$ . Таким чином, істинна зенітна відстань,

$$z = z' + \rho = 75^{\circ}36'47'',$$

а широта при цьому (враховуючи що Сонце знаходиться в нижній кульмінації):

$$\varphi = 180^{\circ} - z - \delta = 83^{\circ}03'39''.$$

**3.3.** Розрахувати, на скільки знижується освітленість поверхні Марса під час проходження Фобоса по диску Сонця. Вважати, що півтінь падає на екватор Марса. Чи зі всієї поверхні Марса можна коли-небудь бачити проходження? Чи кожного разу при сполученні з Сонцем Фобос відкидає півтінь на поверхню Марса?

*Розв'язок*

Марс:  $a=1.52$ ,  $e=0.09$ ,  $R=3400$ ,  $i=25^{\circ}$ ; Фобос:  $a=9000\text{км}$ ,  $e=0$ , розміри  $27 \times 22 \times 18$  км, площина орбіти співпадає з екватором Марса. Розв'язок: 1) Визначимо кутові розміри диска Сонця для спостерігача на поверхні Марса:  $D_s = 31' / 1.52 = 20'$ . (2 бали), якщо хтось ще врахує еліптичність орбіти Марса -  $20' / (1 + 0.09) = 18 - 22'$  (ще 2 бали). 2) Відстань до Фобоса від поверхні Марса складає  $9000 - 3400 = 5600\text{км}$ . (2 бали). 3) Кутові розміри для Фобоса:  $D_a = 27 / 5600 = 16.6'$ ;  $D_b = 22 / 5600 = 13.5'$ ;  $D_c = 18 / 5600 = 11.1'$ . (2 бали) 4) Бачимо, що яким боком Фобос не повернувся б до спостерігача, він не в змозі затулити весь диск Сонця. Ми будемо мати "кільцеподібне затемнення", або навіть краще називати це проходженням Фобоса по диску Сонця. (2 бали). 5) Якщо хтось чув, що Фобос завжди дивиться на Марс однією стороною (як й наш Місяць на Землю), причому на Марс дивиться найдовша вісь еліпсоїду, той зрозуміє, що видимий розмір Фобоса з поверхні Марса складе власне  $13.5' \times 11.1'$  (ще 2 бали). 6) Ступінь зменшення освітленості поверхні Марса буде пропорційний частині диска Сонця, яку закриває Фобос, тоді, вважаючи диск Фобоса еліпсом:  $K = D_b \cdot D_c / D_s^2 = 0.375$ , або з урахуванням зміни відстані до Сонця -  $0.463 - 0.310$ . 7) Оскільки Фобос доволі близький до поверхні Марса, для високих широт він взагалі постійно знаходиться під горизонтом. Максимальна широта, де ще видно Фобос  $\cos(\varphi) = 3400 / 9000 = 0.378$ , що відповідає широті біля  $68^{\circ}$ . Звісно, якщо не видно Фобоса - не видно й проходження його по диску Сонця. (2 бали). 8) Чи може півтінь Фобоса оминати поверхню Марса? Оскільки нахил осі Марса до його орбіти складає  $25^{\circ}$ , то на марсіанським небі Сонце може віддалятися на  $25^{\circ}$  на північ або на південь від марсіанського небесного екватора (це відбувається в дні сонцестоянь Марса).  $25^{\circ}$  – це більше ніж  $\arcsin(3400 / 9000) = 22^{\circ}$ . Значить

в часи, близькі до сонцестоянь, тінь (точніше – півтінь) Фобоса буде оминати поверхню Марса, проходячи північніше або південніше.

**3.4.** Розрахувати повну кількість вуглецю (карбону) в атмосфері Землі, якщо вміст  $\text{CO}_2$  в ній зараз складає 0.04%. Скільки років потрібно спалювати весь світовий видобуток вугілля (10 млрд т в рік) поки вміст  $\text{CO}_2$  підніметься до 0.05%? (Вказівка: вважати вугілля чистим вуглецем та що увесь викинутий  $\text{CO}_2$  залишається в атмосфері.

*Розв'язок*

Масу атмосфери легко розрахувати, якщо розуміти, що  $Mg=SP$ , де  $g$  – прискорення вільного падіння,  $S = 4\pi R^2$  повна поверхня Землі, а  $P$  - нормальний атмосферний тиск. (2 бали). 2) В числах  $M=5.1 \cdot 10^{21}$  3) Діоксид вуглецю складає  $0.04\% = 4 \cdot 10^{-4}$  від повної маси атмосфери -  $2 \cdot 10^{12}$  т. 4) Вуглець складає 12/44 діоксиду за масою -  $0.54 \cdot 10^{12}$  т = 540 млрд т. (2 бали). 5) Спалюючи по 10 млрд тон вуглецю в рік ми піднімемо вміст діоксиду на  $\frac{1}{4}$  від сьогоденного (від 0.04 до 0.05) за  $540 \cdot \frac{1}{4} / 10 = 13.5$  років.

**3.5.** Залізний метеорит діаметром 10 м падає на поверхню Марсу із мінімально можливою швидкістю. Яка частина речовини метеориту може випаруватися при ударі о поверхню. Вважати, що на це йде 50% кінетичної енергії метеориту. Теплопароутворення заліза 6100 кДж/кг. Для Марса радіус та маса:  $R=3390$  км,  $M=6,4171 \cdot 10^{23}$  кг.

*Розв'язок*

Мінімальна швидкість – це друга космічна. Для Марсу вона складає  $v=(2*GM/R)^{1/2}=5$  км/с. Густина заліза  $7,8$  г/см<sup>3</sup>, тому шар із діаметром 10 м та зі швидкістю 5 км/с матиме кінетичну енергію  $E=Mv^2/2=(4\pi\rho R^3)v^2/6=4,08 \cdot 10^{14}$  Дж. Очевидно цього вистачить на випаровування  $3.34 \cdot 10^7$  кг. Маса метеориту  $M=4\pi\rho R^3/3=3.32 \cdot 10^7$  кг. Тобто енергії цілком вистачить на повне випаровування метеориту.

**3.6.** У якого тіла (Венера, Земля, Титан) атмосфера наймасивніша по відношенню до самого тіла. Тіло Діаметр, км Густина г/см<sup>3</sup> Тиск, кПа Венера 12104 5.243 9300 Земля 12756 5.515 101 Титан 5150 1.880 147.

*Розв'язок*

Тиск на поверхні планети визначається силою тяжіння, що діє на стовпчик атмосфери на одиничну площу. Отже вся маса всієї атмосфери ( $m$ ) тисне на всю площу поверхні планети ( $S$ ) із радіусом  $R$ . Тобто можна записати:  $p = mg/S$ ;  $g = GM/R^2$ ;  $M = 4\pi\rho R^3/3$ ;  $p = \rho GM/3R$ . Звідки підставляючи у одну формулу маси планети та її атмосфери знаходимо відношення:

$$\frac{m}{M} = \frac{9p}{4\pi G \rho^2 R^2}.$$

Тоді для Венери, Землі, Титана матимемо відповідно такі значення:  $1.04 \cdot 10^{-4}$ ;  $9.17 \cdot 10^{-7}$ ;  $7.05 \cdot 10^{-5}$ ; Отже наймасивніша атмосфера у Венери.

**3.7.** Мандрівник нахилився над криницею та побачив у воді відображення Капелли ( $\alpha = 5^h 13^m$ ,  $\delta = +45^\circ 47'$ ). Визначити на якій географічній широті знаходиться мандрівник та зоряний час у цей момент.

*Розв'язок*

Якщо мандрівник нахилився над криницею та побачив у воді відображення певної зорі, то ця зоря перебуває у зеніті, тобто висота світила у верхній кульмінації  $h_B = 90^\circ$ . У момент верхньої кульмінації висота світила  $h_B$  пов'язана із його схиленням  $\delta$  та широтою спостерігача співвідношенням:

$$h_B = 90^\circ - \varphi + \delta.$$

Таким чином, географічна широта мандрівника:

$$\varphi = 90^\circ - h_B + \delta = \delta = +45^\circ 47'.$$

Місцевий зоряний час:

$$s = \alpha + t.$$

Оскільки зоря перебуває в зеніті, то вона також знаходиться на небесному меридіані у верхній кульмінації. Таким чином її годинний кут  $t = 0^h$ . Отже, зоряний час дорівнює прямому піднесенню Капелли, тобто:

$$s = \alpha = 5^h 13^m.$$

**3.8.** Визначте максимальну висоту, на яку може піднятися Місяць над горизонтом у Луцьку (широта  $\varphi = 50^\circ 44'$ ). Орбіта Місяця нахилена до площини екліптики ( $\varepsilon = 23^\circ 26'$ ) під кутом  $5^\circ 09'$ . Виконайте схематичне креслення умови задачі на моделі небесної сфери.

*Розв'язок*

Максимальна висота, на яку може піднятися світило над горизонтом є його висотою у верхній кульмінації, яка, у випадку кульмінації на південь від зеніту, визначається співвідношенням:

$$h_B = 90^\circ - \varphi + \delta$$

Максимальне схилення Місяця:

$$\delta_{max} = 23^\circ 26' + 5^\circ 09' = 28^\circ 35'.$$

Отже, максимальна висота, на яку може піднятися Місяць над горизонтом у Луцьку (Рис. 3.1):

$$h_B = 90^\circ - 50^\circ 44' + 28^\circ 35' = 67^\circ 51'.$$

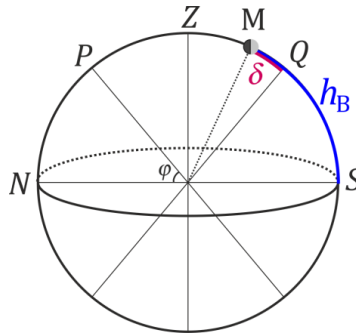


Рис. 3.1.

**3.9.** Під час навколосвітньої мандрівки ви здійснюєте політ на літакові із острова Ізабелла (Атлантичний океан, Галапагоські острови, широта острова  $\varphi = 0$ , західна довгота  $\lambda = 91^\circ 20'$ , годинний пояс  $N = -6^h$ ) в Кенію помилуватися чудовими краєвидами озера Вікторія. Ваш літак має здійснити посадку в Найробі, що знаходиться на екваторі (східна довгота  $\lambda = 36^\circ 40'$ ,  $N = 3^h$ ). Оцініть, о котрій годині (за годинником аеропорту прибуття) здійснить посадку ваш літак, якщо час відправлення (за годинником аеропорту на острові Ізабелла) становив  $9^h 00^m$ . Середня швидкість літака  $v = 1000$  км/год. При розрахунку вважати, що літак рухається за найкоротшим шляхом (по великому колу). Радіус Землі прийняти рівним 6378 км.

*Розв'язок*

Розрахуємо спочатку час польоту літака:

$$t = \frac{l}{v}.$$

Тут  $l$  – відстань, яку пролетів літак. Якщо літак летить на невеликій висоті над поверхнею Землі, то:

$$l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \times \Delta\lambda,$$

$$l = \frac{2\pi \times 6378 \text{ км}}{360^\circ} \times (36^\circ 40' - (-91^\circ 20')) = 14240 \text{ км}.$$

Тоді час польоту:

$$t = \frac{14240 \text{ км}}{1000 \text{ км/год}} = 14.24 \text{ год} = 14 \text{ год } 15 \text{ хв.}$$

Різниця у часі двох аеропортів становить:

$$N = 3 - (-6) = 9 \text{ год.}$$

Таким чином, відправлення літака із острова Ізабелла за поясним часом Найробі відбулося о

$$09:00 + 9 \text{ год} = 18:00.$$

Враховуючи час польоту літака одержуємо, що посадка має відбутися о

$$18:00 + 14 \text{ год } 15 \text{ хв} = 32 \text{ год } 15 \text{ хв} = 08:15.$$

Таким чином, за годинником Найробі, приземлення літака відбудеться о 08:15 наступної доби.

**3.10.** Вкажіть та обґрунтуйте розміщення спостерігача на Землі, для якого тривалість сходу Сонця буде мінімальною. Розрахуйте відповідну тривалість сходу Сонця. Видимий кутовий радіус Сонця дорівнює  $16'$ .

*Розв'язок*

Геометрія сходу Сонця залежить від широти місцевості і має вигляд Рис. 3.2.

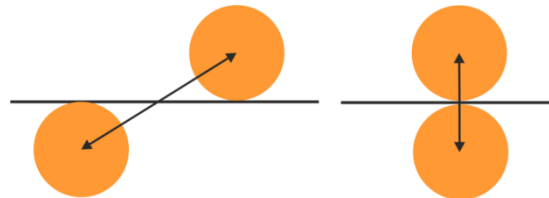


Рис. 3.2.

Тривалість сходу буде мінімальною (рисунок праворуч), якщо диск Сонця сходить перпендикулярно до горизонту. Така ситуація відбувається лише для спостерігача на екваторі ( $\varphi = 0$ ), де небесний екватор, а отже і добові паралелі світил, є перпендикулярним до горизонту.

Відповідна тривалість сходу Сонця (від моменту, коли верх диска Сонця торкнувся горизонту до моменту, коли низ диска торкається горизонту)

$$\Delta t = \frac{d}{360^\circ} 24^h = \frac{2 \times 16'}{360 \times 60} 24^h = 0.0356^h = 2.13^m.$$

Примітка: коректніше брати за період обертання Землі навколо своєї осі значення  $23^h 56^m$ . Тоді мінімальна тривалість сходу Сонця  $2.09^m$ .

**3.11.** Висота найбільшого вулкану на Марсі 27 км. З якої максимальної відстані його може розглядіти космонавт, якщо цю гору видно на краєві диска планети? Роздільна здатність людського ока складає  $1'$ .

*Розв'язок*

Для максимальної віддаленості космонавта від поверхні Марса  $L$  кутовий розмір вулкану  $d$  буде мінімальним і дорівнювати роздільній здатності людського ока  $1'$ .

Одержуємо:

$$\operatorname{tg} d = \frac{l}{L}, \quad \operatorname{tg} 1' = \frac{27 \text{ км}}{L}.$$

Звідси:

$$L = \frac{27 \text{ км}}{\operatorname{tg} 1'} = \frac{27 \text{ км}}{\operatorname{tg} \left( \frac{1}{60} \right)^\circ} = 92800 \text{ км.}$$



**3.12.** Використовуючи таблицю схилень Сонця, визначте дату початку і тривалість полярного дня на острові Діксон, географічна широта якого  $73^\circ$ .

*Розв'язок*

Безперервний полярний день розпочинається і триває у ті дні в році, коли Сонце не заходить під горизонт. Математично це означає, що висота Сонця у нижній кульмінації має бути невід'ємною:

$$h_{\odot H} \geq 0^\circ.$$

Як відомо, висота світила у нижній кульмінації пов'язана із його схиленням та широтою місця спостереження співвідношенням:

$$h_H = \varphi + \delta - 90^\circ.$$

Одержуємо умову, яку має задовольняти схилення Сонця у ті дні, коли воно не заходить за горизонт

$$\varphi + \delta_{\odot} - 90^\circ \geq 0.$$

Звідси знаходимо

$$\delta_{\odot} \geq 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 73^\circ = 17^\circ.$$

За допомогою таблиці схилення Сонця знаходимо календарні дати для яких  $\delta_{\odot} = 17^\circ$ :

8 травня (початок полярного дня),  
6 серпня (кінець полярного дня).

Тривалість безперервного полярного дня на острові Діксон складає 90 днів.

**3.13.** Визначити, які із запропонованих зір відносяться до таких, що 1) не заходять; 2) сходять і заходять; 3) не сходять для спостерігача у Луцьку ( $\varphi = 50^\circ 44' 52''$ ).

Зоря	Пряме піднесення, $\alpha$	Схилення, $\delta$
Канопус	$06^h 23^m 57^s$	$-52^\circ 41' 44''$
Проціон	$07^h 39^m 19^s$	$+05^\circ 13' 20''$
Арктур	$14^h 15^m 40^s$	$+19^\circ 10' 56''$
Фомальгаут	$22^h 57^m 29^s$	$-29^\circ 37' 20''$
Альтаїр	$19^h 50^m 47^s$	$+08^\circ 52' 06''$
Капелла	$05^h 16^m 41^s$	$+45^\circ 59' 53''$
Поллукс	$07^h 45^m 19^s$	$+28^\circ 01' 35''$

*Розв'язок*

Світило відноситься до такого, що не заходить, якщо його висота у нижній кульмінації невід'ємна, тобто:

$$h_H = \varphi + \delta - 90^\circ \geq 0.$$

$$\delta \geq 90^\circ - \varphi.$$

Для широти Луцька одержуємо, що світило не заходить за горизонт, якщо його схилення задовольняє умову:

$$\delta \geq 90^\circ - 50^\circ 44' 52'' = 39^\circ 15' 08''.$$

До таких світил відносяться тільки зоря Капелла.

Світило не сходять, якщо його висота у нижній кульмінації недодатна, тобто

$$h_B = 90^\circ - \varphi + \delta \leq 0.$$

$$\delta \leq \varphi - 90^\circ = 50^\circ 44' 52'' - 90^\circ = -39^\circ 15' 08''.$$

Отже, не сходять лише Канопус. Інші зорі – сходять і заходять.

**3.14.** Прискорення вільного падіння на поверхні Марса і Меркурія приблизно однакові і дорівнюють  $3.7 \text{ м/с}^2$ . Проте діаметр Марса в 1.4 рази більший, ніж діаметр Меркурія. Порівняйте густини планет і перші космічні швидкості для цих планет. Планети вважати кулями.

Розв'язок

Поверхнева гравітація

$$g = \frac{4}{3}\pi G\rho R.$$

Перша космічна швидкість

$$v_1 = \sqrt{gR}.$$

Таким чином одержуємо

$$\frac{\rho_{\text{Мерк}}}{\rho_{\text{Марс}}} = \frac{g_{\text{Мерк}}}{g_{\text{Марс}}} \times \frac{R_{\text{Марс}}}{R_{\text{Мерк}}} = \frac{1.4}{1} = 1.4.$$

$$\frac{v_{1(\text{Мерк})}}{v_{1(\text{Марс})}} = \sqrt{\frac{g_{\text{Мерк}}}{g_{\text{Марс}}} \times \frac{R_{\text{Мерк}}}{R_{\text{Марс}}}} = \sqrt{\frac{1}{1.4}} = 0.85.$$

**3.15.** Уявіть собі, що ви мандруєте поясом астероїдів. Характерна густина порід астероїдів становить  $3.5 \text{ г/см}^3$ . Якими повинні бути мінімальні розміри астероїда, поверхнею якого можна бігати із такою ж швидкістю, як на Землі, без загрози «упасти» в космос?

Розв'язок

На поверхні Землі можна бігати без загрози «упасти» в космос зі швидкостями, що не перевищують першу космічну швидкість, яка для Землі становить  $7.9 \text{ км/с}$ . Отже будемо шукати розмір астероїда з умови, що його перша космічна швидкість така ж як і на поверхні Землі.

$$v_1 = \sqrt{gR} = R \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}.$$

$$R = \frac{v_1}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}} = \frac{7900}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi \times 6.67 \times 10^{-11} \times 3500}} = 8 \times 10^6 \text{ м} = 8000 \text{ км}.$$

**3.16.** У жовтні 2015 року жителі Землі спостерігали заворожливе астрономічне явище – малий парад планет. При цьому Венера, Марс та Юпітер перебувають в сполученні. Розрахуйте мінімальний проміжок часу, через який Венера та Марс знову будуть перебувати у сполученні. Орбіти планет вважати коловими. Сидеричні періоди обертань планет  $T_B = 225^d$ ,  $T_M = 689^d$ .

Розв'язок

Розглянемо схематично конфігурації планет у сполученнях (Рис. 3.3).

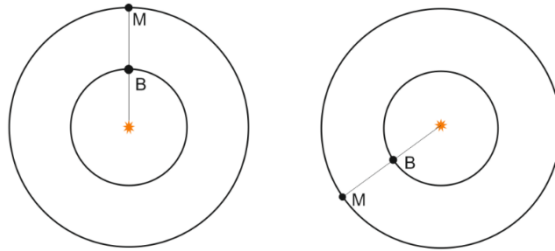


Рис. 3.3.

Два послідовних сполучення відбудуться через проміжок часу  $S$ , за який Венера пережене Марс на кут  $360^\circ$ . За час  $S$  планети повернуться навколо Сонця на кути

$$\varphi_B = \frac{360^\circ}{T_B} S, \quad \varphi_M = \frac{360^\circ}{T_M} S.$$

Тоді:

$$\varphi_B - \varphi_M = 360^\circ = \left( \frac{360^\circ}{T_B} - \frac{360^\circ}{T_M} \right) S.$$

Звідси знаходимо мінімальний проміжок часу, через який повторюються сполучення Венери та Марса з Сонцем:

$$S = \frac{T_M T_V}{T_M - T_V} = \frac{698 \times 225}{698 - 225} \cong 334 \text{ доби.}$$

Спочатку визначимо ексцентриситет орбіти Місяця:

$$e = \frac{r_A - r_{\Pi}}{r_A + r_{\Pi}} = \frac{\frac{r_A}{r_{\Pi}} - 1}{\frac{r_A}{r_{\Pi}} + 1} = \frac{\frac{33'15''}{29'38''} - 1}{\frac{33'15''}{29'38''} + 1} = \frac{\frac{33.25}{29.63} - 1}{\frac{33.25}{29.63} + 1} = 0.058.$$

Відстані від Землі до Місяця у перигеї та апогеї становлять

$$r_{\Pi} = a(1 - e) = 384\,400(1 - 0.058) = 362\,105 \text{ км.}$$

$$r_A = a(1 + e) = 384\,400(1 + 0.058) = 406\,695 \text{ км.}$$

**3.17.** У таблиці наведені календарні дати послідовних найбільших західних елонгацій Меркурія у 2015 та 2016 роках. На основі цих даних розрахуйте орієнтовні дати наступних найбільших західних елонгацій Меркурія у 2017 році, а також середню відстань планети до Сонця.

2015 рік	2016 рік	2017 рік
24 лютого	6 лютого	
24 червня	5 червня	
15 жовтня	28 вересня	

*Розв'язок*

На основі даних таблиці знаходимо інтервали часу між послідовними західними елонгаціями

$$T_1 = 120^d, \quad T_2 = 113^d, \quad T_3 = 114^d, \\ T_4 = 120^d, \quad T_5 = 115^d.$$

Синодичний період повторення західних елонгацій Меркурія знайдемо як середнє арифметичне

$$S = \frac{120 + 113 + 114 + 120 + 115}{5} = 116.4^d = 0.318 \text{ року.}$$

Заповнюємо таблицю відповідними датами

2015 рік	2016 рік	2017 рік
24 лютого	6 лютого	19 січня
24 червня	5 червня	17 травня
15 жовтня	28 вересня	12 вересня

На основі рівняння синодичного руху знаходимо сидеричний (зоряний) період обертання Меркурія:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_3} \\ T_M = \frac{ST_3}{S + T_3} = \frac{0.318 \times 1}{0.318 + 1} = 0.24 \text{ року.}$$

На основі третього закону Кеплера знаходимо відстань від Меркурія до Сонця

$$a_M = \sqrt[3]{T_M^2} = \sqrt[3]{0.24^2} = 0.386 \text{ а. о.}$$

**3.18.** Внутрішня планета А і зовнішня планета В при спостереженні з Землі мають однаковий синодичний період  $S$ . Чому дорівнює синодичний період планети А при спостереженні з планети В?

*Розв'язок*

Внутрішня планета А і зовнішня планета В при спостереженні з Землі мають однаковий синодичний період  $S$ . Чому дорівнює синодичний період планети А при спостереженні з планети В?

Позначимо сидеричні періоди обертання планет А та В навколо Сонця через  $T_A$  та  $T_B$ . Тоді за умовою задачі

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_3} \Rightarrow \frac{1}{T_A} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T_3},$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_B} \Rightarrow \frac{1}{T_B} = \frac{1}{T_3} - \frac{1}{S}.$$

Рівняння синодичного руху для планет А та В має вигляд

$$\frac{1}{S_{AB}} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} = \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{T_3}\right) - \left(\frac{1}{T_3} - \frac{1}{S}\right) = \frac{2}{S}.$$

Таким чином, синодичний період планети А при спостереженні з планети В дорівнює

$$S_{AB} = \frac{S}{2}.$$

**3.19.** Для геостаціонарного супутника Землі оцініть проміжок часу, впродовж якого він перебуває в тіні від Землі за період свого обертання. *Примітка: геостаціонарний супутник при своєму русі постійно перебуває над однією і тією ж точкою земної поверхні.*

*Розв'язок*

Спочатку визначимо радіус орбіти супутника (висоту супутника над поверхнею Землі). За другим законом Ньютона для руху тіла масою  $m$  по круговій орбіті радіусу  $r$  під дією сили Всесвітнього тяжіння збоку Землі масою  $M_3$  знаходимо

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM_3}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_3}{r}}.$$

Період обертання по колу:

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Тоді радіус геостаціонарної орбіти супутника:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_3 T^2}{4\pi^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24} \times (24 \times 3600)^2}{4\pi^2}} = 42\,000 \text{ км}$$

Довжина орбіти супутника:

$$L = 2\pi r = 2\pi \times 42\,000 \text{ км} = 264\,000 \text{ км}.$$

Оскільки довжина конуса сонячної тіні від Землі приблизно дорівнює 1.4 млн км, то на висоті геостаціонарного супутника тінь можна вважати циліндричною з діаметром, що дорівнює:

$$2R_3 = 2 \times 6378 \text{ км} = 12\,760 \text{ км}.$$

Тоді проміжок часу, упродовж якого геостаціонарний супутник Землі буде перебувати в тіні становить:

$$\Delta t = \frac{12\,760}{264\,000} \times 24 \text{ год} = 1.16 \text{ год} = 70 \text{ хв}.$$

**3.20.** Космічний телескоп «Габбл» є багатоцільовою орбітальною обсерваторією. Максимальна та мінімальна його висота над поверхнею Землі становлять 541 км та 537 км відповідно. Розрахуйте кількість обертів, які здійснює Габбл навколо Землі за одну добу. Радіус та маса Землі дорівнюють 6378 км та  $5.97 \times 10^{24}$  кг відповідно. Гравітаційна стала  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ .

*Розв'язок*

Розрахуємо період обертання Габбла навколо Землі:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3,$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} a^3}.$$

Велика піввісь орбіти космічного апарата

$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = \frac{h_{max} + R_{\oplus} + h_{min} + R_{\oplus}}{2} = \frac{h_{max} + h_{min}}{2} + R_{\oplus}$$

$$= \frac{541 + 537}{2} + 6378 = 6917 \text{ км} = 6.917 \times 10^6 \text{ м}.$$

Одержуємо:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6.67 \times 10^{-11} \times 5.97 \times 10^{24}} (6.917 \times 10^6)^3} = 5725 \text{ с} = 95.4 \text{ хв} = 1.59 \text{ год}.$$

Кількість обертів Габбла навколо Землі за добу:

$$N = \frac{t}{T} = \frac{24}{1.59} = 15.$$

- 3.21. Що визначає в технічному плані прогрес астрономії в останні десятиріччя?
- 3.22. Скільки обертів здійснило Сонце навколо центра Галактики за час існування Землі (5 млрд років)?
- 3.23. Яким умовам повинні задовольняти планети, на яких могло б появитись біологічне життя?
- 3.24. Яким умовам повинні задовольняти зорі, в околі яких могли б появитись планети?
- 3.25. Яким умовам повинні задовольняти зорі, в околі яких могли б появитись планети де б могло виникнути життя?
- 3.26. Опишіть сценарій та процедуру побудови міжзоряного зореліта на основі астероїда (сценарій А. Азімова).
- 3.27. Яку роль відіграє радіаційний захист екіпажу при побудові зорельотів та космічних станцій та колоній?
- 3.28. Промоделюйте побудову космічної колонії за сценарієм О'Нейла з населенням 10 000 осіб?
- 3.29. Промоделюйте побудову космічної колонії за сценарієм Дайсона з населенням 50 000 осіб?
- 3.30. Порівняйте економічну ефективність створення космічних колоній за сценаріями О'Нейла та Дайсона.
- 3.31. Оцініть кількість планет придатних для життя в нашій Галактиці.
- 3.32. Оцініть кількість планет придатних для розумного життя в нашій Галактиці.
- 3.33. Опишіть основні проблеми пошуку позаземних цивілізацій.
- 3.34. Опишіть шляхи боротьби з космічним сміттям.
- 3.35. Опишіть вплив космічних чинників на кліматичні та екологічні проблеми Землі.
- 3.36. Які особливості еволюції тісних подвійних систем?
- 3.37. Які особливості утворення планет та їх систем?
- 3.38. Як утворюються протопланетні туманності?
- 3.39. Чим відрізняються планети земної групи та планети-гіганти?
- 3.40. Які основні властивості Всесвіту?
- 3.41. Акрецією називається падіння речовини на зорю під впливом її тяжіння. Якщо падаюча речовина при зіткненні із зорею висвічує всю енергію, яку вона отримала від поля гравітації, то світимість зорі буде рівною  $L = \dot{M}_{ac} \frac{GM}{R}$ , де  $\dot{M}_{ac}$  – темп акреції,  $M$  – маса зорі,

$R$  – радіус зорі. Визначте коефіцієнт енерговиділення (відношення виділеної енергії до енергії спокою речовини, що брала участь в процесі виділення енергії) для акреції на нейтронну зірку з масою в півтора рази більшою від маси Сонця та радіусом 10 км, та для білого карлика з масою 1,4 маси Сонця та радіусом 5000 км. Порівняти отримані величини з ефективністю протон-протонної реакції.

- 3.42. Поясніть значення терміну акреційний диск.
- 3.43. Які фізичні процеси проходять при акреції речовини на чорну діру?
- 3.44. Які фізичні процеси проходять при акреції речовини на Землю?
- 3.45. Які фізичні процеси проходять при акреції речовини на Сонце?
- 3.46. Які фізичні процеси проходять при акреції речовини на Венеру?
- 3.47. Чи можливий при акреції речовини термоядерний синтез?
- 3.48. Рентгенівські пульсари в подвійних системах це акретивні нейтронні зорі. До таких пульсарів відноситься Her X-1\_ світимість якого  $10^{30}$  Вт. Оцініть темп акреції цього пульсара. Відповідь подати в г/с та масах Сонця за рік.
- 3.49. Прості оцінки показують, що обертальна енергія швидких радіопульсарів набагато більша за обертальну енергію звичайних зір. Чим це обумовлено?
- 3.50. Чи впливає рефракція на обидві екваторіальні координати світил або тільки на одну і чи завжди це відбувається?
- 3.51. Чи впливає рефракція на обидві екліптичні координати світил чи тільки на одну і чи завжди це буває?
- 3.52. При яких конфігураціях нижніх і верхніх планет умови їхнього спостереження найбільш сприятливі?
- 3.53. За яких конфігурацій нижніх і верхніх планет їх спостерігають увечері після заходу Сонця?
- 3.54. Чому синодичні періоди сусідніх із Землею планет найбільші?
- 3.55. Яка умова визначає рівність синодичного та зоряного періодів планети?
- 3.56. Намалуйте схему обертання верхньої планети щодо Землі та покажіть виникнення петлеподібного руху.
- 3.57. Порівняйте формулювання законів руху планет, дане Кеплером, з їх сучасним формулюванням. Чим вони відрізняються?
- 3.58. Які елементи орбіти визначають її орієнтацію у просторі?
- 3.59. Які елементи орбіти визначають її розміри та ступінь еліптичності?
- 3.60. Який фізичний зміст інтеграла енергії?
- 3.61. Що таке збурююча сила та збурююче прискорення?
- 3.62. Сформулюйте причину виникнення припливів та відливів на поверхні Землі.
- 3.63. Якщо рефракція піднімає світило над горизонтом, як змінює небесні координати світила добовий паралакс?
- 3.64. Як залежать від відстані добовий та річний паралакси?
- 3.65. У скільки разів річна аберація більша за добову?
- 3.66. Чому відбуваються прецесія та нутація земної осі?
- 3.67. Як прецесія земної осі пов'язана з тривалістю тропічного і зоряного року?
- 3.68. Чому зоряний рік довший за тропічний?
- 3.69. Чому прецесійні явища викликають зміни екваторіальних координат?
- 3.70. У якому разі не можна знайти власний рух навіть для близького небесного об'єкта?
- 3.71. Чому вимірювання координат горизонтальної системи більш прості, ніж вимірювання екваторіальних координат?
- 3.72. Запропонуйте способи визначення положення небесного мсрідіана в цій точці.

- 3.73.** Як знайти схилення світил при їх заході?
- 3.74.** Як обчислити довготу дня у певний календарний день року?
- 3.75.** Як рефракція впливає на прожолжительність світлої частини доби?
- 3.76.** Чи залежить довгота дня від довготи території?
- 3.77.** Які сутінки довші - цивільні чи астрономічні?
- 3.78.** Чому значення прямого сходження п світила змінюється з часом? А для Сонця?

## Розділ 4. Практична астрофізика

**4.1.** Радіолокаційні дослідження дозволяють визначати періоди обертання об'єктів Сонячної системи виходячи з розширення несучої частоти отриманого сигналу. Визначте період обертання 200 метрового астероїда, що наближається до Землі, спостереження якого велися на Голдстоунському радіотелескопі на довжині хвилі 3 см, при цьому розширення несучої частоти отриманого сигналу становило 200 гц. Вважати, що вісь обертання астероїда перпендикулярна до радарного променя.

*Розв'язок*

Визначимо несучу частоту відправленого сигналу:  $\nu = c/\lambda = 3 \cdot 10^8 / 0.03 = 10^{10}$  Гц = 10 ГГц. Оскільки розширення несучої частоти отриманого сигналу відбувається як за рахунок наближення, так і за рахунок віддалення країв астероїда, то для визначення періоду потрібно взяти половину ширини, тобто 100 гц. З ефекту Доплера визначимо лінійну швидкість віддалення (або наближення) краю астероїда:

$$\Delta\nu/\nu = V/c, \quad V = \Delta\nu \cdot c/\nu = 100 \cdot 3 \cdot 10^8 / 10^{10} = 3 \text{ м/с.}$$

Лінійна швидкість на екваторі астероїда пов'язана з кутовою швидкістю наступним чином  $V = \omega \cdot r$  ( $r$  – радіус астероїда), звідси період обертання буде:

$$T = 2\pi r/V = 2\pi \cdot 100/3 = 210 \text{ с} = 3.5 \text{ хв.}$$

**4.2.** Кожен з телескопів Кека має діаметр дзеркала 10 м та граничну зоряну величину 22m. Відстань між телескопами становить 85 м і вони можуть працювати окремо, або в режимі інтерферометра. Визначте якою буде їх загальна гранична зоряна величина, якщо вони ведуть спостереження одночасно за одним і тим же об'єктом (тобто як один телескоп). Порівняйте роздільну здатність одного телескопу та двох у режимі інтерферометра на довжині хвилі 1 мкм. Вкажіть розмір найменшої деталі поверхні, яку ще можна побачити на Плутоні (діаметр Плутона 2380 км, відстань від Сонця 34 астрономічні одиниці).

*Розв'язок*

Оскільки при одночасному спостереженні телескопів за одним і тим же об'єктом загальна площа збільшилась у два рази то і освітленість зображення також збільшилась вдвічі. Враховуючи, що зоряна величина це відношення освітленостей, то добавка до зоряної величини буде:

$$\Delta m = -2.5 \lg(E/2E) = 2.5 \lg(2) = 0.75.$$

Отже гранична зоряна величина збільшиться на 0.75m і становитиме 22.75<sup>m</sup>. Для оцінки роздільної здатності скористуємось відомою формулою дифракційного розділення для телескопа:

$$\gamma_1 = 1.22 \cdot 206265 \cdot \lambda/d,$$

та для інтерферометрів:

$$\gamma_2 = 206265 \cdot \lambda/D$$

(де  $\gamma$  – роздільна здатність у секундах дуги,  $\lambda$  – довжина хвилі,  $d$  – діаметр телескопа,  $D$  – відстань між телескопами). Підставляючи значення з умови, остаточно отримаємо:

$$\gamma_1 = 17'' \cdot 10^{-3}, \quad \gamma_2 = 2.5'' \cdot 10^{-3}.$$

Кутовий розмір Плутона становитиме:

$$2400 \text{ км} \cdot 206265 / (34 \cdot 1.5 \cdot 10^8 \text{ км}) = 0.1'',$$

тобто на одиницю роздільної здатності (піксель) припадає близько 350 км при простому спостереженні та 60 км (58 км) в режимі інтерферометра. Для того щоб розрізнити деталь потрібно 2-3 пікселі, а значить це близько 1000 або 150 км

**4.3.** У скільки разів зміниться величина сонячної сталої, якщо замість Сонця ( $R=7 \cdot 10^5$  км,  $T=6000$  К) помістити щойно утворену нейтронну зорю, що має радіус 14 км, а температура її поверхні  $6 \cdot 10^6$  К?

*Розв'язок*

Сонячна стала  $Q$  – це потужність енергії випромінювання, що приходить від Сонця на 1 м<sup>2</sup> поверхні Землі. Сонце випромінює майже як абсолютно чорне тіло, тому з кожної одиниці його поверхні випромінюється



$$W_0 = \sigma T^4.$$

Повна потужність випромінювання (світність) Сонця

$$W = W_0 S = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

де  $\sigma$  – стала Стефана-Больцмана,  $T$  – температура поверхні Сонця. Вважаємо, що відстань Землі до нейтронної зорі дорівнює теперішній відстані до Сонця: «на місце Сонця помістили...» Якщо Сонце замінити на нейтронну зорю, відношення:

$$\frac{Q}{Q_{NS}} = \frac{W}{W_{NS}} = \frac{4\pi\sigma R^2 T^4}{4\pi\sigma R_{NS}^2 T_{NS}^4} = \frac{1}{400}.$$

**4.4.** Сферичний кінь знаходиться в вакуумі, має абсолютно чорне тіло та обертається швидко та хаотично. На якій довжині хвилі його найкраще спостерігати, якщо відстань коня від Сонця дорівнює 1 а.о.?

Розв'язок.

Якщо тіло коня абсолютно чорне – ми не можемо спостерігати відбите сонячне випромінювання, а лише його власне. Розподіл випромінювання абсолютно чорного тіла залежить лише від його температури. Якщо кінь обертається швидко та хаотично, можемо вважати, що всі точки його поверхні мають однакову температуру. Цю температуру можна розрахувати виходячи з закону збереження енергії: кінь повинен випромінювати рівно стільки енергії, скільки отримує від Сонця. Сонце, випромінює майже як чорне тіло, тому кожен метр квадратний поверхні Сонця дає  $W_0 = \sigma T^4$ , а на відстані  $D$ , згідно з законом обернених квадратів потік випромінювання  $W$ :

$$W = W_0 \left(\frac{r}{d}\right)^2 = \frac{\sigma T^4}{4} \left(\frac{d}{D}\right)^2,$$

де  $\sigma$  – стала Стефана-Больцмана,  $r$  та  $d$  – радіус та діаметр Сонця відповідно, а  $T$  – температура Сонця (приймемо її за  $6000^\circ\text{K}$ ). Тоді кінь радіуса  $R$  отримує від Сонця:

$$E^* = W \cdot 4\pi R^2 = \frac{\pi\sigma T^4}{4} \left(\frac{Rd}{D}\right)^2,$$

а випромінює:

$$E = \sigma t^4 \cdot 4\pi R^2,$$

де  $t$  – температура коня. Звідси отримуємо:

$$t = \frac{T}{2} \sqrt{\frac{d}{D}} \approx 285^\circ\text{K}.$$

Довжину хвилі, на яку приходить максимум власного випромінювання коня знайдемо з закону зміщення Віна:  $\lambda_{\max} \cdot t = 0.29 \text{ см}\cdot\text{K}$ , що дає приблизно  $10 \text{ мкм}$ .

**4.5.** 6 вересня 2017 року о 12 год за всесвітнім часом на Сонці стався спалах в результаті якого 8 вересня о 00 год за київським часом почалася викликана ним дуже сильна магнітна буря. Обчисліть з якою швидкістю рухався в сторону Землі потік плазми, викинутий з поверхні Сонця. (Вказівка: Рух речовини вважати прямолінійним і рівномірним.)

Розв'язок

$t_1 = 12$  год 6 вересня,  $t_2 = 0$  годин за Києвом 8 вересня або 21 година за всесвітнім часом. Тоді  $\Delta t = t_2 - t_1 = 33$  год =  $1.2 \cdot 10^5$  сек. Тоді, знаючи, що 1 а.о. =  $1.5 \cdot 10^8$  км, отримаємо швидкість потоку плазми від спалаху:  $v = r/\Delta t \approx 1300 \text{ км/с}$ .

**4.6.** На скільки градусів вдасться нагріти склянку води, якщо використати на це всю енергію, що за рік зберуть чотири 8.2-метрові телескопи VLT, якщо б вони всі цілодобово спостерігали Сиріус ( $m = -1,5^m$ ) Відомо що Сонце має видиму зоряну величину  $-26,7^m$  і від нього надходить  $1.35 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$ . Питома теплоємність води  $4.2 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}\cdot\text{K}$ . Розв'язок: Різниця видимих зоряних величин Сонця та Сиріуса становить  $25,2^m$ , що відповідає відношенню потоків енергії  $2,512^{25,2} = 10^{10,1} = 12 \cdot 10^9$ . За рік ( $31.5 \cdot 10^6 \text{ с}$ ) всі чотири телескопи (площа дзеркала кожного  $\pi \cdot 8.22^2 / 4 = 52.8 \text{ м}^2$ ) зберуть  $1.35 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2 \cdot 4 \cdot 52.8 \text{ м}^2 \cdot 31.5 \cdot 10^6 \text{ с} / 12 \cdot 10^9 = 748 \text{ Дж}$ . В склянці  $0.2 \text{ кг}$  води з питомою теплоємністю  $4.2 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}\cdot\text{K}$ . Тому вода в склянці нагріється на  $748 \text{ Дж} / (0.2 \text{ кг} \cdot 4.2 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}\cdot\text{K}) = 0.89 \text{ K}$ .

**4.7.** Розсіяне зоряне скупчення має видимий візуальний блиск  $1^m$ . Припускаючи, що скупчення складається лише із зір шостої зоряної величини. Яке максимальне число зір можна побачити неозброєним оком?

*Розв'язок*

Неозброєним оком можна побачити зорі до шостої зоряної величини. Нехай число зір шостої величини буде  $N$ . Блиск однієї такої зорі позначимо  $E_1$ . Тоді сумарний блиск усіх зір  $E_N = NE_1$ . Для різниці зоряних величин одержуємо

$$m_N - m_1 = 2.5 \lg \frac{E_1}{E_N} = 2.5 \lg \frac{1}{N} = -2.5 \lg N.$$

З іншого боку:

$$m_N - m_1 = 1^m - 6^m = -5^m.$$

Отже:

$$\begin{aligned} 2.5 \lg N &= 5, \\ N &= 10^2 = 100. \end{aligned}$$

Таким чином, максимальне число зір з яких може складатися зоряне скупчення, і які ще можна спостерігати неозброєним оком, становить 100.

**4.8.** Різниця зоряних величин двох зір, що мають однакову світність становить  $5^m$ . У скільки разів одна зоря знаходиться далі від іншої.

*Розв'язок*

Нехай перша зоря має видиму зоряну величину  $m_1$  і знаходиться на відстані  $r_1$ . Другій відповідають значення  $m_2$  і  $r_2$ .

Тоді:

$$m_1 - m_2 = 2.5 \lg \frac{E_2}{E_1} = 2.5 \lg \frac{\frac{L}{4\pi r_2^2}}{\frac{L}{4\pi r_1^2}} = 5 \lg \frac{r_1}{r_2}.$$

Одержуємо:

$$5 = 5 \lg \frac{r_1}{r_2}.$$

Звідси:

$$\frac{r_1}{r_2} = 10^1 = 10.$$

**4.9.** Кулясте зоряне скупчення містить сто однакових зір восьмої зоряної величини. Визначте сумарну видиму зоряну величину даного скупчення. Чи можна таке зоряне скупчення побачити «неозброєним оком», тобто без телескопа?

*Розв'язок*

Для зорі восьмої зоряної величини маємо  $m_1 = 8^m$ . Нехай видимий блиск однієї такої зорі буде  $E_1$ . Тоді сто зір будуть створювати блиск  $E_{100} = 100E_1$ . Знайдемо видиму зоряну величину, що відповідає такому блискові:

$$m_{100} - m_1 = 2.5 \lg \frac{E_1}{E_{100}} = -2.5 \lg 100 = -5^m.$$

Остаточно

$$m_{100} = -5^m + m_1 = -5^m + 8^m = 3^m.$$

Оскільки сумарний блиск  $3^m < 6^m$ , то дане скупчення можна спостерігати неозброєним оком.

**4.10.** Визначити видиму зоряну величину Землі для спостерігача, що знаходиться на поверхні Місяця у момент «повної Землі». Альbedo Землі 0.43, альbedo Місяця 0.07, видима

зоряна величина Місяця  $m_M = -12.5^m$ , середній радіус Землі  $R_3 = 6378$  км, середній радіус Місяця  $R_M = 1738$  км.

*Розв'язок*

Знайдемо освітленість, яку створює Сонце на поверхні Землі

$$E_3 = \frac{L_\odot}{4\pi a^2}.$$

Тоді «світність» Землі, тобто відбитий світловий потік від Сонця поверхнею Землі

$$L_3 = E_3 \times \pi R_3^2 A_3.$$

Тут  $A_3$  – сферичне альbedo.

Для освітленості створеною Землею на поверхні Місяця одержуємо

$$E_{M3} = \frac{L_3}{2\pi r_{M3}^2} = \frac{R_3^2 A_3 L_\odot}{8a^2 r_{M3}^2}.$$

Множник  $1/2$  замість  $1/4$  пов'язаний із тим, що сонячне світло відбивається лише у половину півсфери.

Аналогічно можемо одержати вираз для освітленості створеної Місяцем на поверхні Землі

$$E_{3M} = \frac{L_M}{2\pi r_{M3}^2} = \frac{R_M^2 A_M L_\odot}{8(a + r_{M3})^2 r_{M3}^2}.$$

Для різниці видимих зоряних величин одержимо:

$$m_M - m_3 = 2.5 \lg \frac{E_{3M}}{E_{M3}} = 2.5 \lg \frac{\frac{R_M^2 A_M L_\odot}{8(a + r_{M3})^2 r_{M3}^2}}{\frac{R_3^2 A_3 L_\odot}{8a^2 r_{M3}^2}}$$

$$m_M - m_3 = 2.5 \lg \frac{R_M^2 A_M a^2}{R_3^2 A_3 (a + r_{M3})^2} \approx 2.5 \lg \frac{A_M R_M^2}{A_3 R_3^2}.$$

Підставимо числові значення:

$$-12.5^m - m_3 \approx 2.5 \lg \frac{0.07 \times 1738^2}{0.43 \times 6378^2} = -3.6^m.$$

Остаточно, видима зоряна величина Землі для спостерігача, що знаходиться на поверхні Місяця у момент «повної Землі»

$$m_3 = -12.5^m + 3.6^m = -8.9^m.$$

**4.11.** У лютому 2013 року над Челябінськом вибухнув метеорит. За оцінками метеорне тіло мало поперечний діаметр порядку 15 м. Якщо допустити, що це тіло мало кулясту форму і альbedo як у Місяця (7%), визначити, який був його блиск на відстані Місяця від Землі? Вважати, що освітлена сторона цього метеорного тіла була повернута до Землі в момент спостереження. Яким повинен бути діаметр об'єктива телескопа  $D$  (мм), щоб зафіксувати це тіло?

*Розв'язок*

Позначимо видиму зоряну величину метеориту  $m$ , а Місяця  $m_M$ . Тоді для різниці видимих зоряних величин одержимо:

$$\begin{aligned} m - m_M &= 2.5 \lg \frac{E_{\text{Місяця}}}{E_{\text{Метеорита}}} = 2.5 \lg \frac{R_{\text{Місяця}}^2}{R_{\text{Метеорита}}^2} = \\ &= 5 \lg \frac{3474000}{15} = 26.8^m. \end{aligned}$$

Якщо видима зоряна величина Місяця у повні  $m_M = -12.7^m$ , то максимально можлива зоряна величина метеориту:

$$m = m_M + 26.8^m = -12.7^m + 26.8^m = 14.1^m.$$

Неозброєним оком таке небесне тіло побачити не можна. Знайдемо мінімальний діаметр об'єктива телескопа, необхідного щоби зафіксувати тіло. Скористаємося формулою проникної сили телескопа:

$$m_{TG} = 6^m - 3.9^m + 5 \lg D_{MM}.$$

Звідси:

$$14.1^m = 6^m - 3.9^m + 5 \lg D_{MM},$$

$$5 \lg D_{MM} = 12,$$

$$D_{MM} = 10^{2.4} = 252 \text{ мм.}$$

**4.12.** Космонавт, мандруючи Сонячною системою, висадився на невеликій планеті і провів спостереження декількох віддалених зір у напрямку, що близький до перпендикулярного площині орбіти планети. Він побачив, що положення зір змінюється з часом і за один оберт планети навколо Сонця вони описують коло радіусом  $12''$ ,4. Як називається таке зміщення зір? Визначте на якій відстані від Сонця обертається ця планета? На якій планеті проводились спостереження?

*Розв'язок*

Оскільки це зміщення однакове для декілька віддалених зір, це не може бути паралактичне зміщення, яке залежить від відстані до зорі. Це зміщення називається аберацією та пов'язане з тим, що швидкість руху Землі навколо Сонця змінюється за напрямком. Зв'язок між кутом аберації  $\alpha$  і орбітальною швидкістю планети  $v$ :  $\sin(\alpha) = v/c$ , де  $c$  – швидкість світла. Малий кут аберації дає нам змогу замінити синус кута самим кутом в радіанах, що дає:

$$v = c \cdot \alpha(\text{рад}) = c \cdot \alpha''/206265 = 18 \text{ км/с.}$$

Для обчислення відстані від Сонця планети використаємо третій закон Кеплера:  $r^3/T^2 = 1$  (якщо період визначається у земних роках, а відстань у астрономічних одиницях). Переведемо 18км/с в а.о./рік:

$$18\text{км/с} \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 3600\text{с}/150 \cdot 106 \text{ км} = 3,8 \text{ а.о./рік.}$$

Тоді, розуміючи, що  $v=2\pi r/T$ , можемо переписати третій закон Кеплера як

$$rv^2 = 4\pi^2, \text{ або } r=(2\pi/v)^2 = (6,28/3,8)^2 = 2,7 \text{ а.о.}$$

Отже планета знаходиться у поясі астероїдів, оскільки в умові мова йде про невелику планету, то це може бути тільки карликова планета Церера.

**4.13.** В існуванні зір і теплокровних живих істот є одна спільна риса: кількість тепла, що в них виділяється повинна дорівнювати кількості, що витрачається. Інакше такі фізичні системи загинуть або від перегріву, або із-за охолодження. З урахуванням того, що середня густина зір головної послідовності та живих істот одного порядку, показати, що їх температура пропорційна взятому в степені  $1/4$  добутку кількості енергії, що виділяється одиницею маси, та розміру.

*Розв'язок*

І зорі, і теплокровні живі істоти випромінюють ( $L_-$ ), як абсолютно чорні тіла – за законом Стефана-Больцмана: пропорційно добутку площі системи ( $S \sim R^2$ ,  $R$  – її радіус) на одиницю випромінюваної енергії ( $\sigma T^4$ ,  $\sigma$  – стала Стефана-Больцмана,  $T$  – ефективна температура). Тобто:  $L_- \sim R^2 \sigma T^4$ . Енерговиділення в системі ( $L_+$ ) йде в її об'ємі ( $V \sim R^3$ ) і пропорційне її масі ( $M$ ), тобто:  $L_+ \sim \epsilon M \sim \epsilon \rho R^3$ , де середня густина системи –  $\rho = M/V \sim M/R^3$ ,  $\epsilon$  – темп енерговиділення на одиницю маси. Якщо система знаходиться в тепловій рівновазі:  $L_- = L_+$ .

Таким чином, за середніх густин зір (головної послідовності)  $\rho^*$  та живих істот  $\rho_{\text{жі}} \approx \rho^* \sim 1 \text{ г/см}^3 = \text{const}$ :  $T \sim (\epsilon R)^{1/4}$ .

**4.14.** Телескоп якого діаметра знадобиться, щоб побачити Сонце з планетної системи навколо зорі GJ 436 через 3 млн. років після перетворення Сонця на білий карлик, коли його ефективна температура буде  $5.8 \cdot 10^4 \text{ К}$ , а радіус – 5500 км, і через 2 млрд. років, коли він охолоне до  $10^4 \text{ К}$ . Вважати відстань між GJ 436 і Сонцем протягом усього часу незмінною і рівною початковій (10 пк). В наш час абсолютна зоряна величина Сонця складає  $4,72^{\text{m}}$ .

*Розв'язок*

Проникаюча здатність телескопа визначається наближеним виразом як

$$m = k + 5 \lg(D, \text{см}), \quad k = 7,0^{\text{m}} \text{ або } 7,5^{\text{m}}.$$

Тобто, необхідно визначити видиму зоряну величину білого карлика через 3 млн. і 2 млрд. років після його утворення. Так як планета розташована на 10 пк – на стандартній відстані, на якій визначається абсолютна зоряна величина ( $M_{\text{sol}} = +4,72^{\text{m}}$ ), то різниця зоряних величин Сонця в нормальному стані і як білого карлика буде визначатися логарифмом відношенням освітленостей. Світність Сонця і в нормальному стані і у вигляді білого карлика визначається за формулою  $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ , після підстановки відповідних значень температури і радіуса (3 бали). Тому, оскільки відстань постійна, то за формулою Погсона,  $m_{\text{sol}}$  - видима зоряна величина Сонця в нормальному стані,  $m_{\text{wd}}$  - видима зоряна величина білого карлика.

$$m_{\text{wd}} - m_{\text{sol}} = 2.512 \lg E_1/E_2 = 2,512 \lg \frac{R_{\text{sol}}^2 T_{\text{sol}}^4}{R_{\text{wd}}^2 T_{\text{wd}}^4}.$$

Підставляючи чисельні значення, знаходимо в першому випадку:  $m_{\text{wd}} = m_{\text{sol}} + 0,51^{\text{m}} = 5,23^{\text{m}}$ , тобто телескоп не потрібен, білий карлик буде видно неозброєним оком. У другому випадку

$$m_{\text{wd}} = m_{\text{sol}} + 8,14^{\text{m}} = 12,86^{\text{m}}.$$

У цьому випадку потрібен телескоп з діаметром 12 см (якщо вважати  $k = 7,0^{\text{m}}$ ) або 15 см ( $k = 7,5^{\text{m}}$ ).

**4.15.** Мінімальний кут, що розділяє оптична система з діаметром об'єктива  $D$  на довжині хвилі  $\lambda \in d = 1.22 \lambda/D$  (рад) (\*). Як використати цю властивість для обґрунтування відомого факту, що мати Кеплера могла бачити фази Венери неозброєним оком? (Урахувати, що діаметр зіниці людського ока, яке адаптоване до темряви, приблизно дорівнює 6 мм).

*Розв'язок*

Мінімальна відстань між Землею і Венерою складає:

$$(150-108) 10^6 \text{ км} = 42 \text{ млн. км.}$$

Правда, при мінімальній відстані Венера знаходиться у сполученні з Сонцем і її не видно. Але, Венера настільки яскрава, що упевнено спостерігається вже при кутовій відстані від Сонця на  $15^\circ$ , коли відстань до Землі не дуже (на 3%) відрізняється від мінімального, так що цим збільшенням відстані можна знехтувати. Це відповідає куту, під яким спостерігається діаметр Венери:

$$12140 \text{ км}/42 106 \text{ км} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ рад.} = 1'.$$

Око людини є оптичною системою, для якої по формулі (\*) при довжині хвилі в оптичному діапазоні  $= 0.5 \text{ мкм}$  і діаметрі зіниці  $D = 6 \text{ мм}$ , дифракційна роздільна здатність складає  $10^{-4} \text{ рад.} = 0.3'$ . Таким чином, найбільший кутовий діаметр Венери перевищує роздільну здатність ока в  $(3 \cdot 10^{-4}) / 10^{-4} = 3$  рази. Але зазвичай можливості ока обмежені не дифракцією світла, а аберациями (недосконалістю кришталіка), чому і вважають, що око не може бачити кут менше  $1'$ . Однак принципова можливість того, що хтось з дуже хорошим зором може бачити фази Венери, не має суперечностей з законами дифракції світла.

**4.16.** Чи можна побачити диск Сонця з поверхні карликової планети Плутон неозброєним оком, та яка буде видима зоряна величина Сонця для такого спостерігача? Розв'язок провести з урахуванням ексцентриситету орбіти.

*Розв'язок*

Роздільна здатність людського ока становить у середньому одну кутову мінуту. Оскільки орбіта Плутона відрізняється від колової, слід обчислити перигелійну та афелійну відстані,

$$r_p = a(1 - e) = 30 \text{ а.е.}, \quad r_a = a(1 + e) = 50 \text{ а.о.},$$

(та кутовий розмір Сонця на цих відстанях. Кутовий розмір Сонця на відстані 1 а. о. становить біля  $32'$ . Оскільки кути малі, то можна тангенс кутів замінити значеннями самих кутів. Тоді одержуємо:

$$r_p = 32'/\alpha_p \text{ і } r_a = 32'/\alpha_a; \alpha_p = 32'/(a(1-e)) \text{ і } \alpha_a = 32'/(a(1+e)).$$

Підставляючи числові значення, одержуємо:

$$\alpha_p = 1.1' \text{ і } a = 0.7.$$

Отже диск Сонця можна побачити тільки в перигелії на межі роздільної здатності ока. Видима зоряна величина Сонця з Землі (відстань 1 а. о.) становить  $-26.8^m$ , а інтенсивність світла обернено пропорційна квадрату відстані. Тоді видима зоряна величина Сонця з відстані Плутона у перигелії буде  $m = -26.8^m + 51g(30) = -26.8^m + 7.4^m = -19.4^m$ , що значно яскравіше ніж блиск Місяця при його спостереженнях з Землі ( $-13^m$ ).

**4.17.** Визначте лінійний діаметр Луни за даними фотозйомки телеоб'єктивом з  $F = 1$  м, якщо на негативі діаметр диска Місяця має розмір  $d = 9,57$  мм при зйомці на мінімальній відстані до Місяця. Середня відстань до Місяця  $a = 384\,400$  км і ексцентриситет орбіти  $e = 0,0549$ . Оцініть у відсотках, як максимально зміняться розміри зображення диска у різних точках орбіти.

*Розв'язок*

При малих кутових розмірах Місяця справедливі вирази:

$$\frac{D_s}{r_q} = \frac{d}{F} \text{ або } D_s = \frac{dr_q}{F},$$

де  $D_s$  – шуканий діаметр Місяця;  $r_q$  – відстань до Місяця в перигеї, яка визначається за формулою

$$r_q = a(1 - e) = 384\,400 \cdot (1 - 0,0549) = 384\,400 \cdot 0,9451 = 363\,296 \text{ км.}$$

У результаті отримуємо:

$$D_s = 3475 \text{ км.}$$

Для оцінки максимальної відмінності діаметрів диска на негативі Знайдемо відношення діаметрів за формулою для перигею та апогею:

$$\frac{r_q}{r_Q} = \frac{d_Q}{d_q} = \frac{1 - e}{1 + e} = 0,896.$$

Отже,

$$\frac{d_q - d_Q}{d_q} = \left(1 - \frac{d_Q}{d_q}\right) \cdot 100\% = 10,4\%.$$

**4.18.** Увігнуте дзеркало в телескопі Ньютона має фокусну відстань  $F = 60$  см. Віддаленість предмета спостереження  $a_1 = 500$  м. Визначте: 1) в якій точці осі труби потрібно розташувати мале плоске дзеркало, щоб зображення знаходилося на відстані  $c = 15$  см від осі; 2) яке одержуване зменшення; 3) яким буде збільшення, якщо розглядати мале зображення в лупу з фокусною відстанню  $f = 3$  см при відстані найкращого зору  $S = 24$  см. Чи має ідеальне параболічне дзеркало сферичну аберацію?

*Розв'язок*

1. Запишемо формулу дзеркала:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{F},$$

( $a_1$  – відстань від вершини увігнутого дзеркала до предмета;  $a_2$  – відстань від вершини увігнутого світла до зображення;  $F$  – фокусна відстань цього дзеркала). Тут за умовою задачі  $a_2 = c + l$  ( $l$  – відстань від вершини увігнутого дзеркала до плоского дзеркала;  $c$  – відстань від плоского дзеркала до зображення). Отримаємо:

$$a_2 = \frac{F \cdot a_1}{a_1 - F}, \quad l = \frac{F \cdot a_1}{a_1 - F} - c = 45,072 \text{ см.}$$

2. Отримане при цьому збільшення (фактично зменшення):

$$\Gamma = \frac{a_2}{a_1} = \frac{c+l}{a_1} = 0,0012014.$$

3. Запишемо формулу тонкої лінзи:

$$-\frac{1}{a'_1} + \frac{1}{a'_2} = \frac{1}{f},$$

де  $a'_1$  – відстань від лінзи(лупи) до предмета (предметом тут є зображення, отримане за допомогою дзеркала, див. п. 1) цього завдання);  $a'_2$  – відстань від лінзи (лупи) до зображення;  $f$  – фокусна відстань цієї лупи. Відстань до предмета відраховується проти ходу променів, тому  $a'_1 < 0$ . Оскільки у подібних системах з використанням лупи зображення є уявним (і збільшеним), тобто. створеним у тому напрямі від лупи, де знаходиться предмет, то й  $a'_2 < 0$ , тобто.  $a'_2 = -S$ . Отримуємо

$$\frac{1}{|a'_1|} - \frac{1}{S} = \frac{1}{f}; \quad |a'_1| = \frac{S \cdot f}{S+f}.$$

У результаті збільшення у цьому випадку:

$$\Gamma = \frac{S}{|a'_1|} = \frac{S+f}{f} = 9.$$

**4.19.** В обсерваторії є два астрографи (екваторіально встановлені фотографічні телескопи). Перший має діаметр об'єктива  $D_1 = 16$  см, світлосилу  $A_1 = 1:4$ , другий –  $D_2 = 16$  см,  $A_2 = 1:20$ . Який астрограф вигідніше використовувати для: 1) отримання фотографії хвоста комети; 2) фотографування місячних гор; 3) «падаючих зірок»; 4) сонячних плям; 5) точного фотографічного визначення положень зірок у Плеядах; 6) отримання фотографії туманності Оріона.

*Розв'язок*

Визначаємо фокусні відстані телескопів:  $F_1 = 64$  см;  $F_2 = 320$  см. Чим більше світлосила телескопа, тим більше кут його поля зору, але менше збільшення при тому самому окулярі. Отже, перший астрограф більше підходить для панорамних зйомок, другий – для детальних, тобто. для задач 1, 3, 6 більше підійде перший астрограф, а для 2, 4, 5 другий.

**4.20.** Скільки фотонів падає за 1 с на дзеркало телескопа Кека ( $D = 10$  м) з Веги та з зірки  $30^m$ ? Потік від джерела нульової зіркової величини становить приблизно  $10^{10}$  фотонів/( $m^2 \cdot c$ ).

*Розв'язок*

Площа дзеркала телескопа Кека  $S = 78,54$   $m^2$ , тому з Веги кожену секунду на це дзеркало падає  $\sim 8 \cdot 10^{11}$  фотонів. З зірки  $30^m$  телескоп Кека отримує в  $10^{0,4 \cdot 30} \approx 10^{12}$  разів менше фотонів, ніж з Веги, або приблизно 1 фотон в секунду.

**4.21.** Чи мають лінзи телескопа-рефрактора сферичну аберацію?

**4.22.** Чому в телескопах використовуються параболічні дзеркала?

**4.23.** Чи можете ви побудувати оптичний телескоп своїми силами (в шкільних умовах)? Якщо так, то опишіть це.

**4.24.** Чи має ідеальне параболічне дзеркало дисторсію?

**4.25.** Виразити різницю зоряних величин в децибелах.

**4.26.** При спостереженні в телескопі спостерігач не помічає змін в чіткості зображення, відсовуючи окуляр на четвертину міліметра. Що можна сказати про світлосилу телескопа?

**4.27.** В скільки разів світлосила суцільного телескопа Шмідта більша за світлосилу звичайного телескопа? Показник заломлення скла  $n$ .

**4.28.** Вияснити яка доля від загальної кількості світла буде попадати всередину щілини з нормальною шириною, якщо діаметр однорідного турбулентного диску зорі рівний  $0,5''$ ,  $1''$  та  $2''$ . Довжина хвилі  $500$  нм. Відносна відстань  $F/D = 15$  та діаметр головного дзеркала  $D = 100$  см.

**4.29.** Розрахувати загальну довжину спектру Сонця в третьому порядку в області видимого випромінювання (від  $400$  до  $700$  нм) отриманого за допомогою авто колімаційного спектрографа. Фокусна довжина спектрографа  $23$  м. Решітка має  $620$  штрихів на  $1$  мм. Загальні її розміри -  $126 \times 67$  мм. Чому рівна її роздільна здатність та середня дисперсія в першому порядку?

**4.30.** Призмове камера має наступні характеристики: діаметр  $D = 400$  мм, фокус  $A = 160$  см. Призма виготовлена з крону та має заломлюючий кут  $7$  градусів. Залежність задається законом Корню з параметром  $C = 7,756$ ;  $\lambda_0 = 307$  нм. Яку площу на небі

покриває пластинка розмірами  $30 \times 30$  см? Яка лінійна дисперсія в фокусі камери поблизу лінії  $H_\gamma$ ?

- 4.31. Щілину звужують до  $5 \cdot 10^{-4}$  см. З якою точністю повинні бути паралельні її краї, щоби при її довжині 1 см кількість світла, що проходить через різні краї, відрізнялась не більше одного процента?
- 4.32. Яка максимальна температура, до якої можна нагріти тіло за допомогою лінзи чи дзеркала?
- 4.33. Визначити освітленість від Місяця в першій чверті, коли його інтегральний блиск рівний  $m = -10,39^m$ ?
- 4.34. Скільки квадратних градусів міститься у всій сфері?
- 4.35. Скільком зоряним величинам відповідає а) 100 децибелів, б) 20 децибелів?
- 4.36. Чому рівний максимальний квантовий вихід світлочутливого елемента, робота якого базується на зовнішньому фотоелекті?
- 4.37. Розрахувати, яка буде енергетична освітленість поверхні, що обернена до півсфери, яка випромінює як абсолютне чорне тіло при  $T = 300\text{K}; 30\text{K}; 2,7\text{K}$ .
- 4.38. Обчислити величину фотоструму, що виникає в фотокатоді з чутливістю 1200 мА/лм при спостереженні зірки А0, зоряна величина якої рівна  $m = 7^m; 10^m; 15^m$ . Діаметр телескопа 125 см. Втрати світла в телескопі 15 відсотків.
- 4.39. Нехай  $n_i$  - втрати світла за 1 секунду, а  $n_e$  - число квантів від зірки. Визначити, який час накопичення  $t$  потрібний для того, щоб отримати похибку  $\varepsilon$ .
- 4.40. Нічне небо випромінює в світлі лінії з довжиною хвилі 557,7 нм (оксиген)  $2 \cdot 10^4$  квант/сек з  $1 \text{ см}^2$ . Визначити поверхневу яскравість неба для цього світла.
- 4.41. В результаті вимірювань, проведених різними спостерігачами, отримані  $N$  оцінок блиску зорі  $\Delta m_i$  по відношенню до однієї зорі порівняння. Як обчислити середню величину  $\Delta \bar{m}$ ?
- 4.42. Розсіяне денне світло достатньо ізотропне (особливо при хмарній погоді) та має велику яскравісну температуру, що близька до температури Сонця. Якби випромінювання було рівноважним, то всі предмети нагрілись би до яскравісної температури, чого насправді нема. Пояснить це.
- 4.43. Визначить інтенсивність випромінювання, що відповідає максимуму функції Планка.
- 4.44. Обчислити колірну температуру Сонця.
- 4.45. Обчислити колірну температуру Спіки і  $\lambda$  Водолія.
- 4.46. Обчислити колірну температуру Антареса і  $\varepsilon$  Великого Пса.
- 4.47. Обчислити колірну температуру Денеба і  $\beta$  Андромеди.
- 4.48. Обчислити колірну температуру Капелли і  $\sigma$  Оріона.
- 4.49. Обчислити колірну температуру Регула і  $\delta$  Діви.
- 4.50. Обчислити температуру Сонця за значенням сонячної сталої.
- 4.51. За температурою і показником кольору обчислити лінійний радіус Спіки.
- 4.52. За температурою і показником кольору обчислити лінійний радіус  $\lambda$  Водолія.
- 4.53. За температурою і показником кольору обчислити лінійний радіус Проксими Центавра.
- 4.54. За температурою і показником кольору обчислити лінійний радіус альфа Центавра та її компонент.
- 4.55. За температурою і показником кольору обчислити лінійні радіуси зірок: Антареса,  $\zeta$  Великого Пса і Лаланд 21185.
- 4.56. Обчислити масу і середню густину зірок: Спіки,  $\lambda$  Водолія і Проксими Центавра.
- 4.57. Обчислити масу і середню густину зірок: Антареса,  $\zeta$  Великого Пса і Лаланд 21185.



- 4.58.** Співставити обчислені радіуси і маси зірок Спіки,  $\lambda$  Володія і Проксіми Центавра з їх світністю і спектральним класом і визначити їх положення на діаграмі Герцшпрунга-Рессела.
- 4.59.** Співставити обчислені радіуси і маси зірок Антареса,  $\zeta$  Великого Пса і Лаланд 21185 з їх світністю і спектральним класом і визначити їх положення на діаграмі Герцшпрунга-Рессела.
- 4.60.** Наскільки буду відрізнятися блиск зорі від правильного значення (закон Погсона), якщо в основу обчислення зоряних величин покласти формулу  $m_1 - m_2 = C \ln \frac{E_1}{E_2}$ , де  $C = -\frac{1}{0.398}$ , так як це впливає з аналізу зоряного каталогу Птолемея. Вважається, що відлік ведеться від зорі нульової величини та «правильний» блиск зорі рівний: а)  $10^m$ ; б)  $15^m$ ; в)  $20^m$ .
- 4.61.** Чи достатньо одного поняття інтенсивності для опису поля випромінювання? Як пов'язані між собою поняття інтенсивності та поверхневої яскравості?
- 4.62.** Чому ліхтарі, що мають однаковий кутовий розмір, вночі здаються однаковими незалежно від відстані до них?
- 4.63.** Як змінюється поле випромінювання в телескопі? Втратами на відбивання та поглинання знехтувати.
- 4.64.** Один українець стверджував, що він бачив Венеру з дна глибокого колодязя вдень. Чи говорив він правду?
- 4.65.** Поясніть чому вдень чутливість людського ока більша для червоного світла, ніж для синього (ефект Пуркінє).
- 4.66.** Чому рівний максимальний квантовий вихід фотоелемента, робота якого базується на зовнішньому фотоелекті?
- 4.67.** Розрахувати якою буде енергетична освітленість поверхні, яка обернена до напівсфери, що опромінює як абсолютно чорне тіло при температурі: а) 300К; б) 195 К; в) 77К; г) 2,7 К.
- 4.68.** У скільки разів світлосила телескопа Максудова більша за світлосилу звичайного телескопа? Показник заломлення скла  $n$ .
- 4.69.** Скільком зоряним величинам відповідає а) 10 децибелів, б) 200 децибелів?
- 4.70.** Чому рівний розмір першої зони Френеля при покритті зір Місяцем для довжини хвилі 550 нм?
- 4.71.** В скільки разів запуск геофізичної ракети на висоту 300 км енергетично вигідніший, ніж запуск супутника з такою ж масою з науковою апаратурою на цю ж висоту?
- 4.72.** Призмове фотоапарат має фокусну відстань 210 см. Заломлюючий кут рівний 8 градусів. Температурний градієнт коефіцієнта заломлення скла рівний  $\frac{dn}{dt} = 5 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ . Визначити наскільки зміститься лінія  $H_\gamma$  при зміні температури на 2 градуси. Зміщення виразити в нанометрах або ангстремах та в променевих швидкостях (км/сек).
- 4.73.** Яке часове розділення повинна мати приймальна та записуюча фотометрична апаратура, щоби можна було побачити дифракційну картину на поверхні Місяця.
- 4.74.** Чи завжди степінь іонізації падає при збільшенні тиску?
- 4.75.** Куди витрачається енергія квантів, що поглинуті фраунгоферовими лініями на Сонці.
- 4.76.** Обчислити найбільш ймовірну швидкість атомів заліза та атомів водню в сонячній короні ( $T = 10^6 K$ ). Порівняйте цю швидкість з параболічною для Сонця.
- 4.77.** Поясніть чому яскравіша температура Сонця, яка визначена по його тепловому радіовипромінюванню, залежить від довжини хвилі, на якій проводиться вимірювання, а саме: чим більша довжина хвилі, тим вища температура?

- 4.78. В теорії екстинції Лапласа атмосфера Землі ізотермічна. В теорії Бемпорада температура змінюється з висотою згідно закону  $T = T_0 - \beta H$ . Якому фізичному стану атмосфери відповідає цей закон?
- 4.79. Вивести із закону Планка для абсолютно чорного тіла закон Стефана-Больцмана та закон Віна.
- 4.80. Куди витрачається хімічна енергія від згорання хімічного палива при виведенні супутника орбіту?
- 4.81. Чи завжди степінь іонізації спадає при збільшенні електронного тиску?
- 4.82. Куди витрачається енергія фотонів, поглинутих фраунгоферовими лініями на Сонці?
- 4.83. Перетворіть формулу Саха до логарифмічного вигляду зручному для обчислень.
- 4.84. Вивести формулу Саха для n-кратної іонізації.  $n = 2, 3, \dots$
- 4.85. Поясніть, чому яскравісна температура Сонця, яка виміряна по його радіовипромінюванню залежить від довжини хвилі, на якій проводять вимірювання, а саме, чим більша довжина хвилі тим вища температура.
- 4.86. Яка кінетична енергія протонів та електронів біля Землі через 26 годин після спалаху на Сонці? Чи можна зареєструвати падіння залізного метеориту з масою 1 т на Сонце?
- 4.87. Поясніть природу сонячного вітру.
- 4.88. На фотознімках Сонця в променях  $H_\alpha$  (Рис. 4.1.) протуберанці темні. В той же час відомо, що температура всередині протуберанців 10000К, в той час як температура фотосфери приблизно в 2 рази менша. Поясніть це.

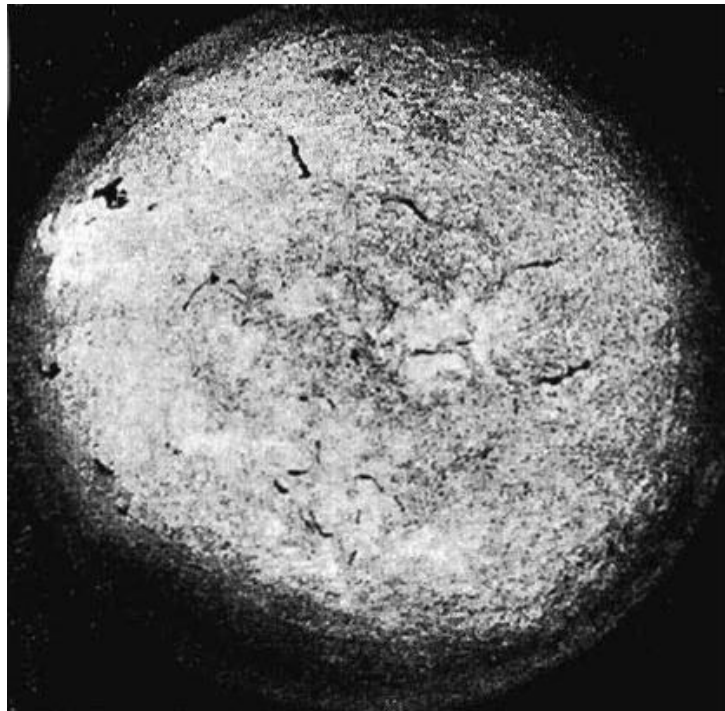


Рис. 4.1.

- 4.89. Поясніть суть ефекту Евершеда.
- 4.90. Поясніть суть ефекту Вільсона.
- 4.91. Яка відміна циклів Швабе від циклів Хейла?
- 4.92. Чим обумовлені віковий цикл сонячної активності?
- 4.93. Які фізичні наслідки анігіляції магнітних полюсів на поверхні Сонця?
- 4.94. Чим обумовлені малі льодовикові періоди на Землі?
- 4.95. Яка роль радіаційних поясів Землі?
- 4.96. Чому в оптичному діапазоні спектру спостерігається потемніння до краю диску Сонця, а в рентгенівському навпаки (Рис. 4.2)?



Рис. 4.2.

- 4.97.** Як пов'язані між собою блиск зорі та освітленість?
- 4.98.** В чому суть закону Вебера-Фехнера?
- 4.99.** Вивести закон гравітаційного червоного зміщення для фотонів, що випромінюються зорею з масою  $M$  та з радіусом  $R$ . Частота випроміненого фотона  $\nu'$ , а частота фотона, що вимірюється віддаленим спостерігачем,  $\nu$ . Задачу розв'язувати в постньютонівському наближенні, а фотону приписати масу  $m_\nu = \frac{h\nu}{c^2}$ .
- 4.100.** Як відомо променеві швидкості зірок визначаються ефектом Доплера. Було виміряно, що білі карлики віддаляються зі швидкістю 58 км/с. Що можна сказати про їх середню масу, якщо їх середній радіус 7700 км?
- 4.101.** Паралельний пучок заряджених частинок з концентрацією  $n$  падає на магнітне поле, силові лінії якого нахилені під кутом  $\theta$  до напрямку руху частинок. Визначити динамічний тиск, який створюється на межі плазма-поле. Вважати, що товщина магнітного шару набагато більша від ларморовського радіусу частинок.
- 4.102.** Багато аномальних явищ, які проходять в атмосфері Землі пов'язані корпускулярними потоками від Сонця, інтенсивність яких різко спадає під час сонячних спалахів. Чому, як правило, ці аномальні явища виникають після спалахів, що виникають на західному краї Сонця?
- 4.103.** Яким методами можна визначити поверхневу температуру зорі?
- 4.104.** Як визначити міру сонячної активності?
- 4.105.** У чому принципова відмінність будови планет земної групи і планет-гігантів?
- 4.106.** Які планети досліджувалися за допомогою космічних апаратів (ітролетних, орбітальних, посадкових)?
- 4.107.** Чому максимальна висота гір на Марсе більша, ніж на Землі?
- 4.108.** Чи відбувається на Венері, Марсе, Юпітері, Урані зміна сезонів?
- 4.109.** Які процеси формування атмосфер вам відомі?
- 4.110.** Чим різняться спектри випромінювання планет та зірок?
- 4.111.** Чому спектр випромінюваної планетою енергії знаходиться в більш довгохвильовій області, ніж спектр енергії, що падає на неї?
- 4.112.** Чому середня температура поверхні Венери вища, ніж у Меркурія?
- 4.113.** Яким є джерело внутрішнього тепла планет-гігантів?

- 4.114.** У чому суть парникового ефекту деяких планетах?
- 4.115.** У якої з двох планет вища ефективна температура — у Землі чи Венери?
- 4.116.** Чи є тверда поверхня Юпітера?
- 4.117.** У чому полягає схожість і відмінність атмосфер Землі, Венери і Марса?
- 4.118.** Де розташовані головний пояс астероїдів і пояс Копера?
- 4.119.** Чи є у астероїдів супутники?
- 4.120.** Який фізичний параметр покладено в основу прийнятої послідовності спектральних класів зірок?
- 4.121.** Судячи з кольору зірок Бетельгейзе та Рігеля, визначте, яка з них більш гаряча?
- 4.122.** Вважайте, у скільки разів змінюється зоряна величина Марса від протистояння до з'єднання.
- 4.123.** Який сенс запровадження абсолютної зоряної величини?
- 4.124.** Чому головна послідовність на діаграмі спектр — світність є найнаселенішою?

## Розділ 5. Загальна астрофізика

**5.1.** У деякому скупченні галактик, що знаходиться від нас на відстані 10 Мпк спостерігаються дві цефеїди із однаковим періодом, при чому їх блиск відрізняється на 1 зоряну величину, чи можуть ці цефеїди належати до однієї і тієї самої галактики у скупченні. Можливістю поглинання світла на шляху до спостерігача знехтувати.

*Розв'язок*

Оскільки поглинання немає, а цефеїди мають однаковий період, отже і мають однакову світність (адже для них відома залежність між цими двома величинами).

Використовуючи формулу Погсона:

$$\Delta m = -2,512 \log \left( \frac{r}{r + \Delta r} \right)^2 = 5,024 \log \left( \frac{r}{r + \Delta r} \right);$$

$$10^{-0,2m} = 1/(1 + \Delta r/r);$$

$$\Delta r/r = 10^{0,2m} - 1.$$

Підставляючи  $r=10$  Мпк отримаємо, що  $r=5.8$  Мпк, таких галактик не існує, а отже відповідь - ні, ці дві цефеїди не можуть належати одній галактиці.

**5.2.** На скільки б яскравішим був Сатурн, якби він міг бути повернутий до нас так, що кільця були б у картинній площині. Кутовий діаметр диску Сатурна  $17,4''$ . Велика піввісь орбіти  $9,58$  а.о. Зовнішній кутовий діаметр кілець  $40,3''$  внутрішній -  $25,8''$ , кільця мають таку ж відбивну здатність, що і сам Сатурн.

*Розв'язок*

Освітленість зростає у стільки разів, у скільки збільшиться площа відбиваючої поверхні. Вважаючи, що під час того, коли площини кілець та земної орбіти співпадають, кільця повністю зникають із виду, можна записати відношення площ кільця до площі диску самого Сатурна як:

$$\frac{S_{Ring}}{S_{Sat}} = \frac{R_{out}^2 - R_{in}^2}{R_{Sat}^2}.$$

Лінійний розмір Сатурну як і площу кілець легко отримати із прямокутного трикутника у якому більший катет - відстань від Сатурна до Землі ( $L=9.58-1=8.58$ ), а менший катет - радіус меж кільця ( $R_{out}$  або  $R_{in}$ ) або ж самого Сатурна ( $R_{Sat}$ ).

$$\frac{L}{R} = tg \frac{\alpha}{2},$$

де  $\alpha$  – кут під яким видно Сатурн або ж межі кілець. Оскільки кути малі, то тангенс можна замінити на сам кут у радіанній мірі:

$$tg \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha/2}{206265''},$$

тоді зі спостережуваних кутових розмірів меж кільця та диску Сатурну можемо обчислити за формулою

$$R = \frac{\alpha/2}{206265''} L,$$

$L$  лінійні розміри та підставивши у першу формулу отримати відношення площі кільця до площі диску Сатурна:

$$\frac{S_{Ring}}{S_{Sat}} = 3,16.$$

У зоряних величинах відповідно до формули Погсона буде різниця блиску:

$$\Delta m = -2,512 \log \left( \frac{S_{Sat} + S_{Ring}}{S_{Sat}} \right) = -1,55.$$

Тобто, якщо б ми мали можливість бачити Сатурн із повністю розкритими кільцями перпендикулярно до променю зору, то блиск його б був на 1.55 зоряних величини яскравіше. Зорі гігант та карлик мають однакові спектральні класи. У якій із них вища температура?

**5.3.** Пульсарами є нейтронні зорі, періоди обертання яких становлять декілька мілісекунд. Оцініть мінімально можливий період обертання пульсара. (Вказівка: Маса нейтрона приймемо  $m_n = 1.7 \cdot 10^{-27}$  кг, а за його радіус візьмемо радіус дії ядерних сил  $r_n = 1 \cdot 10^{-15}$  м).

*Розв'язок*

При обертанні тіла точка на його екваторі не може рухатись швидше за першу космічну швидкість цього тіла. Вважаючи (хоч це й не зовсім вірно для тіла, що швидко обертається!) тіло кулею радіусу  $R$  та густини  $\rho$ , отримуємо:

$$v = \frac{2\pi R}{T} < \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{4\pi G \rho R^2}{3}, \text{ звідки } T > \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

Зауважимо, що до формули не увійшов радіус тіла! Оскільки пульсар це нейтронна зоря, то будемо вважати, що основною складовою її є нейтрони, отже вона має ту ж густину, що й нейтрон:

$$\rho = \frac{3m}{4\pi G R^3} \approx 4 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3.$$

Підставляючи значення, остаточно отримуємо  $T_{\min} = 0.6$  мс. Зауважимо, що найкоротший період 1,4 мс має пульсар PSR J1748-2446ad.

**5.4.** Сонце поступово втрачає масу через електромагнітне випромінювання та в формі часток сонячного вітру. Який з цих двох факторів більш значущий, якщо світність Сонця  $L = 4 \cdot 10^{26}$  Вт, а потік часток сонячного вітру (переважно - протонів) на відстані земної орбіти  $f = 4 \cdot 10^{12}$  часток/м<sup>2</sup>·с?

*Розв'язок*

Втрату маси за рахунок електромагнітного випромінювання легко розрахувати, виходячи з Айнштейнської формули  $E = mc^2$ :

$$\Delta m = L/c^2 = 4 \cdot 10^{26} \text{ Вт} / 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2 = 4.4 \cdot 10^9 \text{ кг/с},$$

в той час як частки сонячного вітру уносять масу зі швидкістю:

$$\Delta m' = 4\pi R^2 f m = 4 * 3.14 * 2.25 \cdot 10^{22} \text{ м}^2 * 4 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-1} * 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 2 \cdot 10^9 \text{ кг/с},$$

де  $R$  - велика піввісь (радіус) орбіти Землі, а  $m$  - маса протона. Таким чином ми бачимо, що втрата маси Сонця за рахунок випромінювання приблизно вдвічі більша, ніж за рахунок сонячного вітру.

**5.5.** У сузір'ї Великого Лева (Leo Major, LMa) в 2004 р. спалахнула яскрава зоря, що за блиском була тільки трохи слабшою від Венери. Її позначили SN2004A та віднесли до типу Ia. Про зорі цього типу відомо, що в максимумі блиску їх абсолютна зоряна величина є однаковою і дорівнює  $-19.3^m$ . Видима зоряна величина SN2004A у максимумі блиску становила  $-4.3^m$ . Яка відстань від Землі до SN2004A?

*Розв'язок*

Скористаємося зв'язком між абсолютною зоряною величиною  $M$  та видимою  $m$ :

$$M = m + 5 - 5 \lg r_{\text{пк}},$$

Звідси:

$$\lg r_{\text{пк}} = \frac{1}{5} (5 - 4.3 + 19.3) = 4,$$

$$r_{\text{пк}} = 10^4 \text{ пк} = 10\,000 \text{ пк}.$$

**5.6.** Галактика Цівочне колесо (M101, NGC 5457), яка знаходиться у сузір'ї Велика Ведмедиця, знаходиться на відстані 6.4 млн парсеків від Землі і має видиму зоряну величину  $7.8^m$ . Припустімо, що дана галактика складається тільки із зір, як наше Сонце. Скільки таких зір має містити галактика, якщо абсолютна зоряна величина Сонця становить  $4.8^m$ .

*Розв'язок*

Знайдемо абсолютну зоряну величину галактики:

$$m - M = 5 \lg \frac{r}{10 \text{ пс}},$$

$$7.8^m - M = 5 \lg \frac{6.4 \times 10^6}{10} = 29,$$

$$M = 7.8^m - 29 = -21.2^m.$$

Скористаємося формулою Погсона:

$$M_{\odot} - M = 2.5 \lg \frac{E}{E_{\odot}}.$$

Якщо галактика складається із  $N$  сонцеподібних зір, то сумарний світловий потік від галактики:

$$E = NE_{\odot}.$$

Таким чином:

$$M_{\odot} - M = 2.5 \lg N,$$

$$4.8^m - (-21.2^m) = 2.5 \lg N,$$

$$26 = 2.5 \lg N,$$

$$\lg N = 10.4,$$

$$N = 10^{10.4} = 2.5 \times 10^{10}.$$

**5.7.** Зоряна система складається з двох зір. Видима зоряна величина першого компонента системи становить  $m_1 = -3^m$ , а другого  $m_2 = -1^m$ . Визначити сумарну видиму зоряну величину подвійної зоряної системи.

*Розв'язок*

Зоряна система складається з двох зір. Видима зоряна величина першого компонента системи становить  $m_1 = -3^m$ , а другого  $m_2 = -1^m$ . Визначити сумарну видиму зоряну величину подвійної зоряної системи. Нехай блиск першої зорі становить  $E_1$ , а другої –  $E_2$ . Тоді:

$$m_1 - m_2 = 2.5 \lg \frac{E_2}{E_1}.$$

Звідси:

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{0.4(m_1 - m_2)} = 10^{0.4(-3+1)} = 0.158.$$

Позначимо через  $m_3$  видиму зоряну величину зоряної системи. Маємо:

$$m_1 - m_3 = 2.5 \lg \frac{E_3}{E_1} = 2.5 \lg \frac{E_1 + E_2}{E_1} = 2.5 \lg \left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right),$$

$$-3^m - m_3 = 2.5 \lg(1 + 0.158) = 0.16^m.$$

Остаточно, видима зоряна величина системи зір:

$$m_3 = -3^m - 0.16^m = -3.16^m.$$

**5.8.** Упродовж місяця видимий діаметр Юпітера зменшився від  $50''$  до  $47''$ . Чому буде дорівнювати видима зоряна величина Юпітера у кінці місяця, якщо на початку місяця вона дорівнювала  $m = -2.9^m$ ?

*Розв'язок*

$$\operatorname{tg} \frac{d}{2} = \frac{R}{r},$$

де  $R$  – радіус Юпітера,  $r$  – відстань від Юпітера до Землі. Тоді:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\operatorname{tg} \frac{d_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{d_2}{2}} \approx \frac{d_1}{d_2} = \frac{50''}{47''} = 1.064$$

Зміна видимої зоряної величини:

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 2.5 \lg \frac{E_1}{E_2} = 2.5 \lg \frac{r_2^2}{r_1^2} = 5 \lg 1.064 = 0.13^m.$$

Видима зоряна величина Юпітера у кінці місяця:

$$m_2 = m_1 + \Delta m = -2.9^m + 0.13^m = -2.77^m.$$

**5.9.** У 386 році китайські літописці відмітили появу в сузір'ї Стрільця «зорі-гості». За сучасними оцінками її видима зоряна величина була  $+1.5^m$ , а відстань до зорі оцінюється у 16 000 світлових років. Визначити, що спостерігали древні китайці: спалах нової чи наднової зорі?

*Розв'язок*

Знайдемо абсолютну зоряну величину «зорі-гості»:

$$M = m + 5 - 5 \lg r_{\text{пк}} = 1.5^m + 5 - 5 \lg \frac{16\,000}{3.26} = -12^m.$$

При спалахові нової зорі її абсолютна зоряна величина у максимумі блиску знаходиться у межах:  $-8^m \leq M \leq -7^m$ . Таким чином, відбувся спалах наднової. Її назва SN 386.

**5.10.** Видима зоряна величина Веги ( $\alpha$  Ліри) дорівнює  $0.03^m$ , її річний паралакс  $0.13''$ . Визначити, до якого спектрального класу вона відноситься, якщо її ефективна температура  $T = 9300$  К. Оцінити значення маси Веги у порівнянні з масою Сонця? Встановити колір зорі.

*Розв'язок*

Спектральний клас можемо визначити за допомогою діаграми Герцшпрунга – Рессела. Для цього потрібно мати два параметра: ефективну температуру  $T$  та абсолютну зоряну величину  $M$ . На основі заданих в умові параметрів знаходимо:

$$M = m + 5 + 5 \lg \pi'' = 0.03 + 5 + 5 \lg 0.13 = 0.60^m.$$

Позначаємо на діаграмі Герцшпрунга – Рессела точку з координатами  $(T, M) = (9300 \text{ К}, 0.60^m)$ .

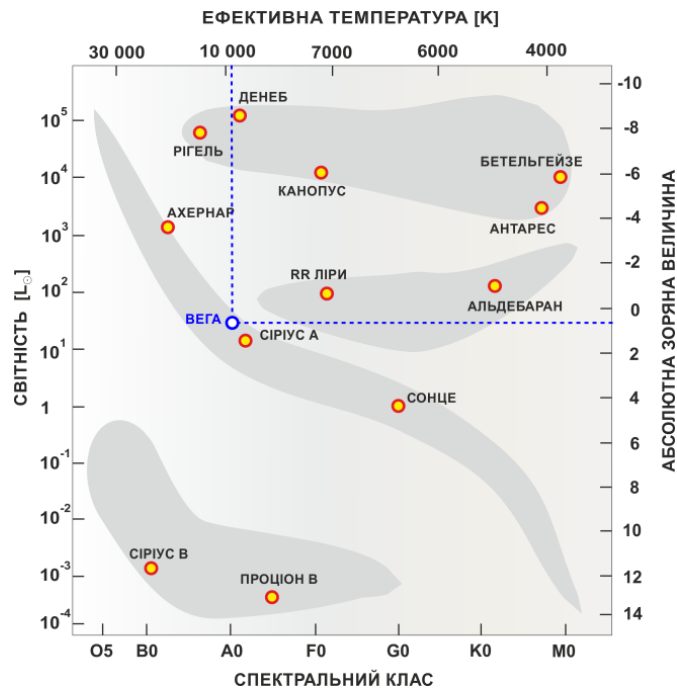


Рис. 5.1.

Помічаємо, що Вега потрапила в область головної послідовності і відноситься до спектрального класу A0V.



На основі Рис. 5.1 визначаємо, що маса Веги має порядок  $2M_{\odot}$ . Колір зорі – білий.

**5.11.** На якій відстані від Проксими Центавра, її видима зоряна величина та видима зоряна величина Сонця зрівняються? Чому вони дорівнюватимуть? Абсолютні зоряні величини:  $M_{\text{ПрокСен}}=15.6$ ,  $M_{\text{Sun}}=4.83$ . Відстань між зорями 1.3 пк.

*Розв'язок*

Запишемо рівняння, що пов'язує абсолютну зоряну величину  $M$ , видиму зоряну величину  $m$  та відстань від зорі до спостерігача  $r$ :

$$M = m + 5 - 5 \log(r).$$

Позначимо через  $M_1$ ,  $m_1$  абсолютну та видиму зоряну величину відповідно Сонця, а через  $M_2$ ,  $m_2$  – Проксими Центавра.  $r_1$  та  $r_2$  – відстань від Сонця та Проксими відповідно до спостерігача, який бачить ці зорі як зорі однакової зоряної величини. Запишемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} M_1 - 5 + 5 \log(r_1) &= M_2 - 5 + 5 \log(r_2), \\ r_1 + r_2 &= 1,3, \end{aligned}$$

і розв'яжемо її:

$$\begin{aligned} \log(r_1) - \log(r_2) &= \frac{M_2 - M_1}{5}, \\ r_1 &= 142,5 r_2, \end{aligned}$$

Знайдемо значення видимої зоряної величини, яка буде для Проксими Центавра і для Сонця однаковою  $m_1 = m_2 = 15.6 - 5 + 5 \log(0.009) = 0.37^m$ . Таким чином на відстані 0.009 пк від Проксими Центавра її видима зоряна величина та Сонця зрівняється і складатиме  $V = 0.37^m$ .

**5.12.** Гулівер, герой роману Джонатана Свіфта, під час своїх подорожей попадає спочатку у країну ліліпутів, а потім у країну великанів. Зорі якої граничної величини можуть бачити перші і другі, якщо врахувати, що їх зріст відрізняється від зросту нормальної людини у 12 разів. Гранична зоряна величина для Гулівера при спостереженнях у безмісячну ніч складає  $6^m$ .

*Розв'язок*

При спостереженнях зір ліліпутом, кількість енергії, що попадає в його око, буде пропорційна площі зіниці ока ліліпута  $S_1$ , тобто в  $12 \times 12 = 144$  разів менше чим у Гулівера  $S$ , а у великана  $S_2$  відповідно в 144 разів більше. Тому програш у зоряних величинах у ліліпута (або виграш для великана) складе згідно формули Погсона:  $m = -2,512 \lg(S_1/S) = -2,512 \lg(1/144) = 5,4^m$  тобто  $m$  гранична для ліліпута буде дорівнювати  $6 - 5,4 = 0,6^m$ , а  $m$  гранична для великана буде дорівнювати  $6 + 5,4 = 11,4^m$ .

**5.13.** Подвійна зоря не розділяється на компоненти із Землі і має видиму зоряну величину  $m = 9.25^m$ . Але вона розділяється з космічного телескопа «Габбл», при чому виявилось, що блиск компонента А дорівнює  $10^m$ . Знайти зоряну величину компонента В.

*Розв'язок*

За визначенням зоряної величини відношення світностей подвійної зорі до світності компонента А виражається через їх зоряні величини як:

$$\frac{E_A + E_B}{E_A} = 10^{0,4(m_B - m_A)}.$$

Таким чином:

$$E_B / E_A = 10^{0,3} - 1 = 1,$$

тобто зоряна величина компонента В також дорівнює  $10^m$ .

**5.14.** Кулонова сила тяжіння електрона до протона в атомі водню більша, ніж ньютонова сила гравітаційного тяжіння двох космонавтів, що обмінюються рукоштовками у відкритому космосі, чи ні?

*Розв'язок*

Сила Кулона в атомі водню:

$$F_q = k \frac{e^2}{r_1^2} = 0,82 \cdot 10^{-7} \text{ Н},$$

( $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  К – заряд електрона;  $r_1 = 5,29 \cdot 10^{-11}$  м – Борівський радіус атома водню). Сила гравітаційної взаємодії космонавтів:

$$F_G = G \frac{m^2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-7} \text{ Н,}$$

( $m = 100$  кг – маса кожного космонавта;  $r^2 = 1$  м – відстань між ними). Ньютонова сила більша за кулонову всього приблизно в 8 разів.

**5.15.** Визначте зміну блиску планети від з'єднання до протистояння  $\Delta m$ , якщо проміжок часу між двома подіями  $\Delta T = 390$  діб. Вважати орбіти планети та Землі круговими, що лежать в одній площині.

*Розв'язок*

Оскільки  $\Delta T = S/2$  ( $S$  – синодичний період), то за синодичним рівнянням:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_{\text{Тerra}}} - \frac{1}{S'}$$

визначаємо сидеричний період планети:

$$T = \frac{2\Delta T \cdot T_{\text{Тerra}}}{2\Delta T - T_{\text{Тerra}}} = 1,88 T_{\text{Тerra}} = 1,88 \text{ років.}$$

З третього закону Кеплера знаходимо велику піввісь орбіти планети:

$$a = T^{2/3} = 1,52 \text{ а.о.}$$

(Отримані значення  $a$  свідчать про те, що мова в задачі йде про Марс.) Тепер за формулою Погсона розрахуємо, як змінюється блиск планети:

$$\lg \frac{E_{\text{з'єдн}}}{E_{\text{пр}}} = 0,4\Delta m \rightarrow \lg \left( \frac{a - a_{\text{Тerra}}}{a + a_{\text{Тerra}}} \right)^2 = 0,4\Delta m, \text{ а отже:}$$

$$\Delta m = 5 \lg \frac{0,52}{2,52} = -3,4^m.$$

**5.16.** Деяке джерело  $U$ , що випромінює електромагнітні сигнали з власною частотою  $\omega_0 = 3,0 \cdot 10^{10}$  рад/с, рухається в Сонячній системі з постійною швидкістю  $v = 0,8c$  по прямій, яка знаходиться від спостерігача  $P$  на Землі його можна вважати нерухомим) на відстані  $l$  (Див. Рис. 5.2). Якою буде частота сигналів, що сприймаються спостерігачем у момент, коли: джерело опиниться в точці  $O$ ; 2) спостерігач побачить його у точці  $O$ ?

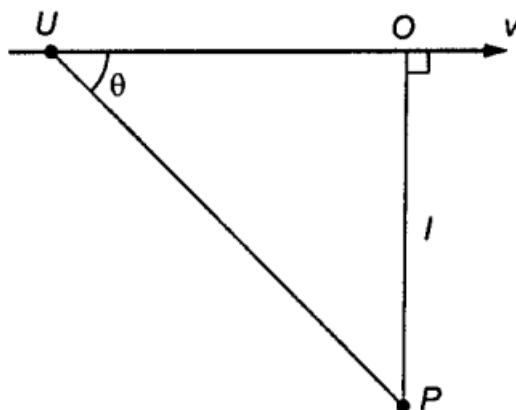


Рис. 5.2.

*Розв'язок*

1. Коли джерело опиниться в точці  $O$  (див. рис. 7.2), до наближення за- теля  $P$  дійде електромагнітна хвиля, випущена в точці  $U$ , такою, що  $UO = vt$ ;  $UP = ct$ ;  $\cos\theta = v/c$ . З формули  $v = v_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}$  отримуємо:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = 5 \cdot 10^{10} \text{ рад/с.}$$

2. Коли спостерігач побачить джерело в точці N, до нього дійде електромагнітна хвиля, випущена джерелом саме в точці N (джерело буде знаходитися значно правіше цієї точки). При  $\theta = 90^\circ$  за формулою  $v = v_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos \theta}$  отримуємо  $\omega = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2} = 1,8 \cdot 10^{10}$  рад/с.

**5.17.** У 2000 р. американськими астроомами була відкрита чергова мала планета з сімейства транснептунових планет «Плутіно» («плутончики»), яка має діаметр приблизно  $D < 650$  км, її відстань від Сонця в афелії  $r_a = 5,6$  млрд. км, а в перигелії  $r_p = 2,7$  млрд км. Визначте максимальну зоряну величину, яку повинен мати Плутіно при спостереженнях із Землі (вплив атмосфери не враховувати), за умови, що коефіцієнт відбиання поверхні планети  $A = 0,2$ . Для розрахунків прийняти, що сонячна постійна  $Q = 1360$  Вт/м<sup>2</sup>; енергія, що випромінюється з одиниці поверхні Сонця,  $E_G = 6,25 \cdot 10^7$  Вт/м<sup>2</sup>; радіус Сонця  $R_G = 6,96 \cdot 10^7$  м; астрономічна одиниця  $r_T = 1,5 \cdot 10^{11}$  м; видима зоряна величина Сонця  $m_G = -26,8^m$ .

*Розв'язок*

Світловий потік, що випромінюється Сонцем:  $\Phi_G = E_G \cdot 4\pi R_G^2$ , освітленість, що Сонце створює на поверхні Плутіно на відстані  $r$ :

$$L_{Pl} = E_G \cdot \frac{R_G^2}{r^2}.$$

Отже, потік, що падає на планету:

$$\Phi_{Pl} = L_{Pl} \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} = E_G \cdot \frac{R_G^2}{r^2} \pi \cdot \frac{D^2}{4},$$

а розсіяний:

$$\Phi_{sc} = A\Phi_{Pl} = AE_G \cdot \frac{R_G^2}{r^2} \pi \cdot \frac{D^2}{4} L_{Pl} \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4}.$$

Припускаючи, що потік від Плутіно розсіюється в півсфері по напрямку до Землі, визначаємо освітлення, яке ця планета створює на Землі в протистоянні (і в перигелії своєї орбіти):

$$L_T = \frac{\Phi_{sc}}{2\pi(r_q - r_T)^2} = \frac{AE_G R_G^2 D^2}{8r_q^2 (r_q - r_T)^2} = 6,78 \cdot 10^{-15} \text{ Вт/м}^2.$$

Далі по формулі Погсона отримуємо:

$$m = m_G + 2,512 \lg \frac{Q}{L_T} \cong 16,45^m.$$

**5.18.** Знайти сонячну сталу для Землі, якщо відомо, що температура фотосфери Сонця дорівнює 5800 К.

*Розв'язок*

Згідно із законом Стефана-Больцмана одиниця площі поверхні Сонця випромінює в одиницю часу потужність  $\sigma T^4$ , де  $\sigma = 5.67$  Вт/м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>. Отже, потужність сонячного випромінювання (світність Сонця) дорівнює

$$2L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4 = 4 \cdot 10^{30} \text{ Вт},$$

де  $R$  – радіус Сонця. (6 балів) Сонячна стала  $q$ , що дорівнює енергії, яка приходить на одиницю площі за одиницю часу на верхню межу земної атмосфери, це світність Сонця, поділена на площу сфери з радіусом, рівним середній відстані від Землі до Сонця, тобто

$$q = \frac{L}{4\pi a^2} = 1,4 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2.$$

**5.19.** У Таблиці 5.1 наведені фотографічні  $m_p$  і візуальні  $m_v$  величини яскравих зірок. Розташуйте їх у порядку збільшення інтенсивності кольору: білі, жовті, помаранчеві, червоні.

Таблиця 5.1. Фотографічні  $m_p$  і візуальні  $m_v$  величини яскравих зірок

Зорі	$m_p$	$m_v$	Зорі	$m_v$	$m_v$
Спіка	0,94	1,21	Арктур	1,36	1,36
Антарес	2,95	1,22	Рігель	0,30	0,30
Альтаір	1,05	0,59	$\alpha$ Центавра	0,63	0,63
Капелла	0,55	0,21	$\gamma$ Андромеди	3,40	3,40

Необхідно розрахувати показник кольору  $CI = m_p - m_v$ , і розставити зірки за таким принципом: чим більше  $CI$ , тим зірка червоніше (Таблиця 5.2)

Таблиця 5.2.

Зорі	$CI$	місце	Зорі	$CI$	місце
Спка	-0,27	1	Арктур	1,12	6-7
Антарес	1,73	8	Рігель	-0,04	2
Альтаір	0,16	3	$\alpha$ Центавра	0,57	4
Капелла	0,67	5	$\gamma$ Андромеди	1,12	6-7

**5.20.** Визначте відношення радіусів  $r/R$  слабкої та яскравої зірок ( $r < R$ ) у системі затіненої подвійної зірки типу Алголя, якщо зі спостережень відомо, що відношення її блиску в мінімумі до блиску в максимумі дорівнює  $k$ . Затемнення яскравої зірки більшого радіусу слабкою зіркою меншого радіусу вважати центральним; слабку зірку (супутник) при затемненні вважати цілком темною.

*Розв'язок*

Очевидно, що блиск яскравої зірки при затемненні пропорційний незакритій площі. Звідси:

$$\frac{E_{min}}{E_{max}} = \frac{R^2 - r^2}{R^2} = k; \quad \frac{r}{R} = \sqrt{1 - k}.$$

**5.21.** Як впливає ефект потемніння до краю на диску зорі на розширення спектральних ліній, що обумовлено її обертанням.

**5.22.** У якої зорі –  $G8III$  чи  $G7V$  – радіус більший?

**5.23.** Чим пояснюється відміна в положеннях зір-субкарликів та зір головної послідовності на діаграмі Герцшпрунга - Рессела?

**5.24.** Обчислити висоту однорідної атмосфери нейтронної зірки з масою в три маси більшою ніж маса Сонця, та радіусом 12 км. Атмосферу складається повністю з атомів заліза.

**5.25.** Чи впливає ефект аберації на час приходу імпульсу від пульсара в подвійній системі.

**5.26.** Оцініть амплітуду ефекту відбивання в зоряних величинах, якщо відома світимість компактної зорі  $L_x$ , світимість нормальної зорі  $L_0$ , велика піввісь подвійної системи  $a$  та радіус нормальної зорі  $R_0$ . Чисельну оцінку зробити для рентгенівських подвійної системи,

в якій  $\frac{L_x}{L_0} = 100$ ,  $R_0 = 3 \cdot 10^{11}$  см,  $a = 6 \cdot 10^{11}$  см.

**5.27.** Виходячи з тиску біля поверхні Марса 25 мбар знайти на якій висоті густина атмосфери Марса стає більшою від густини атмосфери Землі. Висоту однорідної атмосфери Марса прийняти за 11 км.

**5.28.** В скільки раз реактивне прискорення комети, що обумовлене викиданням речовини в певному напрямку за рахунок накопиченої сонячної енергії, ефективніше, ніж пряма передача імпульсу за рахунок світлового тиску? Швидкість викидання речовини  $\mathcal{A}$ .

**5.29.** Оцініть мінімальну масу нейтронної зорі, використовуючи той факт, що для перетворення звичайної речовини в нейтронний стан необхідно затратити певну енергію. Наприклад реакція  ${}^{16}_8O + 8e^- \rightarrow 16_1n^0$ . Густина речовини в нейтронній зірці рівна  $10^{14}$  г/см<sup>3</sup>.

**5.30.** Зірок 6-ої величини на північному небі 2000. В скільки разів їх загальне світло сильніше світла Сіріуса, яскравість якого – 1,6 зоряної величини?

**5.31.** В спектрі зорі лінія кальцію з довжиною хвилі 4227 А, виявилась зміщеною до фіолетового кінця спектра на 0,70 А. Визначити з якою швидкістю рухається зоря по променю зору і при цьому чи наближається вона до Землі, чи віддаляється?

**5.32.** Обчислити відношення блиску в різних променях Сіріуса і  $\epsilon$  Персея.

- 5.33. Обчислити відношення блиску в різних променях Капелли і  $\beta$  Дракона;
- 5.34. Обчислити видиму зоряну величину Сіріуса при збільшенні й зменшенні її відстані від Землі у два, чотири й десять разів.
- 5.35. Визначити число зірок видимої зоряної величини  $m=12^m.50$ , сумарний блиск яких дорівнює блиску зірки: 1) Сіріуса; 2) Капелли;
- 5.36. Визначити відношення освітленостей, створюваних на Землі Сонцем і повним Місяцем.
- 5.37. Обчислити середній кутовий діаметр і видиму зоряну величину Сонця при спостереженнях його із планети: 1) Юпітера; 2) Сатурна.
- 5.38. Обчислити колірну температуру Сонця.
- 5.39. Обчислити колірну температуру Спіки і  $\lambda$  Водоля.
- 5.40. Обчислити колірну температуру Антареса і  $\epsilon$  Великого Пса.
- 5.41. Обчислити колірну температуру Денеба і  $\beta$  Андромеди.
- 5.42. Обчислити колірну температуру Капелли і  $\sigma$  Оріона.
- 5.43. Обчислити колірну температуру Регула і  $\delta$  Діви.
- 5.44. Обчислити температуру Сонця за значенням сонячної сталої.
- 5.45. За температурою і показником кольору обчислити лінійний радіус Спіки.
- 5.46. За температурою і показником кольору обчислити лінійний радіус  $\lambda$  Водоля.
- 5.47. За температурою і показником кольору обчислити лінійний радіус Проксіми Центавра.
- 5.48. За температурою і показником кольору обчислити лінійний радіус альфа Центавра та її компонент.
- 5.49. За температурою і показником кольору обчислити лінійні радіуси зірок: Антареса,  $\zeta$  Великого Пса і Лаланд 21185.
- 5.50. Обчислити масу і середню густину зірок: Спіки,  $\lambda$  Водоля і Проксіми Центавра.
- 5.51. Обчислити масу і середню густину зірок: Антареса,  $\zeta$  Великого Пса і Лаланд 21185.
- 5.52. Співставити обчислені радіуси і маси зірок Спіки,  $\lambda$  Водоля і Проксіми Центавра з їх світністю і спектральним класом і визначити їх положення на діаграмі Герцшпрунга-Рассела.
- 5.53. Співставити обчислені радіуси і маси зірок Антареса,  $\zeta$  Великого Пса і Лаланд 21185 з їх світністю і спектральним класом і визначити їх положення на діаграмі Герцшпрунга-Рассела.
- 5.54. На Рис. 5.3 зображено дві галактики. До якого типу галактик вони відносяться? Оцініть, у якої з них — а чи б — у ядрі зосереджена більша маса?

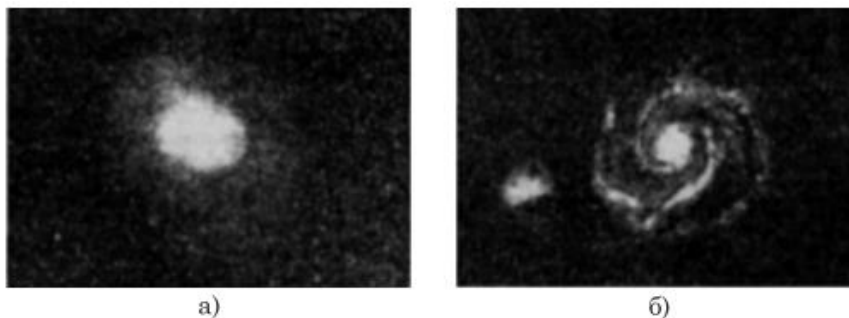


Рис. 5.3.

- 5.55. Як відрізнити далекі галактики від зір нашої Галактики, які розміщені в тому самому напрямі, в якому видно галактики?
- 5.56. Маса спіральної галактики М81 більша, ніж маса спіральної галактики М33. Чим структурно можуть відрізнитися ці галактики одна від одної?
- 5.57. Деякі астрофізичні деталі Магелланових Хмар спостерігаються виразніше, ніж у нашій Галактиці. Чим це пояснити?

- 5.58.** Галактика M83 віддалена від нас на 900 кпк, її видима зоряна величина — +8,0m. У скільки разів її світність  $L$  більша за  $L_{\odot}$  ?
- 5.59.** У галактиці M32 як нова спалахнула зоря, видима зоряна величина якої у максимумі блиску досягла значення  $m = +12,8$ . Визначте відстань  $r$  від цієї галактики до Сонячної системи. Врахуйте, що нові в епоху максимуму мають абсолютну величину  $M \approx -9,0m$ .
- 5.60.** Світло від далекої галактики дійшло до нас через мільярд років. З якою швидкістю в момент висилання цих світлових сигналів рухалася від нас галактика?
- 5.61.** Зелена лінія Гідрогену ( $\lambda = 4870 \text{ \AA}$ ) у спектрі галактики змістилася до червоного краю на  $50 \text{ \AA}$ . На якій відстані від спостерігача і з якою радіальною швидкістю рухається ця галактика? На скільки зоряних величин видима величина більша за її абсолютну зоряну величину?
- 5.62.** Зміщення ліній  $\Delta\lambda$  у спектрах галактик відбувається так, що відношення  $\Delta\lambda/\lambda$  є величиною сталою для спектра даної галактики. Поясніть, чому.
- 5.63.** Можливо, мандруючи від далеких галактик і взаємодіючи з різними тілами на своєму шляху, фотон втрачає частину своєї енергії, від чого довжина його хвилі збільшується, а сам фотон стає «червонішим». А доплерівського зміщення ліній у спектрах галактик і розбігання галактик насправді не існує. Спростуйте ці міркування.
- 5.64.** Закон Габбла тим точніший, чим більші відстані  $r$  до галактик чи квазарів. Про що йдеться?
- 5.65.** Видатний датський астроном Тіхо Браге (1546–1601) писав: «Зі всіх філософських поглядів випливає, що в повітряних просторах небесного світу нічого не змінюється, що небо і небесні тіла не збільшуються і не зменшуються...» Чи справді така картина світу побутує навколо нас? Поясніть.
- 5.66.** У сейфертівських галактиках спостерігаються викиди речовини до тисячі сонячних мас за рік. Висловіть міркування, які переконали б нас у тому, що ці викиди (спалахи активності) — результат процесів вибухового характеру.
- 5.67.** В одного з найближчих до нас квазарів 3C-273 виявлено лінію іонізованого Магнію, що відповідає «лабораторній» довжині хвилі  $0,28 \text{ мк}$ . Відомо, що така лінія поглинається земною атмосферою (озоносферою). Як тоді випромінювання на цій хвилі проникає крізь атмосферу й досягає поверхні Землі?
- 5.68.** В оптичному спектрі якогось небесного об'єкта виявлено емісійні лінії та лінії поглинання; в другого — широкі емісійні лінії без ліній поглинання; у третього — лише лінії поглинання. Яким саме об'єктам належать ці спектри? Чому?
- 5.69.** Установлено, що кількість квазарів, які мають червоне зміщення, більша за якусь граничне значення (воно відповідає збільшенню довжини хвилі в  $4,5\text{--}5$  разів), різко зменшується. Яка можлива причина цього зменшення?
- 5.70.** Подібно до зір, галактики зосереджуються в скупченнях. Однак існують відмінності в розміщенні зір і галактик. Укажіть на них.
- 5.71.** Христіан Гюйгенс (1629–1695) писав: «Планети мають плавати в матерії ... бо без цього що утримувало б їх ... від утечі і що привело б у рух?» У чому помилився Гюйгенс?
- 5.72.** Запуски ракет і космічних апаратів дали можливість дослідити властивості рентгенівського та  $\gamma$ -випромінювання, які поглинаються атмосферою Землі і не досягають до її поверхні. Про які ділянки Всесвіту — з високими чи низькими температурами — можна отримати інформацію, аналізуючи ці випромінювання?
- 5.73.** Спектри планетарних туманностей нагадують спектри світних газових туманностей, але їхні емісійні лінії роздвоєні. На що вказує цей факт?
- 5.74.** Кільцева форма (вигляд тороїда) планетарних туманностей є позірною (Рис. 5.4, на якому зображена туманність Ліри). Яка справжня форма цих туманностей? Чому їх видно у вигляді кілець?

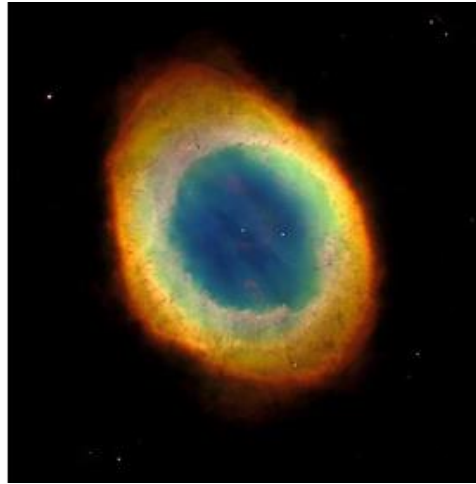


Рис. 5.4.

**5.75.** До якого типу населення Галактики ви віднесете червоні надгіганти?

**5.76.** Одна з двох зір спектрального класу G належить до головної послідовності, а друга – до послідовності субкарликів. Чи так само близько одна від одної вони розміщені у галактичному просторі?

**5.77.** Визначте, в скільки разів діаметр Галактики більший від діаметра Сонячної системи (хмари Оорта).

**5.78.** Кулясті скупчення добре видно скрізь у нашій Галактиці (у них значна світність), за винятком ділянки поблизу галактичного центра. Про що це свідчить?

**5.79.** Якщо вигляд нашої Галактики подати «збоку» (Рис. 5.5), то де знаходиться спостерігач відносно галактичної площини?

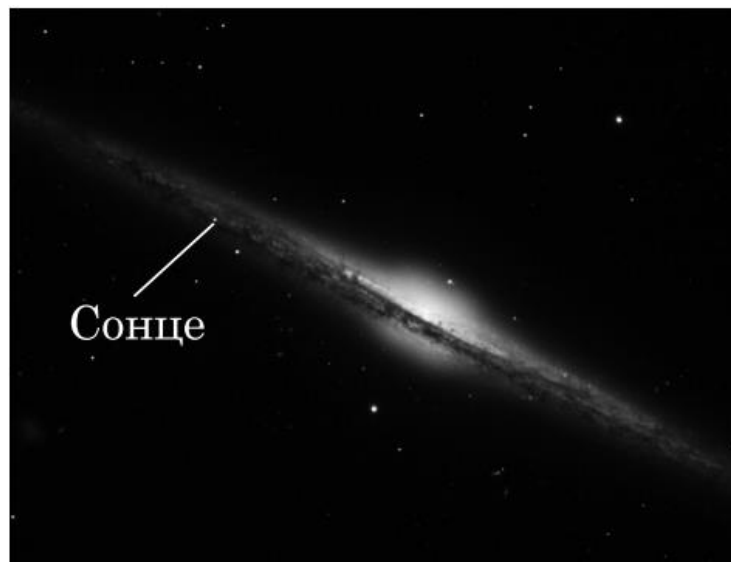


Рис. 5.5.

**5.80.** Вектори швидкостей зір (і Сонця) утворюють майже прямий кут з напрямом на сузір'я Стрільця. Який висновок випливає з цього дослідного факту?

**5.81.** Чому газопилова матерія Галактики концентрується переважно поблизу галактичної площини?

**5.82.** У скільки разів зоря Арктур ( $\alpha$  Волопаса) яскравіша від зір  $\alpha$  Андромеди та  $\eta$  Діви, якщо зоряна величина Арктур становить +0,м 24, а візуальний блиск інших зір відповідно дорівнює +2,м 15 і 4,м 00 [2] ?

- 5.83.** Скільки зір нульової видимої зоряної величини потрібно для створення такого візуального блиску, який дають 26700 зір восьмої зоряної величини ?
- 5.84.** Фотографічний блиск зорі Проціона ( $\alpha$  Малої Пса) становить  $+0, m 88$ , а звичайний показник кольору  $+0, m 40$ . Знайти візуальний блиск цієї зорі за умови збільшення її відстані від Землі в 5 і 10 разів та за умови зменшення її відстані в 3 і 6 разів.
- 5.85.** Знайти блиск потрійної зорі, якщо перший її компонент яскравіший від другого в 3,6 рази, а третій – слабкіший від другого в 4,2 рази та має візуальний блиск  $4, m 36$  ?
- 5.86.** Максимум випромінювальної здатності яскравої зірки Арктур припадає на довжину хвилі  $\lambda_{\max} = 580$  нм. Вважаючи, що зірка випромінює як абсолютно чорне тіло, визначити температуру поверхні зірки.
- 5.87.** Дослідження спектра випромінювання Сонця показало, що його максимальна випромінювальна здатність припадає на довжину хвилі  $\lambda_{\max} = 500$  нм. Вважаючи Сонце абсолютно чорним тілом, визначити: повну випромінювальну здатність (енергетичну  $T =$  сонячна стала)  $q = 1360$  Вт/м<sup>2</sup>. 1. Визначити потік енергії сонячних променів, який отримує вся поверхня Землі. 2. Яку частину цей потік складає від всього потоку енергії світлового випромінювання Сонця ? 3. Яка планета отримує від Сонця більше енергії – Земля чи Юпітер ? Радіус Землі  $R_1 = 6,4 \cdot 10^6$  м; радіус Юпітера  $R_2$  в 11,14 рази більший від радіуса Землі; відстань від Землі до Сонця  $l_1 = 1,5 \cdot 10^{11}$  м; відстань від Юпітера до Сонця  $l_2$  у 5,2 рази більша.
- 5.88.** Середня величина послаблення світла зорі в земній атмосфері в зеніті  $\Delta m = 0,23$ . Яка оптична товщина атмосфери.
- 5.89.** Зорі гігант та карлик належать до одного спектрального класу. Яка з них має вищу температуру?
- 5.90.** Чим пояснюється відміна зір-субкарликів та зір головної послідовності діаграми Герцшпрунга-Рессела?
- 5.91.** Чим пояснюється відміна гігантів та субгігантів діаграми Герцшпрунга-Рессела?
- 5.92.** В зоряному скупченні  $N$  зір, зоряна величина кожної з якої  $m$ . Обчислити сумарну зоряну величину скупчення.
- 5.93.** Як зміниться положення зір на діаграмі колір – видима зоряна величина для кульового скупчення, якщо: а) відстань до скупчення збільшити в 10 раз; б) між скупченням та спостерігачем помістити хмару пилу для якого  $A_V = 5$ ?
- 5.94.** На діаграмі Герцшпрунга-Рессела головна послідовність тонка лінія, а не полоса. Чим це обумовлено?
- 5.95.** Що представляє собою діаграма Герцшпрунга-Рессела: полосу вздовж якої еволюціонують зорі чи геометричне місце точок, в яких зорі проводять більшу частину часу?
- 5.96.** Вивести наближену умову квантового виродження електронів, використовуючи ту обставину, що при квантовому виродженні на одну квантову комірку припадає не більше одного електрону.
- 5.97.** Перевірте застосовність моделі ідеального газу для центру Сонця. Перевірте також умову виродження електронного газу для земних умов. Чи входить тиск електронного газу в рівняння земної кори?
- 5.98.** Поясніть фізичні характеристики поверхні Мохоровича.
- 5.99.** Чим відрізняються зовнішнє та внутрішнє ядро Землі?
- 5.100.** Поясніть природу полярного снігу.
- 5.101.** Які фізико-хімічні властивості реголіту?
- 5.102.** Який фізико-хімічний склад полярних шапок Марсу?
- 5.103.** Які основні причини доволі великої густини атмосфери Венери?
- 5.104.** Чи є різниця в поверхнях Меркурію та Марсу?
- 5.105.** Чим пояснюється велике значення магнітного поля Юпітера?
- 5.106.** Дві зорі мають однаковий вік та однакову масу. Однак одна з них обертається. У якій зорі теплова енергія більша?



- 5.107.** Як відомо, швидкість еволюції зорі тим більша, чим більша її маса. Чому ж тоді в подвійних системах поширена ситуація, коли супутник-субгігант має масу меншу, ніж первинний компонент порівняно молода зоря (парадокс Алголя)?
- 5.108.** Явище виникнення нової представляє собою термоядерний спалах на білому карлику речовини, що перетікла з сусідньої зорі збагаченої воднем. Оцініть масу речовини, що вступила в термоядерну реакцію, якщо енергія спалаху рівна  $10^{39}$  Дж.
- 5.109.** Перерахуйте назви класів світності.
- 5.110.** Як за допомогою діаграми спектр-світність можна визначати відстані до зірок?
- 5.111.** Які класи зірок повинні описуватися законами абсолютно чорного тіла з найбільшим ступенем точності?
- 5.112.** Який взаємозв'язок між світністю, масою та радіусом зірок?
- 5.113.** Чому існують верхнє та нижнє обмеження для значень мас зірок?
- 5.114.** Що є джерелом енергії зірок?
- 5.115.** Чому не може бути одночасного «горіння» водню та гелію у центральному ядрі зірки?
- 5.116.** Чому найпотужніші зірки еволюціонують швидше, ніж зірки меншого розміру?
- 5.117.** Яку роль для зірки відіграє конвективна зона?
- 5.118.** Чим відрізняється будова різних типів зірок?
- 5.119.** Що означають поняття «червоний гігант», «білий карлик», «нейтронна зоря» та «чорна діра»?

## Розділ 6. Основи космології

**6.1.** Чорна діра має масу  $m = 10^{50}$  кг. На якій відстані від чорної діри друга космічна швидкість дорівнює швидкості світла?

*Розв'язок*

Швидкість «утікання» від будь-якого тіла дорівнює другій космічній швидкості:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}},$$

де  $R_0$  – відстань від центру тіла.  $m$  – його маса. Швидкість світла  $c = 3 \cdot 10^8$  м/сек. Гравітаційна стала  $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$  н·м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup>. Звідси  $R = 2Gm/c^2 = 1.48 \cdot 10^{23}$  м =  $4.8 \cdot 10^9$  пк =  $15.5 \cdot 10^9$  св.років.

**6.2.** Відомо, що Вега стане Полярною зіркою через 12 000 років. Не знаючи координат Веги, визначити, чи є вона у Харкові в теперішній час такою, що ніколи не заходить?

*Розв'язок*

Внаслідок прецесії полюс світу описує навколо полюса екліптики коло з радіусом  $23^\circ 27'$ . З умов задачі видно, що це коло проходить через Вегу. Легко зрозуміти, що Вега ніколи не буде далі від полюса ніж на  $46^\circ 54'$ . Оскільки висота полюса в Харкові  $50^\circ$ , то Вега зараз (і будь-коли!) зостається завжди вище горизонту.

**6.3.** Лінія водню  $6563 \text{ \AA}$  у спектрі зорі, яка швидко обертається, має ширину  $\Delta\lambda = 6.5 \text{ \AA}$ . Вважаючи, що розширення лінії відбувається завдяки обертанню зорі, оцініть якою є лінійна швидкість обертання зорі на екваторі. Вважайте, що промінь зору лежить у площині обертання зорі.

*Розв'язок*

При обертанні зорі навколо своєї осі діаметрально протилежні точки створюють електромагнітне випромінювання, одне з яких має блакитний, а інше – червоний зсув. Ці зсуви є однаковими за модулем, тому  $\delta\lambda = 2\Delta\lambda$ , де  $\Delta\lambda$  доплерівське зміщення. Застосовуючи формулу ефекту Доплера, одержуємо:

$$\delta\lambda = 2\Delta\lambda = 2\lambda_0 \frac{V_r}{c}.$$

Звідси знаходимо, що лінійна швидкість точок на екваторі зорі:

$$V_r = \frac{c\delta\lambda}{2\lambda_0} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.5}{2 \times 6563} = 1.49 \times 10^5 \text{ м/с} = 149 \text{ км/с}.$$

**6.4.** Деяка подвійна система зір з масами компонентів  $m_1 = 12M_\odot$ ,  $m_2 = 3M_\odot$  здійснює обертання навколо спільного центру мас за 12 діб. Менш масивний компонент є рентгенівським пульсаром з власним періодом пульсацій 0.15 с (у системі відліку, в якій він є нерухомим). Знайдіть відносну та абсолютну зміну періоду пульсара унаслідок ефекту Доплера. Вважайте, що орбіта пульсара є коловою, і промінь зору спостерігача лежить у площині орбіти.

*Розв'язок*

Частота випромінювання, яку реєструє земний спостерігач буде змінюватися навколо значення власного періоду пульсацій рентгенівського пульсара  $P_0 = 0.15$  с. Це пов'язане з ефектом Доплера, що виникає завдяки орбітальному рухові пульсара навколо спільного центру мас подвійної системи зір. Розрахуємо відповідну швидкість. Для цього спочатку визначимо радіуси орбіт подвійної системи. Застосуємо третій закон Кеплера та умову стійкості центру мас системи:

$$T^2 = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)^3}{G(m_1 + m_2)}, \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

На основі цих співвідношень знаходимо радіус орбіти рентгенівського пульсара:

$$a_2 = \frac{4^3}{5} \sqrt{\frac{15M_{\odot}GT^2}{4\pi^2}},$$

$$a_2 = \frac{4^3}{5} \sqrt{\frac{15 \times 2 \times 10^{30} \times 6.67 \times 10^{-11} \times (12 \times 24 \times 3600)^2}{4\pi^2}},$$

$$a_2 = 3.03 \times 10^{10} \text{ м} = 0.20 \text{ а.о.}$$

Тоді орбітальна швидкість рентгенівського пульсара:

$$V = \frac{2\pi a_2}{T} = \frac{2 \times 3.14 \times 3.03 \times 10^{10}}{12 \times 24 \times 3600} = 184000 \text{ м/с.}$$

Відносна зміна періоду пульсацій:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta(c\lambda)}{c\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}.$$

Використовуючи формулу ефекту Доплера

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{V}{c},$$

знаходимо:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{V}{c} = \frac{184000}{3 \times 10^8} = 6 \times 10^{-4}.$$

Абсолютна зміна періоду пульсацій:

$$\Delta P = \frac{\Delta P}{P_0} \times P_0 = 6 \times 10^{-4} \times 0.15 \text{ с} = 90 \text{ мкс.}$$

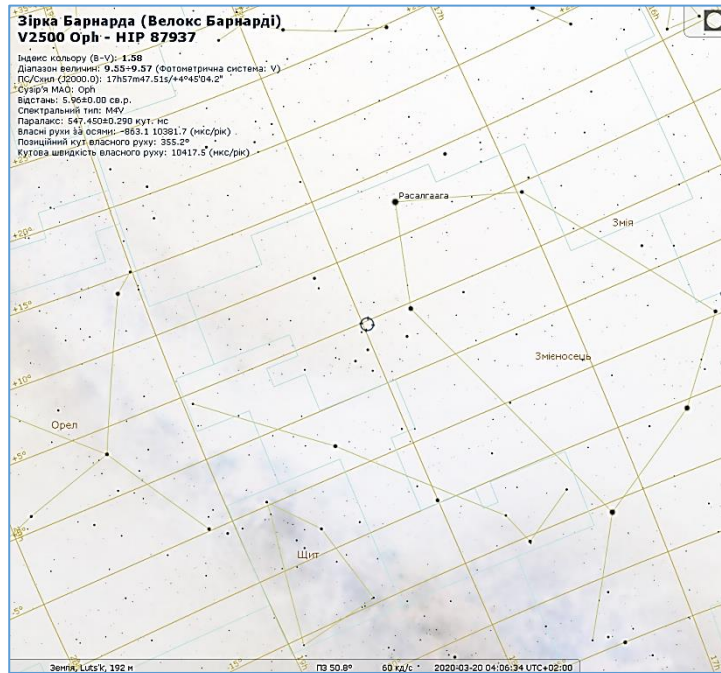
**6.5.** Зоря Барнарда, станом на 2020 рік, має екваторіальні координати  $\alpha = 17^h 57^m 47.5^s$ ,  $\delta = +04^\circ 45' 04.2''$ . Компоненти власного руху зорі становлять  $\mu_\alpha = -0.863''/\text{рік}$ ,  $\mu_\delta = 10.38''/\text{рік}$ . Паралакс зорі  $0.547''$ . Радіальна швидкість зорі дорівнює  $V_r = -110.6 \text{ км/с}$ . На основі цих даних визначте:

- положення зорі на небесній сфері станом на 2020 рік. У межі якого сузір'я потрапляє зоря?
- чи доступна зоря Барнарда для спостережень із території України станом на 2020 рік?
- якими будуть екваторіальні координати зорі через тисячу років? Вкажіть положення зорі на небесній сфері? Якщо просторовим рухом сузір'я знехтувати, то чи залишиться зоря у межах того самого сузір'я?
- у який бік і наскільки зміщена лінія водню  $H_\beta$  у спектрі зорі? (лабораторне значення довжини хвилі лінії  $\lambda_0 = 486.1 \text{ нм}$ ); яке значення має просторова швидкість зорі? Який кут утворює просторова швидкість зорі з напрямком «зоря – земний спостерігач»?
- розрахуйте час (у роках), через який відбудеться (чи відбулося) мінімальне зближення зорі Барнарда із Сонцем за умови, що швидкість зорі Барнарда відносно Сонця є сталою. Знайдіть мінімальну відстань між Сонцем і зорею Барнарда у цей час;
- видима зоряна величина зорі Барнарда станом на 2020 рік становить  $9.50^m$ . Якою вона буде (чи була) на мінімальній відстані до Сонця?

*Розв'язок*

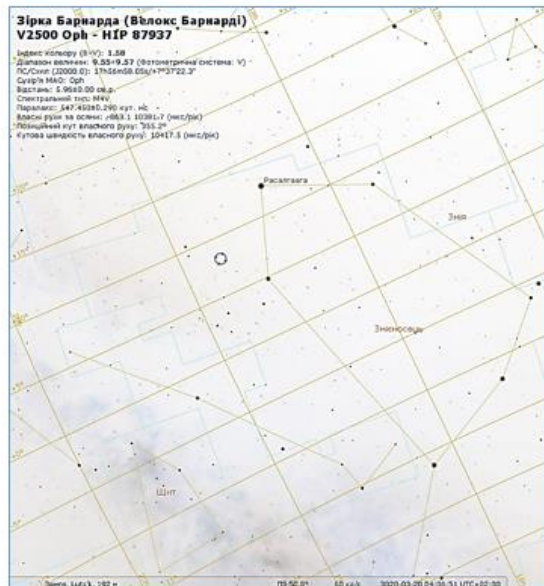
- Внизу наведено скріншот вікна віртуальної обсерваторії Stellarium. Місце розташування – Луцьк. Дата 20.03.2020 року. Час – 04:06. Положення зорі Барнарда на небесній сфері показано кружечком. Зоря знаходиться у сузір'ї Змієносець. Робимо висновок, що у 2020 році зоря Барнарда доступна для спостережень із території України.

б) розрахуємо екваторіальні координати зорі через проміжок часу  $\Delta t = 1000$  років.



$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \mu_\alpha \Delta t = \\ &= 17^h 57^m 47.5^s + (-0.863''/\text{рік}) \times 1000 \text{ років} \\ &= 17^h 57^m 47.5^s - 863'' = 17^h 57^m 47.5^s - 57.5^s \\ &= 17^h 56^m 50.0^s. \end{aligned}$$

$$\delta = \delta_0 + \mu_\delta \Delta t = 04^\circ 45' 04.2'' + 10.38''/\text{рік} \times 1000 \text{ років} = 04^\circ 45' 04.2'' + 10380'' = 07^\circ 38' 04.2''.$$



Зоря надалі залишиться поблизу сузір'я Змієносець.

в) Оскільки променева швидкість зорі від'ємна, то зоря наближається до нас, а у її спектрах відбувається блакитне зміщення (довжина хвилі зменшується). Розрахуємо величину зміщення:

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{V_r}{c} = -486.1 \text{ нм} \times \frac{110.6}{300\,000} = -0.18 \text{ нм} = -1.8 \text{ \AA}.$$

Для розрахунку просторової швидкості спочатку знайдемо її тангенціальну складову:

$$V_t = 4.74 \frac{\mu''}{\pi''} = 4.74 \frac{\sqrt{\mu_\delta^2 + (\mu_\alpha \cos \delta)^2}}{\pi''},$$

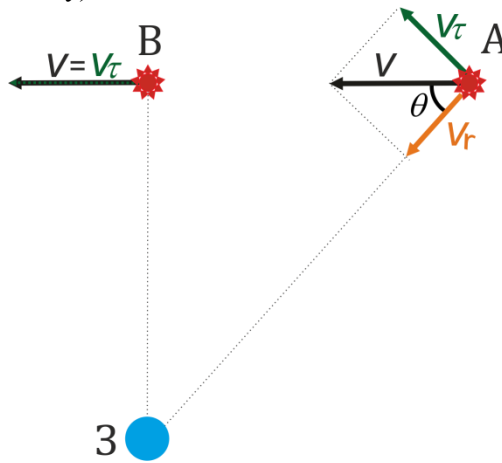
$$V_t = 4.74 \frac{\sqrt{(10.38''/\text{рік})^2 + (-0.863''/\text{рік} \times \cos 4.75^\circ)^2}}{0.547''},$$

$$V_t = 90.26 \text{ км/с.}$$

Тоді просторова швидкість зорі Барнарда:

$$V = \sqrt{V_t^2 + V_r^2} = \sqrt{(-110.6)^2 + 90.26^2} = 142.8 \text{ км/с}$$

Позначимо кут який утворює просторова швидкість зорі з напрямком «зоря – земний спостерігач» через  $\theta$  (рис. внизу).



Знаходимо:

$$\cos \theta = \frac{V_r}{V} = \frac{110.6}{142.8} = 0.7745, \quad \theta = 39.2^\circ.$$

г) мінімальне зближення зорі Барнарда із Сонцем відбудеться, коли зоря буде в позиції В. Час руху зорі від положення А до В дорівнює:

$$\Delta t = \frac{AB}{V} = \frac{AZ \cos \theta}{V}.$$

Відстань від зорі до сонячної системи на момент 2020 року становить:

$$AZ = \frac{1}{\pi''} = \frac{1}{0.547''} = 1.83 \text{ пк} = 5.64 \times 10^{13} \text{ км.}$$

Тоді:

$$\Delta t = \frac{5.64 \times 10^{13} \text{ км} \times 0.7745}{142.8 \text{ км/с}} = 3.06 \times 10^{11} \text{ с} = 9695 \text{ років.}$$

Мінімальна відстань між Сонцем і зорею Барнарда у цей час:

$$BZ = AZ \operatorname{tg} \theta = 1.83 \text{ пк} \times \operatorname{tg} 39.2^\circ = 1.49 \text{ пк.}$$

д) Зміна видимої зоряної величини:

$$m_2 - m_1 = 5 \lg \frac{r_2}{r_1}.$$

Тоді на мінімальній відстані до сонячної системи зоря Барнарда буде мати видиму зоряну величину:

$$m_2 = 9.50^m + 5 \lg \frac{1.49}{1.83} = 9.05^m.$$

**6.6.** Еліптична галактика M49 (NGC 4472) є найяскравішою зі скупчень галактик у сузір'ї Діви. Червоне зміщення у спектрах випромінювання галактики становить 0.0033. Видима зоряна величина галактики  $+9.4^m$ . Визначте світність галактики виражену у світностях Сонця.

*Розв'язок*

Застосуємо закон Габбла і визначимо відстань до галактики:

$$v = Hr,$$

$$r = \frac{v}{H} = \frac{cz}{H},$$

$$r = \frac{3 \times 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}} \times 0.0033}{74.2 (\text{км/с})/\text{Мпк}} = 13.3 \text{ Мпк}.$$

Тоді абсолютна зоряна величина галактики

$$M = m + 5 - 5 \lg r = 9.4 + 5 - 5 \lg(13.3 \times 10^6)$$

$$M = -16.2^m$$

Скористаємося зв'язком між абсолютною зоряною величиною та світністю:

$$M_{\odot} - M = 2.5 \lg \frac{L}{L_{\odot}},$$

$$L = 10^{0.4(M_{\odot} - M)} L_{\odot},$$

$$L = 10^{0.4(4.8 + 16.2)} L_{\odot} = 2.5 \times 10^8 L_{\odot}.$$

Таким чином світність M49 становить  $2.5 \times 10^8$  світностей Сонця.

**6.7.** 17 серпня 2017 р. о 12:41:04 за всесвітнім часом приладами LIGO (США) та VIRGO (Італія) було вперше зареєстровано гравітаційно-хвильовий сигнал GW170817 від злиття двох нейтронних зір. Через 1,7 секунди після цього космічний гамма-телескоп "Fermi", що рухається по низькій навколосемній орбіті, зареєстрував швидкий гамма-спалах GRB 170817A. Подальші спостереження встановили, що подія відбулася у галактиці NGC4993 на відстані 40 мегапарсек. Що можна сказати на основі цих даних про максимальну можливу різницю швидкостей світла та гравітаційних хвиль? 1 парсек дорівнює 3,26 світлового року.

*Розв'язок*

Позначимо час, який затратили гравітаційні хвилі на шлях від джерела до нас  $t_1$ , а час, що подорожувало світло –  $t_2$ . Якщо позначити відстань до джерела  $l$ , швидкість світла  $c$ , а  $v$  – швидкість гравітаційних хвиль. Також нехай  $\Delta t = 1,7$  секунд – час між приходом сигналів. Тоді:

$$t_2 - t_1 = l/c - l/v = l \cdot (1/c - 1/v);$$

$$t_2 - t_1 = \Delta t,$$

$$1/c - \Delta t/l = 1/v,$$

$$v = \frac{cl}{l - c\Delta t},$$

$$v = \frac{c^2 l}{l - c\Delta t},$$

$$l \gg c \cdot \Delta t,$$

$$v = \frac{c^2 l}{l - c\Delta t} = 1,24 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}.$$

**6.9.** Досліджуючи Велику Магеланову Хмару по її знімкам на фотографічних платівках Генрієтта Лівітт відкрила 1777 змінних зір у цьому супутнику нашої галактики. Проаналізувавши ці дані у 1908 році вона відкрила залежність "період–світність" для пульсуючих змінних зір - цефеїд. Чому це відкриття було зроблено саме за спостереженнями зір Магеланової Хмари, а не зір нашої галактики? Сучасне значення відстані до Великої Магеланової Хмари - 50 кілопарсек, на небі вона має розміри  $9^\circ$  на  $11^\circ$ .

*Розв'язок*

Термін “залежність "період – світність" означає, що для пульсуючих змінних зір цефеїд існує залежність між періодом зміни їх блиску та їх власною світністю. (Конкретний вигляд цієї залежності нам в цій задачі неважливий). По-перше, треба знаючи кутові розміри на небі ВМХ і відстань до неї обрахувати її лінійні розміри (позначимо відстань до ВМХ  $l$ ,  $r$  – відстань та радіус ВМХ, а  $\alpha$  – кут під яким ми бачимо всю ВМХ), тоді, беручи  $l = 1^\circ$  отримаємо:

$$2r = 2ltg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 9600 \text{ пк.}$$

ВМХ є не плоским об’єктом, а тривимірним, але її протяжність вздовж променя зору можна вважати приблизно тією ж, що й поперечний розмір. Тоді, вважаючи всі зорі ВМХ такими, що мають однакову відстань від спостерігача (50 кпк) ми робимо помилку лише у  $\pm 4,8$  кпк, тобто  $\pm 10\%$ . Далі, запишемо формулу для абсолютної зоряної величини:

$$M = m + 5 - 5\lg(1 \pm \Delta).$$

Можна порахувати діапазон похибки, яку ми допускаємо вважаючи всі зорі ВМХ однаково віддаленими від спостерігача. Підставляючи значення  $l$  та  $\Delta$  ( $l=50$  кпк,  $\Delta=4,8$  кпк), знаходимо що, наприклад, для зорі із видимою зоряною величиною  $16m$  (це значення повністю довільне і взято його лише для прикладу) її абсолютна зоряна величина дорівнює  $M = -2,5^m \pm 0,2^m$ . Тобто похибка незначна. Таким чином, вважаючи, що всі зорі мають однакову відстань від нас, ми не робимо значної помилки, отже для нас видимі зоряні величини є еквівалентом абсолютної зоряної величини, тобто є мірою їх світності. Якщо б для побудови залежності ми намагалися б використовувати зорі нашої Галактики, для визначення світності потрібно до кожної цефеїди окремо визначати відстань, що потребує надточних і тривалих спостережень.

**6.10.** Виступаючи на засіданні Берлінської АН 18 травня 1899 р., Макс Планк зауважив, що «використовуючи світові константи (мались на увазі  $G$ ,  $c$ ,  $k$ ,  $\hbar$ ) ми отримуємо можливість встановити одиниці довжини, маси, часу і температури, що не залежали б від вибору будь-яких тіл або речовин і обов'язково зберігали б своє значення для всіх часів і для всіх культур, в тому числі і позаземних і нелюдських, і які тому можна було б ввести в якості “природних одиниць вимірювань”. Тим самим М. Планк, вбачав користь у використанні такої системи одиниць у разі можливого контакту із позаземними культурами. З фундаментальних констант  $G$ ,  $c$ ,  $k$ ,  $\hbar$ , скласти величини із розмірностями довжини, часу, маси, температури, густини та розрахувати їх значення. Швидкість світла у вакуумі  $c=299792458$  м/с, гравітаційна стала  $G=6,67 \cdot 10^{-11}$  м<sup>3</sup>кг<sup>-1</sup>с<sup>-2</sup>, редукована стала Планка  $\hbar=h/2\pi=1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, стала Больцмана  $k=1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

*Розв'язок*

Для початку виразимо Дж через основні одиниці: Дж=Н·м=кг·м<sup>2</sup>·с<sup>-2</sup>. Найпростіше виразити масу: бачимо, що перемноживши  $\hbar \cdot c$  отримаємо величину із розмірністю  $\hbar \cdot c = (\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1})(\text{м} \cdot \text{с}^{-1}) = \text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$ . Тепер, поділивши цей вираз на  $G$  отримаємо  $\hbar c/G = (\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2}) / (\text{м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}) = \text{кг}^2$ . Отже, кінцевий вираз для планківської маси буде:

$$M_{pl} = \sqrt{\hbar c/G} = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ кг.}$$

Аналогічним шляхом знаходимо інші планківські величини.

$$l_{pl} = \sqrt{G\hbar/c^3} = 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ м,}$$

$$t_{pl} = \sqrt{G\hbar/c^5} = 5,4 \cdot 10^{-44} \text{ с,}$$

$$T_{pl} = \sqrt{\hbar c^5/Gk^2} = 1,4 \cdot 10^{32} \text{ К,}$$

$$\rho_{pl} = \frac{c^5}{G^2\hbar} = 5,2 \cdot 10^{96} \text{ кг/м}^3.$$

**6.11.** Вчені вважають, що маса відомої області Всесвіту (яка має радіус  $r_U \approx 10^{26}$  м) дорівнює  $\sim 10^{56}$  г. Вважаючи, що середня по Всесвіту маса зорі дорівнює значенню, отриманому з вивчення околиць Сонця  $M = 0,4M_{\text{Сонця}}$ , а загальна маса зір складає 0.4% маси Всесвіту оцініть загальне число зір у Всесвіті.

*Розв'язок*

Число зір у Всесвіті за умови задачі складає

$$N_S = \frac{0,004 \cdot 10^{56}}{0,4 \cdot 10^{33}} \approx 10^{21}.$$

**6.12.** 22 вересня 2011 р. за результатами обробки даних експерименту OPERA, проведених в лабораторії Гран-Сассо спільно з ЦЕРН, було оголошено, що швидкість нейтрино  $V_{\text{нейтрино}}$  перевищує швидкість світла  $c$ :  $(V_{\text{нейтрино}} - c)/c = (2.37 \pm 0.32) \cdot 10^{-5}$ . Проти цього результату свідчать дані спостережень нейтрино від наднової SN 1987A у Великій Магеллановій Хмарі. Наскільки нейтринний сигнал від наднової прийшов би раніше світлового спалаху, якби результати експерименту OPERA були вірні? Вважати, що швидкість нейтрино не залежить від її енергії. Відстань до наднової становить 51300 пк. Точний момент спалаху наднової SN 1987A невідомий, але вона спалахнула 23 лютого між 3 год. 35 хв. та 10 год. 35 хв. за всесвітнім часом. Нейтринні обсерваторії зареєстрували спалах нейтрино 23 лютого о 7 год. 35 хв. за всесвітнім часом.

*Розв'язок*

Можна розв'язувати двома шляхами.

1. З таблиці необхідних величин просто переводимо у метри відстань у парсеках. Або ж, навіть без таблиці, можна, знаючи визначення парсека, як одиниці відстані, що вживана в астрономії і визначається як відстань, з якої середній радіус земної орбіти (рівний 1 а.о. = 150 млн. км), перпендикулярний променю зору, видно під кутом в одну кутову секунду (1"), знайти з прямокутного трикутника, що  $1 \text{ пк} = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ м/тг}(1") = 3.08 \cdot 10^{16} \text{ м}$ . Звідси знаходимо, що відстань до наднової світло проходить за 167 тисяч років. Тоді, обрахувавши швидкість нейтрино, знаходимо час, за який вони проходять ту ж саму відстань. Далі знаходячи різницю між цими величинами отримуємо відповідь, що нейтрино випередять світло на  $1.24 \cdot 10^8 \text{ с}$ , що відповідає 3.96 років.

2. Знаючи, що 1 пк становить 3.26 світлових роки, відразу знаходимо відстань до наднової у світлових роках, що і виражає час, за який світло доходить до нас від наднової. Позначимо  $\beta = (V_{\text{нейтрино}} - c)/c = 2.37 \pm 0.32 \cdot 10^{-5}$ ,  $S$  – відстань до наднової, а  $\alpha$  невідому різницю між часом приходу нейтрино та світла. Тоді  $T_{\text{світло}} - T_{\text{нейтрино}} = \alpha = S/c - S/V_{\text{нейтрино}} = (S/V_{\text{нейтрино}})((V_{\text{нейтрино}} - c)/c) = (S/V_{\text{нейтрино}})\beta$ . Оскільки швидкість нейтрино  $V_{\text{нейтрино}} = (\beta + 1)c$ , підставимо її у формулу для  $\alpha$  і отримуємо  $\alpha = S\beta/(c(\beta + 1))$ ; де величина  $S/c$  є час, за який світло проходить відстань від наднової, виражаючи його роках та зважаючи на те, що  $\beta/(\beta + 1) \approx \beta$ , тому нейтрино прийде раніше за світло на  $\alpha = 3.96$  роки. Але, через похибки в значенні величини швидкості нейтрино по відношенню до швидкості світла від  $2.05 \cdot 10^{-5}$  до  $2.69 \cdot 10^{-5}$ , нейтрино можуть прийти раніше в інтервалі від 3.4 до 4.5 років. Тобто між серпнем 1982 р. й жовтнем 1983 р.

*Коротка історична довідка.* Хоча у повідомленні про відкриття SN 1987A у Великій Магеллановій Хмарі вказано, що вона виявлена 24 лютого Я. Шелтоном о 4:12 UT, точно назвати час спалаху не можна. Момент спалаху наднової SN 1987A обмежений інтервалом між самим пізнім знімком, на якому на місці наднової немає зірки яскравіше  $12^m$  і найбільш раннім знімком, на якому вона була знайдена. Перший отриманий теж Я. Шелтоном на обсерваторії Лас Кампанас в Чилі за добу до відкриття - 23 лютого (в частках доби - лютий 23.14). Другий - отриманий Р. Мак-Нотом о 10:35 UT 23 лютого (лютий 23.44) в обсерваторії Сайдинг-Спрінгс в Австралії. Нейтринні обсерваторії Kamiokande II, IMB і Баксан зареєстрували спалах нейтрино, що тривав менше 13 секунд, о 7:35 за всесвітнім часом 23 лютого (приблизно за 3 години до першого виявлення наднової на фотоплатівці). Причому за даними Kamiokande II було визначено напрямок, котрий з точністю до 20 градусів збігся з напрямком на ВМХ. Хоча за цей час були зареєстровані всього 24 нейтрино і антинейтрино, це істотно перевищило фон (за рахунок флуктуації фонового потоку така подія може статися раз в 100 тисяч років). Детектор IMB почав роботу в 1982 р., а Kamiokande II в кінці 1983 р., так що, принаймні, перший детектор повинен був зареєструвати цю подію, якщо б вона відбулась, чого, однак, не спостерігалось.



**6.13.** У 1923 р. Адріан ван Маанен з обсерваторії Маунт Вілсон опублікував дослідження туманності М33, в якому показав, що туманність обертається, і її оберт на різних відстанях від центру здійснюється за 60 000-240 000 років. Але в 1925 р. Едвін Габбл повідомив про відкриття цефеїд в М33. За методом "період-світність" Габбл визначив відстань до цієї туманності (285 кпк) та її діаметр (4.3 кпк). На основі своїх спостережень Габбл заперечував реальність виявленого ван Мааненом ефекту. Спробуйте сформулювати і обґрунтувати основну претензію Габбла. 1 2 Орбіта астероїда Орбіта Землі.

*Розв'язок*

При знайденій Габблом відстані обертання по круговій орбіті із діаметром у 4.3 кпк ( $43000 \text{ пк} = 206265 \text{ а.о.} \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \text{ м} = 3.1 \cdot 10^{16} \text{ м}$ ) та періодом в 240 тисяч років дає лінійну швидкість в  $(2\pi \cdot 3.1 \cdot 10^{16} \text{ м} \cdot 2150 \text{ пк}) / (240 \text{ 000 р.} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600)$ , тобто 19% від швидкості світла, а з періодом в 60 тисяч років - в 4 рази більше. Такі великі швидкості вкрай не реалістичні. Розгін до таких швидкостей для макроскопічних об'єктів потребує величезних енергій. Немає фізичних механізмів, здатних забезпечити необхідну енергію.

**6.14.** Гравітаційним радіусом  $r_g$  тіла з масою  $M$  називається його радіус, при якому друга його космічна швидкість дорівнює швидкості світла  $c$ . Обчислити гравітаційні радіуси Землі та Сонця, знаючи, що друга космічна швидкість для Землі 11.2 км/с, а для Сонця 618 км/с.

*Розв'язок*

Квадрат другої космічної швидкості дорівнює:

$$V_2^2 = \frac{2GM}{R},$$

де  $R$  – радіус тіла. Звідси випливає, що гравітаційний радіус тіла дорівнює:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2},$$

тобто відношення

$$\frac{r_g}{R} = \frac{V_2^2}{c^2}.$$

Звідси обчислюємо, що гравітаційний радіус Землі дорівнює 1 см, а Сонця – 3 км.

**6.14.** Чому вночі темно?

*Розв'язок*

Якби зірки заповнювали нескінченний евклідовий простір у середньому рівномірно, то небо було б таким самим яскравим, як диск Сонця. Дійсно, тілесний кут, під яким видно диски зірок, що знаходяться між  $r$  і  $r + dr$ , дорівнює об'єму кульового шару  $4\pi r^2 dr$ , помноженому на число зірок в одиниці об'єму  $N$  і на тілесний кут, під яким видно кожна зірка (припускаємо, що всі вони однакові, відмова від цього припущення не змінює кінцевого висновку),  $\pi \left(\frac{r_0}{r}\right)^2$ , де  $r_0$  - радіус зірки. Отже, зірки із кульового шару  $(r, r + dr)$  займає від неба тілесний кут  $4\pi^2 r_0^2 N dr$ . При інтегруванні по  $r$  (вважаючи, що Всесвіт безмежний) виходить нескінченний тілесний кут, так що диски зірок повинні перекриватися, повністю закриваючи собою небо. Якби світ був такий улаштований, то день не відрізнявся б від ночі. Це знаменитий фотометричний парадокс Ольберса (1744 р. швейцарський астроном де Шезо і незалежно від нього в 1826 р. Ольберс сформулювали цей парадокс, який призвів до кризи найвних космологічних моделей). З того, що ночами темно, можна зробити дуже важливий висновок про будову Всесвіту: зроблені нами припущення про стаціонарність і безмежність видимої частини Всесвіту не виконуються. Дозвіл фотометричного феномена Ольберса у цьому, що Всесвіт розширюється, тому треба враховувати червоне зміщення. Відповідно до закону Габбла, що далі знаходяться ділянки Всесвіту, то швидше вони від нас віддаляються; галактики видаються нам такими, якими вони були в далекому минулому, оскільки світла від них потрібен час, щоб дійти до нас. Спостерігаючи найдаліші об'єкти, ми бачимо, як вони розлітаються зі швидкостями, які дедалі ближче до непереборного бар'єру – швидкості світла. Існують квазари, які віддаляються зі швидкістю 285 000 км/с! Якби ми могли побачити об'єкти, що віддаляються зі швидкістю світла, то вони виглядали б так само, як у витоків Всесвіту. Не всі об'єкти у Всесвіті можна буде колись побачити. Світло від об'єктів, розташованих далі певної відстані, не встигає зійти до нас, вони завжди приховані від

нашого погляду. Таким чином, видима частина Всесвіту виявляється кінцевою (ось вихід із парадоксу Ольберса). Очевидно, що Всесвіт до того ж еволюціонує, як впливає із закону Габбла та теорії еволюції зірок.

**6.15.** Покажіть, що рівняння ньютонівської гідродинаміки та теорії тяжіння не допускають існування однорідної, ізотропної, статичної космологічної моделі (тобто незмінного в часі Всесвіту, що однорідно заповнений ідеальною рідиною).

*Розв'язок*

Розглядувані в задачі ньютонівські рівняння мають вигляд

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \text{ (рівняння для гравітаційного потенціалу),} \quad (1)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \text{ (рівняння неперервності),} \quad (2)$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\Phi \text{ (рівняння Ейлера).} \quad (3)$$

Якщо Всесвіт статичний та однорідний, то  $\vec{v} = 0$ , а  $p$  та  $\rho$  сталі величини. Тоді розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$\Phi = \frac{2}{3} \pi G\rho r^2 + \vec{C} \cdot \vec{r} + K,$$

де  $\vec{C}$  та  $K$  – довільні сталі інтегрування, а  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений довільно вибраного початку координат. Ліва частина рівняння (2) дорівнює тотожно нулю. Однак рівняння (3) не задовольняється: ліва його частина рівна нулю в силу того, що  $\vec{v} = 0$ , а в правій частині  $\frac{\nabla p}{\rho}$  рівний нулю із-за умови однорідності але  $\nabla\Phi$  не може тотожно перетворитись в нуль ні прямоку вибарі сталих  $\vec{C}$  та  $K$ . Таким чином, дана система рівнянь не має розв'язків, що задовольняють поставленим вимогам.

**6.16.** Простір час не має речовини та є всюди ізотропним. Покажіть, що він є простором Мінковського.

*Розв'язок*

Оскільки простір-час є всюди ізотропним, то він і сферично-симетричний відносно певного несингулярного спостерігача. Але згідно теореми Біркгоффа єдиним сферично-симетричним вакуумним розв'язком є метрика Шварцшильда, а єдиним випадком, коли метрика цього типу регулярна в початку координат – де знаходиться спостерігач, є плоский простір Мінковського.

**6.17.** Певний об'єкт чорнотільно випромінює з температурою  $T$  у власній системі відліку, що знаходиться в стані спокою; ми спостерігаємо це випромінювання при червоному зміщенні  $z$  та в тілесному куті  $\Omega$ . Чому рівний вимірюваний потік випромінювання? Що зміниться, якщо червоне зміщення не є космологічним, а обумовлене доплерівським рухом локального об'єкта?

*Розв'язок*

Згідно теореми Ліувілля густина числа фотонів в фазовому просторі  $I_\nu/\nu^3$  стала вздовж траєкторії світлового променя і є також лоренц-інваріантною величиною. Тоді, скориставшись визначенням:

$$(v_{rad}/v_{vis}) = 1+z,$$

будемо мати:

$$\begin{aligned} \text{Спостережуваний потік} &= \Omega \int I_\nu^{vis} d\nu_{vis} = \Omega \int \left( \frac{I_\nu^{rad}}{v_{vis}^3} \right) \cdot v_{vis}^3 d\nu_{vis} = \Omega \int \frac{I_\nu^{rad}}{v_{rad}^3} \cdot \frac{v_{rad}^3 d\nu_{rad}}{(1+z)^4} \\ &= \frac{\Omega}{(1+z)^4} \int I_\nu^{rad} d\nu_{rad} = \frac{\Omega}{(1+z)^4} \frac{1}{\pi} \sigma T^4, \end{aligned}$$

де  $\sigma$  – стала Ботльцмана. Слід зазначити, що так як червонозміщений чорнотільний спектр також є якимось чорнотільним спектром, то спостережувані нами спектр та потік випромінювання виглядають так якби вони приходять до нас від розташованого поблизу стаціонарного об'єкта, температура якого рівна  $T/(1+z)$ , а випромінювання заповнює тілесний кут  $\Omega$  для земного спостерігача.

Все це не залежить від того, чи є червоне зміщення гравітаційним, космологічним чи обумовленим ефектом Доплера, так як теорема Ліувілля справедлива для загального випадку.

**6.18.** Світловий промінь поширюється вздовж радіальної лінії в метриці Робертсона – Уокера:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right].$$

Як координата  $r$  зв'язана з афінним параметром  $\lambda$  вздовж траєкторії променя або, іншими словами, чому дорівнює  $dr/d\lambda$ ?

*Розв'язок*

Виберемо нову радіальну координату  $\chi$ , що визначається як:

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2}.$$

Тоді для фотона, що поширюється вздовж радіуса,  $d\vartheta = d\varphi = 0$ , а метричні коефіцієнти вздовж траєкторії не залежать від  $\chi$ . Таким чином  $\chi$  – циклічна координата та  $p_\chi = \text{const}$  вздовж траєкторії променя. Піднімаючи цей індекс за допомогою метричного тензора, отримаємо:

$$p^\chi = C/R^2(t),$$

де  $C$  – певна стала. Але:

$$p^\chi = d\chi/d\lambda,$$

звідки:

$$d\lambda = C^{-1} R^2(t) d\chi = C^{-1} \frac{R^2(t)}{\sqrt{1-kr^2}} dr.$$

Слід зазначити, що, оскільки  $R$  – функція від  $t$ , то вона є також функцією від  $r$  вздовж світової лінії минулого.

**6.19.** Розглянемо замкнений ( $k = 1$ ) фрідманівський Всесвіт, в якому випромінювання є переважаючим лише на протязі нескінченно малої долі всього часу життя Всесвіту. Скільки раз фотон може оббігти по колу за час моменту від народження до смерті?

*Розв'язок*

Якщо у фрідманівській метриці час виражається через «кут розгортки»  $\eta$  наступним чином:

$$\eta = dt/R(t),$$

то вираз інтервалу для фотона, що поширюється по радіусу ( $d\vartheta = d\varphi = 0$ ), приймає вигляд

$$0 = ds^2 = R^2(\eta)(-d\eta^2 + d\chi^2),$$

де  $d\chi^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2}$  – «тригонометрична» радіальна координата на 3-сфері.. Час життя Всесвіту (проміжок часу між двома нулями функції  $R$ ) відповідає проміжку  $\Delta\eta = 2\pi$ . За цей час фотон пройде відстань  $\Delta\chi = 2\pi$ , тобто оббіжить Всесвіт точно один раз.

**6.20.** Для фрідманівської моделі з  $k = 1$  та  $\rho = 1$  показати, що лінійний елемент має вигляд

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 [d\chi^2 + \sin^2\chi (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)].$$

Вкажіть явний вигляд координатного перетворення, яке показує, що метрика описує простір Мінковського.

*Розв'язок*

Для  $p = \rho = 0$  та  $k = -1$  фрідманівське рівняння першого порядку:

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2$$

зводиться до рівняння:

$$\dot{R} = 1,$$

звідки випливає, що:

$$R = t,$$

Тобто заданий вираз для лінійного елемента дійсно представляє метрику Фрідмана. Оскільки метрика сферично-симетрична, то радіальна координата має вигляд:

$$r = tsh \chi.$$

Легко переконатись, що шуканим перетворенням часової координати є:

$$T = tch\chi,$$

а потім можна вирахувати перетворений вираз для інтервалу:

$$ds^2 = -dT^2 + dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2),$$

що відповідає порожньому простору Мінковського.

**6.21.** Показати зв'язок ньютонівської та айнштайнівської теорії гравітації.

**6.22.** Яка критична густина Всесвіту?

**6.23.** З чого складається критична густина Всесвіту?

**6.24.** Яка реальна густина Всесвіту?

**6.25.** Яка роль темної енергії у Всесвіті? Оцініть її кількість.

**6.26.** Яка роль темної матерії у Всесвіті? Оцініть її кількість.

**6.27.** Яка роль випромінювання у еволюції Всесвіту?

**6.28.** Яка роль реліктового випромінювання у еволюції Всесвіту?

**6.29.** Які основні ери розширення Всесвіту в інфляційній моделі?

**6.30.** Основні послідовності та положення інфляційної моделі еволюції Всесвіту?

**6.31.** Які основні кандидати на роль темної матерії у Всесвіті?

**6.32.** Який фізичний зміст сталої Габла?

**6.33.** Які основні сценарії еволюції Всесвіту?

**6.34.** Які характеристики чорних дір Зельдовича-Сюняєва?

**6.35.** Чи можлива градація чорних дір за розмірами та масами?

**6.36.** Чим характеризуються спіральні рукави Молочного Шляху?

**6.37.** Якими способами можна визначити розширення Всесвіту?

**6.38.** Які основні етапи еволюції зір?

**6.39.** Як визначити космологічний горизонт?

**6.40.** В чому суть камертонної діаграми Габла?

**6.41.** Що таке горизонт подій?

**6.42.** Чи можливо спостерігати тахіони?

**6.43.** Як основні положення тахіонної динаміки?

**6.44.** Яка роль космологічного члена в рівнянні Айнштейна в сучасній космології?

**6.45.** Які основні моделі формування Галактик?

**6.46.** Поясніть механізм випаровування чорних дір?

**6.47.** Які основні властивості тензору Айнштейна?

**6.48.** Які основні властивості тензора енергії-імпульсу в рівнянні Айнштейна?

**6.49.** Чим відрізняються чорні діри Лапласа та Едвардса?

**6.50.** Яка різниця між монополями Дірака та Т'Хоофта-Полякова?

**6.51.** Які фізико-хімічні причини утворення еруптивних Галактик?

**6.52.** Яка модель описує розширення Всесвіту зі збільшенням прискорення?

**6.53.** Як пояснити експериментальні результати по білих карликах, які спростовують розширення Всесвіту зі збільшенням прискорення?

**6.54.** Поясніть основні властивості гравітаційного вакууму.

**6.55.** Опишіть моделі, які пояснюють вміст водню та гелію у Всесвіті.

**6.56.** Поясніть баріонну асиметрію Всесвіту.

**6.57.** Яка роль планківських одиниць в сучасній космології?

**6.58.** Вивести з рівняння Айнштейна рівняння Фрідмана.

**6.59.** Еддінгтонівською границею світимості зорі з масою  $M$  називається світність, при якій всюди всередині зорі світловий тиск який напрямлений назовні в точці врівноважується напрямленою всередину зорі силою тяжіння. Оцініть це значення. Будемо вважати, що речовиною зорі є повністю іонізованого водню.

**6.60.** Покажіть, що на пробні частинки, які знаходяться в середині самогравітуючої порожньої сфери, не діють гравітаційні сили.

- 6.61.** Виведіть загальнорелятивістський критерій конвективної стійкості рівноважної конфігурації ідеальної рідини.
- 6.62.** Оцініть число гравітонів, які випромінюються при асиметричному вибуху з енергією  $E$ .
- 6.63.** Який спектр (Рис. 6.1) належить галактиці, що: 1) дуже повільно обертається навколо осі і розміщена відносно близько від спостерігача; 2) швидко обертається і розташована близько від спостерігача; 3) повільно обертається, але знаходиться на дуже великій відстані від спостерігача?

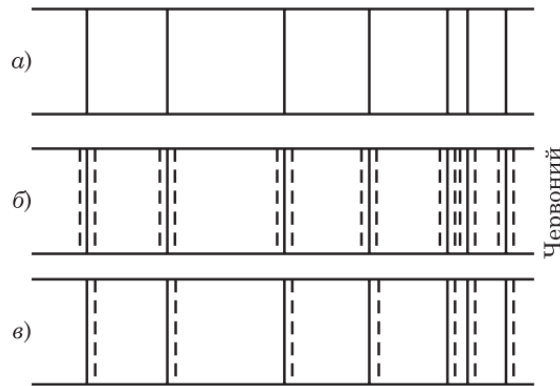


Рис. 6.1.

- 6.64.** Що ви можете сказати про аксіонне гало нашої Галактики?
- 6.65.** Чим обмежений час життя нейтронної зорі?
- 6.66.** Чим обмежений час життя білого карлика?
- 6.67.** Оцініть масу нейтронної зорі, враховуючи, що для перетворення звичайної речовини в нейтронний стан потрібно затратити певну енергію. Наприклад, в реакції  $^{16}_8\text{O} + 8e^- \rightarrow 16^1_0\text{n}$  потрібно затратити  $7 \cdot 10^{11}$  Дж. Густина нейтронної зорі  $10^{14}$  г/см<sup>3</sup>.
- 6.68.** В центрах зірок з масами  $M_s \geq 10M_G$  після вичерпування ядерних джерел утворюється залізне ядро з масою  $M_{ns} \geq 1,5M_G$ . Таке ядро нестійке і колапсує або в нейтронну зірку або для більших мас в чорну діру. Оцініть яка енергія для цього потрібна. Чи достатньо цієї енергії для пояснення спалаху наднової? Радіус нейтронної зірки – 10 км.
- 6.69.** Знайдіть початковий період обертання та величину магнітного поля зколапсованої нейтронної зорі, врахувавши збереження орбітального моменту та вмороженості магнітного поля в процесі колапсу. Радіус зорі, період обертання та напруженість магнітного поля для колапсу рівні радіусу Сонця, 25 діб еф 1000 Ерстед відповідно. Радіус нейтронної зірки – 10 км.
- 6.70.** Як ви думаєте чи відрізняються фізичні характеристики чорної діри, що знаходиться в центрі Галактики, та чорної діри, яка виникла в результаті еволюції зорі? Якщо відрізняються, то як?
- 6.71.** Як зміниться в процесі колапсу магнітний дипольний момент зорі та відношення повної магнітної та повної гравітаційної енергії зорі? Магнітне поле вважати вмороженим. Показати, що початково складне поле в процесі колапсу прямує до дипольного.
- 6.72.** Дайте визначення вмороженого магнітного поля.
- 6.73.** Наведіть основні концептуальні положення магнітогідродинаміки.
- 6.74.** Густина енергії  $\epsilon$  зв'язана з тиском випромінювання  $P$  за допомогою формули  $P = \epsilon/3$ . Покажіть, що для повільних (зворотних) процісів випромінювання веде себе як ідеальний газ з показником адіабати  $4/3$ .
- 6.75.** Зразу після утворення нейтронної зорі вона має настільки високу температуру, що перебуває в рідкому стані. Однак при подальшому охолодженні нейтронна речовина може переходити в кристалічний стан. В результаті утворюється поверхнева кора товщиною до 1 км. Обчислити максимально можливу висоту гори на нейтронній зорі з масою 1,5 мас сонця

та радіусом 10 км. Граничне напруження, яке може витримати кристал рівне  $P_{max} \approx 10^{12}$  дин/см<sup>2</sup>.

**6.76.** Наведіть основні концептуальні положення магнітогідростатики.

**6.77.** Оцініть енергію обертання зорі Ве, лінійна швидкість якої на екваторі 300 км/с. Порівняйте її з іншими видами енергії, що є в зорі. Радіус зорі – 10 радіусів Сонця, маса зорі – 10 мас Сонця. Зорю вважати однорідним твердим тілом, що рівномірно обертається.

**6.78.** Чому більш масивні зорі знаходяться менше часу на основній послідовності діаграми Герцшпрунга-Рессела.

**6.79.** Для обертаючихся зір з променевим переносом тепла має місце теорема фон Цейпеля: температура поверхні в даній точці зорі пропорційна кореню четвертої степені від ефективного прискорення сили тяжіння, яке визначається різницею гравітаційного та центробіжного прискорень. Знайти відношення температури на полюсі до температури на екваторі для гама Касіопеї. Радіус зорі – 10 радіусів Сонця, маса зорі – 10 мас Сонця, швидкість на екваторі 350 км/с. Який би вигляд мала фотосфера такої зорі з близької відстані? Для спрощення форму зорі виберіть у формі кулі.

**6.80.** Витікання речовини із зір надгігантів, проходить під дією сил тиску випромінювання, що поглинається в резонансних лініях. При такому витіканні швидкість на нескінченності буде рівною  $v_{\infty}$ . Як правило, при таких умовах  $v_{\infty} = 3v_p$ , де  $v_p$  – параболічна швидкість на поверхні зорі. Визначити закон, за яким змінюється швидкість у витікаючій речовині  $v(R)$  при наступних умовах: а) радіаційна сила обернено пропорційна квадрату відстані від центру зорі; б) рух речовини вважається без зіткнень; в) швидкість на поверхні зорі рівна нулю.

**6.81.** Яка послідовність утворення хімічних елементів у надрах звед?

**6.82.** Як би ви визначили відстань до іншої галактики з допомогою виявленої там цефеїди?

**6.83.** Які типові механізми спалаху наднової та нової зірок?

**6.84.** Розрахуйте гравітаційний радіус для Сонця, Землі, людини.

**6.85.** Опишіть будову нашої Галактики.

**6.86.** Скільки приблизно обертів зробило Сонце навколо центру Галактики за своє «життя»?

**6.87.** Які бувають типи галактик?

**6.88.** Назвіть стадії еволюції протопланетної туманності.

**6.89.** Планети якого типу виявлені біля інших зірок?

**6.90.** При густині Всесвіту, яка дорівнює критичній, масштабний фактор змінюється за законом  $R(t) \sim t^{2/3}$ . Знайдіть закон зміни сталої Хаббла в залежності від часу.

**6.91.** У процесі розширення Всесвіту спектр реліктового випромінювання завжди залишався планківським. Визначте на основі закону Віна, скільки років тому температура реліктового випромінювання була в 2 рази вищою. Використовуйте інформацію з попередньої задачі.

### Розділ 7. Змішані астрофізичні задачі

**7.1.** Три зорі однакової маси  $m$  утворюють правильний трикутник зі сторонами  $L$  та обертаються навколо загального центру мас по круговим орбітам з періодом  $T$ . Знайти маси зір.

*Розв'язок*

Відстань зорі до центру мас (який співпадає з центром трикутника):

$$r = L/\sqrt{3}.$$

Тоді швидкість зорі по її орбіті:

$$v = \frac{2\pi r}{L},$$

а доцентрове прискорення:

$$a = \frac{v^2}{L} = \frac{4\pi^2 L}{\sqrt{3}T^2}.$$

Це прискорення є результатом дії на зорю гравітаційних сил від двох інших зір. Кожна сила дорівнює:

$$F = \frac{Gm^2}{L^2}.$$

Склавши їх за правилом паралелограма (1 бал), знайдемо гравітаційне прискорення зорі:

$$a_{gr} = 2\frac{\sqrt{3}Gm}{L^2}.$$

Це прискорення дорівнює відцентровому, звідки:

$$m = \frac{4\pi^2 L^2}{3GT^2}.$$

**7.2.** Орбіти більшості астероїдів головного поясу проходять на відстанях 2.0 – 3.0 а.о. від Сонця, середня відносна швидкість астероїдів  $v = 5$  км/сек. Як часто будуть відбуватись зіткнення у поясі астероїдів, якщо його вважати тором, а всі астероїди мають сферичну форму й однаковий діаметр 1 км? Вважати, що всього тіл у поясі астероїдів  $N=10^6$ .

*Розв'язок*

Зіткнення відбувається в середньому за час  $t$ , такий, що об'єм  $V$  циліндра з висотою  $vt$  та радіусом  $r$  (де  $v$  - відносна швидкість астероїдів, а  $r$  – мінімальна відстань між центрами астероїдів, яка дає змогу пройти без зіткнення) дорівнює об'єму, що приходить у поясі астероїдів на один астероїд:

$$\pi r^2 vt = \frac{V_{ab}}{N}.$$

Вважаючи пояс астероїдів тором з середнім радіусом  $R = 2.5$  а.о. та коловим перерізом діаметра  $d = 1$  а.о. запишемо його об'єм:

$$V_{ab} = \frac{\pi^2 d^2 R}{2}.$$

Розв'язуючи відносно  $t$  отримуємо:

$$t = \frac{\pi d^2 R}{2r^2 v} = 84 \cdot 109 \text{ років.}$$

Це середній час між зіткненнями для одного астероїда. Якщо ж ми будемо розглядати усі астероїди в поясі, час скорочується в  $N$  раз та складає 84000 років. Це означає, що за всю історію астрономії малоймовірно спостерігати зіткнення кілометрових астероїдів. Але кількість астероїдів швидко зростає зі зменшенням діаметра, тому зіткнення з маленькими тілами є набагато більш частими, що астрономи й спостерігали, наприклад, у грудні 2010 р. для 100 км астероїда 596 Шейла.

**7.3.** Комета Галлея, період обертання якої навколо Сонця складає 76 років, проходить у перигелії на відстані 0.6 а.о. від Сонця. Визначте, у скільки разів слабше Сонце освітлює поверхню її ядра у афелії, ніж у перигелії?

*Розв'язок*

За III законом Кеплера можна знайти велику піввісь орбіти:

$$a = T^{2/3} \approx 18 \text{ а.о.}$$

Оскільки в перигелії відстань  $r = 0.6$  а.о., тоді в афелії вона складає:

$$R = 2a - r = 35.4 \text{ а.о.}$$

За законом обернених квадратів відношення освітленостей:

$$E_r/E_R = R^2/r^2 = (35.4/0.6)^2 \approx 3.5 \cdot 10^3 \text{ рази.}$$

**7.4.** Вважається, що радіоактивний розпад є основним джерелом енергії, що розігріває надра Землі і є рушієм тектоніки плит. 22 січня 2020 оприлюднені результати спостережень на нейтринній обсерваторії Борексіно: за 12 років було зареєстровано 53 антинейтрино, що народилося під час радіоактивного розпаду  $U^{238}$  та  $Th^{232}$  у надрах Землі. Цих даних вистачило, щоб визначити повний вміст урану (33 Тт) та торію (143 Тт). Відомо, що розпад урану продукує 94 мкВт/кг а торію 26 мкВт/кг. Обчисліть яка доля енергії, що її виділяє Земля ( $87 \text{ мВт/м}^2$ ), походить саме з радіоактивного розпаду цих елементів.

*Розв'язок*

Повну потужність, що виділяє Земля  $W$  отримаємо помноживши повну площу поверхні Землі  $S$  на тепловий потік з одного квадратного метра  $q$ :

$$W = qS = q \cdot 4\pi R^2 = 44 \cdot 10^{12} \text{ Вт.}$$

З того  $W_U = M_U \cdot Q_U$  виділяється при розпаді урану, а  $W_{Th} = M_{Th} \cdot Q_{Th}$  – при розпаді торію, де  $M$  – маса, а  $Q$  – потужність енерговиділення на кілограм маси відповідного елементу:

$$W_U = 3,1 \cdot 10^{12} \text{ Вт,}$$

$$W_{Th} = 3,7 \cdot 10^{12} \text{ Вт,}$$

що в сумі дає:  $W_U + W_{Th} = 6,8 \cdot 10^{12} \text{ Вт}$ , або приблизно 15% від повного енерговиділення Землі.

**7.5.** Дві зорі, подібні до Сонця, розташовані діаметрально протилежно відносно центру нашої Галактики на відстані 15 кпк від нього. Припустимо, що  $10^{-9}$  від повної кількості усіх електронів однієї зорі було забрано і передано іншій зорі. Порівняйте силу із якою взаємодіятимуть тепер ці зорі із силою їх притягання всією галактикою, маса якої  $10^{12}$  мас Сонця. (Вказівка: масу Галактики вважати зосередженою в її центрі).

*Розв'язок*

Вважатимемо, що зоря складається цілком з водню. Тоді повна кількість електронів в зорі  $n = M/m$ , де  $M$  – маса зорі, а  $m$  – маса атома водню. Кожен атом водню має один електрон. Тоді, якщо забрати в зорі частку  $\delta = 10^{-9}$  електронів, зоря отримає заряд

$$q = \delta Me/m.$$

Сила електростатичної взаємодії між двома зорями на відстані  $2R$ :

$$F_e = kq^2/4R^2 = k \cdot (\delta Me/2Rm)^2,$$

де  $k$  – коефіцієнт закону Кулона, а  $e$  – заряд електрона Сила гравітаційного притягання зорі до центру Галактики (де ми умовно вважаємо зосередженою всю масу Галактики):

$$F_g = GNM^2/R^2,$$

де  $G$  – гравітаційна стала а  $N = 10^{12}$  – кількість зір в Галактиці. Відношення цих сил:

$$K = F_e/F_g = 310000.$$

Електростатичні сили будуть приблизно в 300 000 разів більші гравітаційних! Зауважте, що до кінцевого виразу не увійшли ані маса Сонця, ані відстань до центру Галактики.

**7.6.** У двох однакових галактиках спалахнули дві однакові наднові зорі типу SN Ia, причому в максимумі блиску видима зоряна величина надгової в першій галактиці становить  $+17^m$ , а надгової у другій:  $+15^m$ .

А) Яка з галактик знаходиться на більшій відстані від Землі?

Б) У скільки разів відрізняються відстані від Землі до цих галактик?

*Розв'язок*

Оскільки спалахнули однакові наднові зорі типу SN Ia, то їх світності є однаковими  $L_1 = L_2 = L$ . Нехай перша зоря має видиму зоряну величину  $m_1$  і знаходиться на відстані від Землі  $r_1$ . Другій відповідають значення  $m_2$  і  $r_2$ .

Тоді:



$$17 - 15 = 2.5 \lg \frac{E_2}{E_1} = 2.5 \lg \frac{\frac{L}{4\pi r_2^2}}{\frac{L}{4\pi r_1^2}} = 5 \lg \frac{r_1}{r_2}.$$

Одержуємо:

$$2 = 5 \lg \frac{r_1}{r_2}.$$

Звідси:

$$\frac{r_1}{r_2} = 10^{0.4} = 2.5$$

Отже, на більшій відстані знаходиться перша галактика. Відстані до Землі відрізняються у 2.5 рази.

**7.7.** Абсолютна зоряна величина центральної зорі у системі Trappist-1 становить  $18.4^m$ . Визначте видиму зоряну величину цієї зорі з поверхні екзопланети Trappist-1c, яка віддалена від центральної зорі на середню відстань 0.0158 а. о. Порівняйте його із видимою зоряною величиною Сонця з поверхні Землі.

*Розв'язок*

Нехай  $m_T$  видима зоряна величина зорі Trappist-1 з поверхні екзопланети Trappist-1c. Тоді:

$$m_T = M + 5 \lg \frac{r}{10 \text{ пс}},$$

$$m_T = 18.4^m + 5 \lg \frac{0.0158}{10 \times 206265} = -22.2^m.$$

Для порівняння, видима зоряна величина Сонця з поверхні Землі становить  $-26.7^m$ .

**7.8.** «Kepler-65» Екзопланетна система Kepler-65, яка знаходиться у сузір'ї Ліра, складається із центральної зорі Kepler-65 та чотирьох планет земної групи. Найбільшу схожість із Землею має четверта екзопланета цієї системи – Kepler-65e, яка була відкрита у 2019 році. На даний момент відсутні дані спостережень про середню відстань цієї екзопланети від центральної зорі. На основі даних наведених у таблиці, виконайте наступні завдання:

а) розрахуйте середню відстань екзопланети Kepler-65e від центральної зорі Kepler-65 (в а. о.)

б) розрахуйте «сонячну сталу» для екзопланети Kepler-65e, тобто кількість електромагнітної енергії, яку отримує  $1 \text{ м}^2$  поверхні екзопланети за 1 секунду, якщо промені падають перпендикулярно до її поверхні. Порівняйте одержаний результат із сонячною сталою для Землі. Зробіть висновки про придатність даної екзопланети для життя за умови, що на ній присутня атмосфера.

Параметр	Значення
Маса зорі Kepler-65	$1.25 M_{\odot}$
Ефективна температура поверхні зорі Kepler-65	6211 К
Радіус зорі Kepler-65	$1.41 R_{\odot}$
Орбітальний період обертання екзопланети Kepler-65e навколо зорі	258 діб
Сонячна стала для Землі	1367 Вт / $\text{м}^2$
Ефективна температура поверхні Сонця	5778 К

Тут  $M_{\oplus}$  – маса Землі,  $R_{\odot}$  – радіус Сонця,  $M_{\odot}$  – маса Сонця.

*Розв'язок*

А) Для розрахунку середньої відстані екзопланети до центральної зорі скористаємося третім законом Кеплера узагальненого Ньютоном:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

Для спрощення обчислень, напишемо цей закон для системи Земля–Сонце:

$$T_{\oplus}^2 = \frac{4\pi^2 a_{\oplus}^3}{GM_{\odot}}$$

Розділивши обидві формули, одержимо

$$\frac{a^3}{a_{\oplus}^3} = \left(\frac{T}{T_{\oplus}}\right)^2 \frac{M}{M_{\odot}} = \left(\frac{258}{365}\right)^2 \frac{1.25 M_{\odot}}{M_{\odot}} = 0.625.$$

Звідси:

$$a = \sqrt[3]{0.625} = 0.855 \text{ а. о.}$$

Б) Кількість електромагнітної енергії, яку випромінює зоря в системі Kepler-65 за одиницю часу становить:

$$L = \sigma T^4 \times 4\pi R^2.$$

Тоді «сонячна стала» для екзопланети:

$$q = \frac{L}{4\pi a^2} = \sigma T^4 \times \frac{R^2}{a^2}.$$

Для Землі сонячна стала:

$$q_{\oplus} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_{\oplus}^2} = \sigma T_{\odot}^4 \times \frac{R_{\odot}^2}{a_{\oplus}^2}.$$

Остаточо

$$q = q_{\oplus} \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4 \times \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \times \left(\frac{a_{\oplus}}{a}\right)^2,$$

$$q = q_{\oplus} \left(\frac{6211}{5778}\right)^4 \times \left(\frac{1,41}{1}\right)^2 \times \left(\frac{1}{0,855}\right)^2 = 3.63 q_{\oplus},$$

$$q = 3.63 \times 1367 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = 4962 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

**7.9.** Змінна зоря типу UV Кита, що має температуру поверхні 3000 К під час спалаху змінила свій блиск на 2 зоряні величини. У максимумі спалаху зі спектрофотометричних спостережень встановлено, що температура склала 12000 К. Оцініть, яка частина площі зорі охоплена спалахом. При розв'язанні вважайте, що спалах відбувся поблизу центру видимого диску зорі.

*Розв'язок*

Будемо вважати, що спалах відбувся поблизу центру видимої півкулі зорі. Світність зорі до спалаху  $L_1$  пов'язана з її температурою  $T_1$  та площею поверхні її видимої півкулі  $S_1$  співвідношенням:

$$L_1 = S_1 \sigma T_1^4.$$

Додаткова світність зорі під час спалаху, який охопив поверхню зорі площею  $S_2$  становить:

$$L_2 = S_2 \sigma T_2^4.$$

Тоді сумарна світність зорі у момент спалаху:

$$L = L_1 + L_2 = \sigma(S_1 T_1^4 + S_2 T_2^4).$$

Зміна видимого блиску після спалаху:

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 2.5 \lg \frac{L_1}{L_2} = 2.5 \lg \frac{S_1 T_1^4}{S_1 T_1^4 + S_2 T_2^4} = -2^m,$$

$$\frac{S_1 T_1^4 + S_2 T_2^4}{S_1 T_1^4} = 10^{0.8} = 6.3,$$

$$1 + 256 \times \frac{S_2}{S_1} = 6.3,$$

$$\frac{S_2}{S_1} = 0.02 = 2\%.$$

Таким чином, спалах охопив 2% площі поверхні зорі.

**7.10.** Упродовж місяця видимий діаметр Юпітера зменшився від 50'' до 47''. Чому буде дорівнювати видима зоряна величина Юпітера у кінці місяця, якщо на початку місяця вона дорівнювала  $m = -2.9^m$ ?

*Розв'язок*

Освітленість, яку створює Сонце на Седні:

$$E = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a^2(1+e)^2} = \frac{\sigma T_{\odot}^4 4\pi R_{\odot}^2}{4\pi a^2(1+e)^2}.$$

За одиницю часу планета отримує енергію:

$$\frac{W}{t} = (1-A)ES = \frac{(1-A)\sigma T_{\odot}^4 4\pi R_{\odot}^2}{4\pi a^2(1+e)^2} \pi R_{\text{Седна}}^2.$$

В умовах термодинамічної рівноваги, планета випромінює стільки ж енергії як і поглинає. Тому, відповідно до закону Стефана-Больцмана, одержуємо:

$$\frac{W}{t} = \sigma T_{\text{Седна}}^4 4\pi R_{\text{Седна}}^2 = \frac{(1-A)\sigma T_{\odot}^4 4\pi R_{\odot}^2}{4\pi a^2(1+e)^2} \pi R_{\text{Седна}}^2.$$

Звідси:

$$T_{\text{Седна}} = T_{\odot} \sqrt[4]{\frac{(1-A)R_{\odot}^2}{4a^2(1+e)^2}},$$

$$T_{\text{Седна}} = 5770 \sqrt[4]{\frac{(1-0.32)(696 \times 10^6)^2}{4 \times (484 \times 149.6 \times 10^9)^2(1+0.84)^2}} = 8.5 \text{ K}.$$

**7.11.** Розрахуйте і порівняйте сили тиску на Місяць сонячного вітру (можна вважати що він повністю складається з протонів) і сонячного світла. Концентрація часток сонячного вітру на відстані 1 а.о., залежно від рівня сонячної активності, змінюється в діапазоні від 4 до 12 частинок в 1 см<sup>3</sup>, а їх швидкість - від 300 до 700 км/с. Імпульс фотона з енергією  $E$  становить  $p = E/c$ .

*Розв'язок*

Із другого закону Ньютона слідує, що сила дорівнює зміні імпульсу тіла за одиницю часу (при постійній масі):

$$F = ma = m(\Delta V)/\Delta t = \Delta(mV)/\Delta t.$$

(Будемо вважати, що частинки сонячного вітру "прилипають" до Місяця, передаючи йому свій імпульс, приросту ж маси Місяця можна знехтувати. Нехай  $V$  – швидкість часток сонячного вітру,  $n$  – їх концентрація, тоді за одиницю часу на одиницю поверхні Місяця попаде  $nV$  частинок, що принесуть імпульс  $mp(nV)V$ . Тоді, сила тиску на Місяць, що одержана всією опроміненою вітром півсферою за одиницю часу є –

$$\pi R^2 mp(nV)V = 3.14 \cdot (1.737 \cdot 10^6 \text{ м})^2 \cdot (3 \cdot 10^5 \text{ м/с})^2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot 4 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3} = 5.7 \text{ кН}.$$

Це мінімальна оцінка, використовуючи максимальні величини для концентрації та швидкості частинок сонячного вітру, імпульс буде дорівнювати 93 кН. (5 балів) Сила світлового тиску визначається сумарним імпульсом поглинутих фотонів за одиницю часу. Фотон з енергією  $E$  має імпульс  $p = E/c$ , де  $c$  – швидкість світла. Якщо на площу  $S$  падає нормально  $n$  фотонів за секунду, кожен з яких має енергію  $E$  то, оскільки освітленість  $I$  (Дж·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>) можна виразити через світність Сонця, світловий тиск на тіло буде дорівнювати:

$$F = \pi R^2 \cdot L / (c \cdot 4\pi r^2),$$

де  $L$  – світність Сонця,  $r$  – відстань до Місяця від Сонця (1 а.о.). Тоді  $F=43.2$  МН. Тобто тиск світла в 4650 разів більший від максимальних значень швидкості та концентрації сонячного вітру і в 7600 раз більший від мінімальних.

**7.12.** Видимий блиск яскравих планет змінюється в досить широкому діапазоні: Венера: від  $-4,3^m$  до  $-3,0^m$ ; Марс: від  $-2,8^m$  до  $+1,6^m$ ; Юпітер: від  $-2,1^m$  до  $-0,9^m$ ; Сатурн: від  $-0,4^m$  до  $+1,5^m$ . Переведіть ці значення в відношення освітленостей, що створює планета на Землі. Поясніть, чому зміни блиску Марса набагато більші, ніж у Венери чи Юпітера. Чому зміни блиску Сатурна більші, ніж у Юпітера? З яким періодом відбуваються зміни блиску цих планет?

*Розв'язок*

Видимий блиск світила вимірюється освітленістю, що воно створює на Землі. Зміни цієї освітленості можна вирахувати з відомої формули Погсона:

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{0,4(m_2 - m_1)},$$

де  $E$  – освітленість,  $m$  – зоряна величина, індекси 1 та 2 позначають моменти найбільшого та найменшого блиску. Отримуємо, що освітленість від Венери може змінюватись в 3.3 рази, Марса – в 57 разів, Юпітера – в 3.0 рази, а Сатурна – в 5.7 разів. Головних причин змін блиску планет є три (в порядку зменшення впливу на яскравість):

1. Ефект фазового кута, тобто кута між напрямком на Сонце з планети та напрямком на Землю. Якщо цей кут наближається до  $180^\circ$ , ми зовсім не будемо бачити планету, бо вона повернеться до нас неосвітленим боком. Період зміни дії цього ефекту – синодичний період планети.

2. Відстань від планети до Землі. Згідно закону обернених квадратів освітленість зменшується пропорційно квадрату відстані до джерела (в даному випадку – до планети). Період, як і для ефекту 1 – синодичний.

3. Відстань від планети до Сонця, яка залежить від ексцентриситету орбіти. Період зміни – сидеричний період планети.

Порівняно невеликі зміни яскравості Венери пояснюються тим, що для неї ефекти 1 та 2 діють в протилежних напрямках: коли Венера наближається до Землі, вона повертається до нас неосвітленим боком.

Суттєві зміни яскравості Марса пов'язані зі значною зміною відстані до Землі (від 0.382 до 2.666, що дає зміну блиску майже в 48 разів), та помітним ексцентриситетом (0.0933, що призводить до зміни ще в 1.4 рази). У випадку Марса, ефекти 1 та 2 діють в одному й тому ж напрямку – коли Марс найближче до нас, він повернутий до нас освітленою півкулею.

Зміни яскравості Юпітера значно менші, тому, що відстань від нього до Землі змінюється незначно (від 3.950 до 6.452, зміна блиску в 2.7 рази). Невеликі й зміни із-за ексцентриситету (0.04845, зміна блиску в 1.2 рази).

Здавалось би, Сатурн, що розташований ще далі від Сонця, а значить, відносні зміни відстані до Землі ще менші (від 8.00 до 11.1, що дає зміну блиску всього в 1.4 рази), а ексцентриситет приблизно такий ж (0.05565, зміна блиску в 1.25 рази), повинен мати максимальні зміни не більші ніж  $1.25 \cdot 1.4 = 1.75$ . Але Сатурн показує зміни в 5.7 разів, що значно вище нашої оцінки. Тут треба пригадати, що Сатурн має кільця. І площина цих кілець нахилена до площини екліптики під кутом коло  $27^\circ$ ! Тому, в залежності від розташування Сатурна на орбіті ми можемо бачити кільця або широко повернутими до нас (двічі за 29.5 років), або з ребра, коли вони зовсім невидимі (теж двічі за 29.5 років). Таким чином ефект кілець має період рівний половині сидеричного періоду Сатурна.

**7.13.** До «великих земель» відносять екзопланети з діаметрами менше двох діаметрів Землі. А які у цьому разі максимальні маси таких екзопланет?

*Розв'язок*

Середня густина Землі складає:

$$\rho_{\text{сер}} = \frac{3M_{\text{зем}}}{4\pi R_{\text{зем}}^3}.$$

Взявши цю густину за характерну для екзопланет, що вважаються «землями», маса таких планет при 2-х радіусах Землі буде складати:

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{сер}} 8R_{\text{зем}}^3 = 83M_{\text{зем}}.$$

**7.14.** Визначте масу атмосфери Венери, якщо тиск на її поверхні дорівнює  $P = 1.0 \times 10^7$  Па.

*Розв'язок*

З визначення тиск то є сила, яка діє на одиницю площі поверхні:  $P = F/S$ . Сила, яка діє на всю поверхню Венери, дорівнюватиме масі атмосфери помноженій на прискорення вільного падіння  $g$ , яке знайдемо як:

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Маса Венери дорівнює:

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3.$$

Приймаючи до уваги все це, маємо для маси атмосфери:

$$m = \frac{4\pi\rho R^2 P}{g} = 4\pi R^2 P \frac{3R^2}{4\pi\rho R^3} = \frac{3PR}{G\rho} = 5,23 \cdot 10^{20} \text{ кг}.$$

**7.15.** На яку висоту викидається речовина із вулканів супутника Юпітера Іо, якщо швидкість його викиду  $1 \text{ км/с}$ ? Маса Іо дорівнює  $8,94 \cdot 10^{22} \text{ кг}$ , діаметр –  $3630 \text{ км}$ .

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{R+h}$$

( $m$  – маса викинутої речовини;  $M$  та  $R$  – маса і радіус Іо;  $h$  – висота викиду;  $v$  – швидкість викиду). Отримуємо:

$$h = \frac{v^2 R^2}{2GM - v^2 R} = 326 \text{ км}.$$

**7.16.** Чому дорівнює робота сили тяжіння, яка б при стисненні Сонця від нескінченно великих розмірів до сучасного значення його радіуса?

*Розв'язок*

При поперечному ( $\theta = 90^\circ$ ) ефекті Доплера вираз для частоти:

$$v = v_0 \sqrt{1 - \beta^2} \approx v_0 \left(1 - \beta^2/2\right);$$

бо  $\frac{\Delta v}{v_0} = -\frac{\beta^2}{2}$ , а для довжини хвилі:  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\beta^2}{2}$ .

Швидкість атомів водню визначається через кінетичну енергію:

$$v^2 = \frac{2T}{m},$$

де  $m_p = 1,67 \cdot 2 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$  – маса протона ( $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ). В результаті одержуємо:

$$\Delta \lambda = \frac{T \cdot \lambda_0}{m_p \cdot c^2} \approx 0,698 \text{ нм}.$$

**7.17.** Сіріус – найяскравіша зірка неба, яка створює на Землі освітленість  $9 \cdot 10^{-6} \text{ лк}$ , а зірка б-ї величини –  $8 \cdot 10^{-9} \text{ лк}$ . Яка зоряна величина І кд на відстані  $1 \text{ м}$  та  $1 \text{ км}$ ?

*Розв'язок*

З фотометрії відома формула залежності освітленості, що створюється точковим джерелом, від його сили світла:

$$E = \frac{I \cdot \cos i}{r^2},$$

де  $I$  – сила світла джерела,  $i$  – кут падіння випромінювання на вимірювальну площадку ( $0^\circ$ ),  $r$  – відстань від джерела до майданчика вимірювального приладу. Отже, джерело, сила

світла якогось кд, створює освітленість  $E_1 = 10^{-6}$  лк (у першому випадку),  $E_2 = 1$  лк (у другому випадку). Порівняємо ці освітленості з освітленістю, що створюється зіркою 6-ї величини.

$$1) \quad \lg \frac{E_1}{E_2} = 0,4(6 - m_1) = 2,097; \quad m_1 = 0,76^m; \quad 2) \quad m_2 = -14,24^m.$$

**7.18.** Обчисліть температуру абсолютно чорної кулі, що знаходиться від Сонця на такій же відстані, що і Меркурій, якщо сонячна постійна для Землі  $1360 \text{ Вт/м}^2$ .

*Розв'язок*

Якщо сонячна стала для Землі розраховується як:

$$Q_T = \frac{L_G}{4\pi r_T^2}.$$

( $L_G$  – світність Сонця;  $r_T$  – середня відстань від Землі до Сонця), то для Меркурія:

$$Q_M = \frac{L_G}{4\pi r_M^2}$$

( $r_M$  – середня відстань від Меркурія до Сонця). Звідси:

$$Q_M = Q_T \left( \frac{r_T}{r_M} \right)^2.$$

Світловий потік, що падає на кулю з радіусом  $R$ ,

$$\Phi = Q_M \pi R^2,$$

перевипромінюється згідно із законом Стефана - Больцмана, тому:

$$4\pi R^2 \sigma T^4 = Q_M \pi R^2.$$

У результаті

$$T = \sqrt[4]{\frac{Q_T}{4\sigma}} \sqrt{\frac{r_T}{r_M}} \approx 447,32 \text{ К}.$$

**7.19.** Показати основні особливості чотирьохпротонного циклу та його вплив на еволюцію зір.

*Розв'язок*

Чотирьохпротонний цикл або протон-протонний ланцюжок (також *протон-протонний цикл* або *водневий цикл*) – низка термоядерних реакцій, у яких водень перетворюється на гелій. Є основним джерелом енергії зір невеликої маси (до  $1,2 M_\odot$ ), що перебувають на головній послідовності. Наведемо розподіл реакцій протон-протонного ланцюжка за гілками у надрах Сонця.

Гілка	Реакція	Енерговиділення, М еВ
Загальна частина	$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$	1,4
	$d + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	5,49
ppI	${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p$	12,86
ppII	${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$	1,59
	${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$	0,86
	${}^7\text{Li} + p \rightarrow 2{}^4\text{He}$	17,35
ppIII	${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$	1,59
	${}^7\text{Be} + p \rightarrow {}^8\text{B} + \gamma$	0,137
	${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \nu_e$	15,08
	${}^8\text{Be} \rightarrow 2{}^4\text{He}$	2,99
<b>Разом:</b>	<b><math>4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e</math></b>	<b>26,73</b> (частково вноситься нейтрино)

Перші дві реакції відбуваються у повному циклі двічі. Швидкості проміжних реакцій набагато більші швидкості першої реакції, тому проміжні продукти практично не накопичуються.

Подальший перебіг реакції поділяється на три основних гілки: ppI, ppII та ppIII. Імовірність реалізації тієї чи іншої гілки залежить від фізичних умов у надрах зорі. За умов, типових для надр Сонця (температура близько 10 млн. К, густина близько 100 г/см<sup>3</sup>), здебільшого реалізується гілка I. За температури 13 – 15 млн. К основної ваги набуває гілка II. За температури 15 – 17 млн. К переважає третя гілка.

За температури понад 17 млн. К синтез гелію з водню відбувається переважно шляхом вуглецево-азотного циклу.

У всіх випадках виділяється однакова енергія, але частка енергії, що вноситься нейтрино, дещо відрізняється.

**7.20.** Показати основні особливості вуглецево-азотного циклу та його вплив на еволюцію зір.

*Розв'язок*

Вуглецево-азотний цикл – ланцюжок термоядерних реакцій за участі ядер вуглецю, азоту, кисню та фтору, унаслідок яких водень перетворюється на гелій та виділяється енергія. Розгалужений процес складається з чотирьох основних гілок, які переплетені між собою. У виділенні енергії головну роль відіграє найвідоміша перша гілка, інші гілки важливі для пояснення зоряного нуклеосинтезу.

Схематичне зображення циклу Бете-Вейцекера

У циклі беруть участь усі стабільні ізотопи С, N, O, F та декілька нестабільних ізотопів цих елементів. Тому в сучасній астрономічній літературі його часто називають CNO-циклом (ізотопи фтору мають дуже низьку концентрацію і їх внесок дуже незначний).

Перша гілка складається з таких реакцій:

- $^{12}\text{C} + ^1\text{H} \rightarrow ^{13}\text{N} + \gamma + 1,94 \text{ MeV}$  (360 років)
- $^{13}\text{N} \rightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e + 1,37 \text{ MeV}$  (7 хвилин)
- $^{13}\text{C} + ^1\text{H} \rightarrow ^{14}\text{N} + \gamma + 7,55 \text{ MeV}$  (100 років)
- $^{14}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{15}\text{O} + \gamma + 7,29 \text{ MeV}$  (25 тис. років)
- $^{15}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e + 2,76 \text{ MeV}$  (82 секунди)
- $^{15}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^4\text{He} + 4,96 \text{ MeV}$  (0,93 року)

Цю гілку іноді називають циклом Бете — Вейцекера або просто *циклом Бете*, оскільки її запропонували 1938 року Ганс Бете і (незалежно) Карл Вайцекер як джерело енергії звичайних зір із температурою в центральній частині близько 20 млн К.

За таких умов найповільнішою є реакція  $^{14}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{15}\text{O} + \gamma$ . Саме вона визначає інтенсивність енерговиділення та переробки протонів.

Остання реакція (протона з ядром  $^{15}\text{N}$ ) зрідка завершується утворенням ядра  $^{16}\text{O}$  (приблизно одна реакція радіаційного захоплення протона на тисячу реакцій з утворенням альфа-частинки). Утворення такого ядра призводить до появи другої та третьої гілки. У скороченому вигляді їх можна записати так:

CNO-II

$(^{14}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{15}\text{O} + \gamma) (^{15}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e) (^{15}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{16}\text{O} + \gamma) (^{16}\text{O} + ^1\text{H} \rightarrow ^{17}\text{F} + \gamma) (^{17}\text{F} \rightarrow ^{17}\text{O} + e^+ + \nu_e) (^{17}\text{O} + ^1\text{H} \rightarrow ^{14}\text{N} + ^4\text{He})$

CNO-III

$(^{15}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{16}\text{O} + \gamma) (^{16}\text{O} + ^1\text{H} \rightarrow ^{17}\text{F} + \gamma) (^{17}\text{F} \rightarrow ^{17}\text{O} + e^+ + \nu_e) (^{17}\text{O} + ^1\text{H} \rightarrow ^{18}\text{F} + \gamma) (^{18}\text{F} \rightarrow ^{18}\text{O} + e^+ + \nu_e) (^{18}\text{O} + ^1\text{H} \rightarrow ^{15}\text{N} + ^4\text{He})$

Швидкість перебігу реакцій другої та третьої гілки приблизно однакова, вона визначається найповільнішою (за температури близько 20 млн К) ланкою:  $^{17}\text{O} + ^1\text{H}$ .

Ще одна гілка виникає внаслідок розгалуження в останній реакції третьої гілки: замість  $(^{18}\text{O} + ^1\text{H} \rightarrow ^{15}\text{N} + ^4\text{He})$  зрідка відбувається реакція  $(^{18}\text{O} + ^1\text{H} \rightarrow ^{19}\text{F} + \gamma)$ ; такий варіант щонайменше на три порядки рідший, ніж основний.

CNO-IV Редагувати )

У скороченому вигляді гілку записують так:

$(^{16}\text{O} + ^1\text{H} \rightarrow ^{17}\text{F} + \gamma) (^{17}\text{F} \rightarrow ^{17}\text{O} + e^+ + \nu_e) (^{17}\text{O} + ^1\text{H} \rightarrow ^{18}\text{F} + \gamma) (^{18}\text{F} \rightarrow ^{18}\text{O} + e^+ + \nu_e) (^{18}\text{O} + ^1\text{H} \rightarrow ^{19}\text{F} + \gamma) (^{19}\text{F} + ^1\text{H} \rightarrow ^{16}\text{O} + ^4\text{He})$ .

Кожна з гілок циклу призводить до перетворення чотирьох протонів ( $^1\text{H}$ ) на ядро гелію ( $^4\text{He}$ ), два позитрони та нейтрино з виділенням 26,73 МеВ (як і у водневому циклі). Утім, частка енергії, яку виносять нейтрино (близько 1,7 МеВ), дещо більша, ніж у реакціях водневого циклу.

Водночас протони беруть участь у реакціях водневого циклу, але швидкість протонних реакцій вуглецево-азотного циклу залежить від температури набагато сильніше, ніж відповідних реакцій водневого циклу. Тому вуглецево-азотний цикл є переважним джерелом енергії для зір, температура в ядрі яких перевищує 15 млн К. Це зорі з масою понад  $1,2 M_{\odot}$ .

Хоча друга та третя гілка мають другорядне значення для енерговиділення, однак вони визначають концентрацію ізотопів  $^{17}\text{O}$  та  $^{18}\text{O}$ , що має суттєве значення для нуклеосинтезу. На пізніших стадіях зоряної еволюції ці ізотопи можуть брати участь у реакціях із виділенням нейтронів.

Четверта гілка попри незначну роль у виділенні енергії (менше мільйонної частки) важлива тим, що пояснює походження  $^{19}\text{F}$ . За участю цього ізотопу відбуваються подальші реакції (зокрема,  $^{19}\text{F} + ^1\text{H} \rightarrow ^{20}\text{Ne} + \gamma$ ), але їх імовірність дуже невелика, і нею зазвичай нехтують.



Через деякий час після початку реакцій встановлюється певне співвідношення між концентраціями ізотопів C, N, O, F (воно залежить від температури та густини в надрах зорі), яке надалі залишається практично незмінним. Тому ці ізотопи називають каталізаторами.

Ланцюжок кожної гілки вуглецево-азотного циклу містить дві реакції бета-розпаду, швидкість яких не залежить від зовнішніх умов. У надрах зір головної послідовності ці реакції є найшвидшими й загальна швидкість енерговиділення визначається перебігом реакцій за участю протонів.

Під час спалахів нових і наднових або на поверхні нейтронних зір реакції вуглецево-азотного циклу відбуваються за температур близько 80 млн К і бета-розпад стає, навпаки, найповільнішою ланкою циклу. Нестійкі ядра не встигають розпадатися й беруть участь у нових ядерних реакціях за участю протонів та альфа-частинок. У цьому випадку кількість гілок циклу значно збільшується й він набуває заплутаного характеру. Такий вуглецево-азотний цикл називають гарячим.

- 7.21.** Чи впливає ефект аберації на час приходу імпульсу від пульсара в подвійній системі?
- 7.22.** Покажіть, що для ізентропійних зір сума ентальпії та гравітаційного потенціалу не залежить від радіусу.
- 7.23.** Покажіть, що для ізентропійних зір, що знаходяться в гідродинамічній рівновазі, повна робота при перестановці двох елементів з однаковими масами рівна нулю.
- 7.24.** Чому ми не сподіваємось, що лінії нейтрального заліза будуть помітні в спектрі зорі класу B0.
- 7.25.** У якої зорі – G8III чи – G7V радіус більший?
- 7.26.** Чи можливо за спостереженням моментів приходу імпульсів випромінювання від рентгенівського пульсара визначити швидкість центра мас подвійної системи.
- 7.27.** Аналіз спектру зорі дозволив визначити її ефективну температуру та прискорення сили тяжіння на її поверхні. Зі спостережень відомі видима зоряна величина  $m$  та паралакс зорі  $\pi''$ . Знайдіть спосіб визначення маси зорі.
- 7.28.** Розрахуйте силу тяжіння в атмосфері гіганта спектрального класу K3, радіус якого рівний 190 радіусам Сонця. Знайдіть висоту однорідної атмосфери для поширених металів. Знехтувати можливою турбулентністю.
- 7.29.** Виділимо всередині зорі кульовий сектор з тілесним кутом  $d\Omega$  (Рис. 7.1). Знайти рівнодійну сил тиску  $dF$  що діють на цей об'єм.

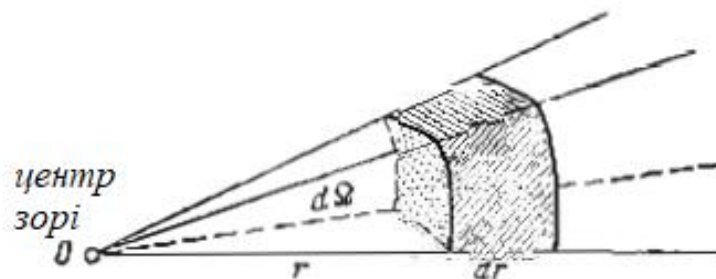


Рис. 7.1.

- 7.30.** Нехай  $X$  – маса водню,  $Y$  – маса гелію в одному грамі зоряної величини. Визначити середню молекулярну масу повністю іонізованої суміші цих газів. Чому рівна молекулярна маса повністю іонізованого гелію?
- 7.31.** Якщо б всередині зорі пропав би тиск газу, то вона стиснулась би за час  $t_1$  (так званий гідродинамічний час). Знайдіть гідродинамічний час для Сонця та порівняйте з характерним тепловим часом.
- 7.32.** Оцініть вклад променевого тиску в рівняння гідростатичної рівноваги Сонця.
- 7.33.** Яким повинен бути характерний час стиснення Сонця, щоб підтримувалась спостережувана світимість Сонця?

- 7.34.** Знайдіть мінімальну масу зорі, при якій можливі ядерні реакції при температурі 1000000К, густина зорі 1 г/см<sup>3</sup>.
- 7.35.** Яким чином можна визначити розподіл речовини в зорі, що входить в подвійну систему?
- 7.36.** Оцініть гравітаційну та теплову енергію білого карлика з температурою 10000К. Перевірити як узгоджуються отримані результати з теоремою віріалу?
- 7.37.** Опишіть сценарій відходу зорі з головної послідовності?
- 7.38.** В чому суть конденсаційної теорії Джинса?
- 7.39.** Для яких астрофізичних об'єктів використовується межа Чандрасекара?
- 7.40.** Для яких астрофізичних об'єктів використовується межа Волкова-Оппенгеймера?
- 7.41.** Яка природа полярних сьайв?
- 7.42.** Як впливає сонячна активність на біологічні процеси?
- 7.43.** Якими фізичними процесами визначається час життя зорі на головній послідовності?
- 7.44.** Якими фізичними процесами визначається час життя білого карлика?
- 7.45.** Якими фізичними процесами визначається час життя нейтронної зорі?
- 7.46.** Як залежить стала Габла від часу?
- 7.47.** Які астрофізичні характеристики можна визначити зі спектрів зір?
- 7.48.** Які астрофізичні характеристики можна визначити зі спектрів Галактик?
- 7.49.** Які фізичні процеси проходять в еруптивних Галактиках?
- 7.50.** До чого може привести взаємодія, в т.ч. зіткнення, Галактик.
- 7.51.** Яка природа виникнення кулястих скупчень зір?
- 7.52.** Яка природа виникнення розсіяних скупчень зір?
- 7.53.** Чому у Всесвіті так мало пекулярних Галактик?
- 7.54.** Чим обумовлена поява в спектрах деяких зір трансуранових елементів?
- 7.55.** Чим обумовлена поява в спектрах деяких зір металів?
- 7.56.** Які астрофізичні процеси описує магнітогідродинаміка?
- 7.57.** В чому суть чотирьохпролонного циклу? Які зорі він описує?
- 7.58.** В чому суть CNO-циклу? Які зорі він описує?
- 7.59.** Що описує межа Шенберга – Чандрасекара?
- 7.60.** В чому суть неонов-натрієвого циклу? Які зорі він описує?
- 7.61.** В чому суть магній-алюмінієвого циклу? Які зорі він описує?
- 7.62.** Два тіла з однаковими поглинаючими властивостями розташовані на однаковій відстані від зорі. Одне тіло має форму сфери, інше – форму куба. Яке з них більше нагріється?
- 7.63.** Функція розсіяння показує відношення ефективного перетину розсіяння частинки до її геометричного перетину. Розрахувати коефіцієнт послаблення випромінювання розрахованого на одиницю маси. Відомий розмір пилінки та її густина.
- 7.64.** Астроном виміряв червоне зміщення ліній в спектрі далекої Галактики. Воно виявилось рівним  $z$ . Поклавши, що стала Габбла  $H_0 = 70$  км/(сМпк), визначіть скільки часу йшло світло від цієї Галактики до астронома. Також визначіть цей час для  $z = 0,01; 0,05; 0, 1, 0,2$ .
- 7.65.** Якби вдалось все випромінювання Сонця направити на земну кулю то за який час Світовий океан випарувався б у космос, а вся планета?
- 7.66.** Скільки зір нульової величини можуть замінити світло, що випромінюється зорями від 10-ї до 11-ї величин, якщо їх загальна кількість рівна 546000.
- 7.67.** Оцініть висоту сизигійних припливів (відбуваються під час фази нового або старого Місяця, коли Місяць та Сонце знаходяться на одній лінії з Землею) та квадратурних припливів (коли напрями на Сонце та Місяць утворюють прямий кут).
- 7.68.** Що описує межа Шенберга – Чандрасекара?
- 7.69.** В чому суть неонов-натрієвого циклу? Які зорі він описує?
- 7.70.** В чому суть магній-алюмінієвого циклу? Які зорі він описує?
- 7.71.** Що характеризує радіус сфери Шварцшільда (гравітаційний радіус)?

- 7.72. Що характеризує поверхня нескінченного червоного зміщення?
- 7.73. Яка особливість візуально-подвійних зір?
- 7.74. Яка особливість затемнювано-подвійних зір?
- 7.75. Яка особливість спектрально-подвійних зір?
- 7.76. Які особливості будови тісних подвійних систем?
- 7.77. Які основні характеристики коричневих карликів?
- 7.78. Які основні характеристики цефеїд?
- 7.79. Які основні характеристики лірид?
- 7.80. Які основні характеристики віргінід?
- 7.81. Чим характеризуються пульсуючі змінні зорі?
- 7.82. Чим характеризуються еруптивні змінні зорі?
- 7.83. Чим характеризуються нові та новоподібні зорі?
- 7.84. Чим характеризуються наднові зорі?
- 7.85. Чим характеризуються пульсари?
- 7.86. Чим характеризуються рентгенівські змінні зорі? Яку роль відіграє дифузна матерія в Галактиці?
- 7.87. Які основні характеристики туманностей?
- 7.88. Яку роль відіграють магнітні поля у міжзоряному середовищі?
- 7.89. Поясніть природу космічних променів.
- 7.90. Що характеризує червоне зміщення в спектрах галактик?
- 7.91. Які основні характеристики ядер Галактик?
- 7.92. Які основні характеристики радіогалактик?
- 7.93. Які основні характеристики ядер квазарів?
- 7.94. Яким законом описується розподіл галактик у просторі?
- 7.95. Що характеризує джинсова довжина хвилі?
- 7.96. Як проходить процес зародження зір?
- 7.97. Які особливості еволюції зір малих мас?
- 7.98. Як утворюються планетарні туманності?
- 7.99. Як утворюються білі карлики?
- 7.100. Які особливості еволюції зір великих мас?
- 7.101. В чому суть процесу нейтронізації зорі?
- 7.102. Опишіть основні фізико-хімічні процеси в мантії Землі.
- 7.103. Яку структуру має пояс астероїдів, що розташований між орбітою Марса та орбітою Юпітера.
- 7.104. Чому з Вашої точки зору на Ганімеді багато води?
- 7.105. Які основні астрономічні та астрофізичні характеристики подвійної системи Плутон-Харон?
- 7.106. Опишіть основні астрофізичні характеристики хмари Оорта.
- 7.107. Знайдіть граничне стиснення (відношення полярного та екваторіального радіусів) обертаючоїся зірки. Вважати, що поверхня зорі співпадає з рівністю потенціалів гравітаційних та центробіжних сил, а маса зосереджена в центрі.
- 7.108. Атом падає на поверхню зорі з параболічною швидкістю вздовж напрямку зору випромінює квант світла, який прямує на «нескінченність» в напрямі спостерігача. Визначити зсув частоти фотона, червоне зміщення за рахунок ефекту Доплера та гравітації. Параболічна швидкість на поверхні зорі вважається відомою.
- 7.109. Чи є вулканічна активність на Місяці?
- 7.110. В чому суть явища затримання частинок сонячного вітру Меркурієм?
- 7.111. Які астрофізичні характеристики поясу Койпера?
- 7.112. Чим відрізняються оптичні Галактики та радіогалактики з точки зору протікання фізико-хімічних процесів?
- 7.113. Як відрізняються зорі основної послідовності діаграми Герцшпрунга-Рессела та кулястих скупчень?

**7.114.** Рентгенівські (X) барстери це об'єкти, в яких поряд зі стаціонарним X-випромінюванням спостерігаються епізодичні спалахи більш довгохвильового X-випромінювання. На Рис. 7.2 приведений запис випромінювання барстера МХВ 1733-75. Вважається що явище обумовлене акрецією речовини на нейтронну зорю, що має відносно слабе магнітне поле. Постійне X-випромінювання в цій моделі це результат виділення енергії акреційної речовини, а спалахи – результат термоядерного горіння речовини, що накопичилась на поверхні нейтронної зорі. Чому рівне відношення енергії, що виділяється барстером між спалахами, якщо покласти, що при вибуху згорає вся накопичена речовина.

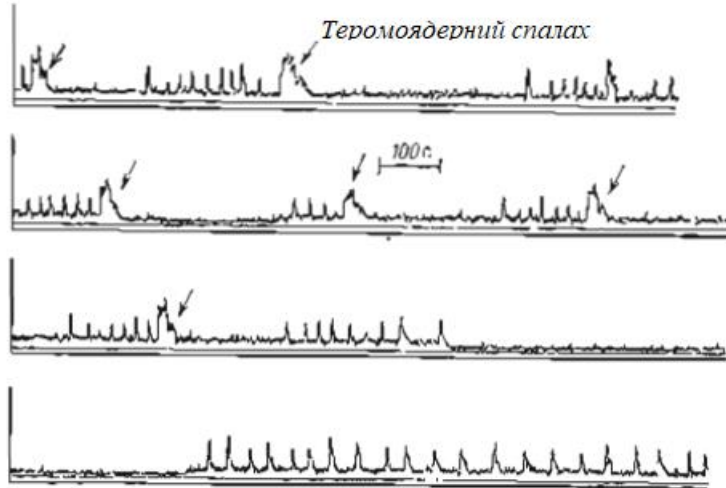


Рис. 7.2.

**7.115.** Це явище може виникати в результаті акреції речовини на нейтронну зірку, що має відносно слабе магнітне поле. Постійне магнітне поле в цій моделі це виділення енергії акреційної речовини, а спалахи – результат термоядерного горіння речовини накопиченої на поверхні зорі. Чому рівне відношення енергії, що виділяється барстером між спалахами, до енергії спалаху, якщо покласти, що при вибуху згорає вся речовина.

**7.116.** Вигляд кривих блиску 38 наднових типу I наведена на Рис. 7.3. Будемо вважати, що джерелом енергії наднової типу I є  $\beta^+$  – розпад радіоактивного ізотопу  $^{56}\text{Ni}$ , що утворюється при вибуху. Яка кількість цього ізотопу достатня для пояснення світимості наднової першого типу в максимумі блиску, що рівний  $5 \cdot 10^{43}$  ерг/с? Період піврозпаду  $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co}$   $\tau_{1/2} = 6,1$  діб, енергія розпаду  $\varepsilon = 1,78$  MeV.

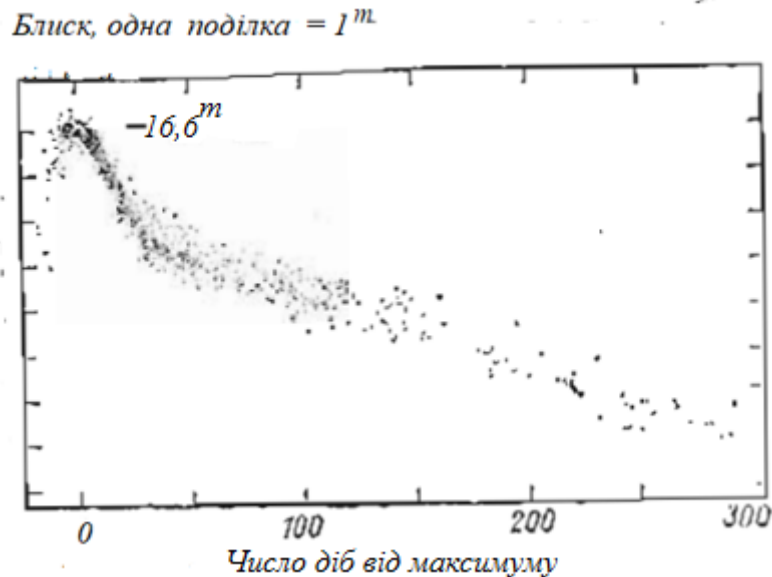


Рис. 7.3.

**7.117.** Яка кількість цього ізотопу потрібна для пояснення світимості наднової типу I в максимумі блиску, що складає  $\sim 5 \cdot 10^{36}$  Вт? Період піврозпаду  $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co}$  6,1 доби, енергія розпаду 1,78 MeV.

**7.118.** При спостереженні міжзоряного водню в лінії 21 см, як правило, випадають в напрямку центр – антицентр. Чим це обумовлено?

**7.119.** Чи можна міжзоряний пил та газ вважати однокомпонентною системою а газодинамічному наближенні? Порівняйте довжину вільного пробігу частинки з характерними розмірами газового шару.

**7.120.** Радіопульсари втрачають частину енергії як випромінювання магнітодипольних хвиль на частоті обертання. Чи можна спостерігати це випромінювання для пульсарів з частотою обертання більше 0.01 с?

**Література та джерела**

1. Астрономічний енциклопедичний словник. Львів: ГАО НАНУ та ЛНУ ім. І.Франка, 2003. 548 с.
2. Андрієвський С.М., Кузьменков С. Г., Захожай .В. А., Климишин І.А. Загальної астрономія. Харків: ПроимАрт, 2019. 524 с.
3. Андрієвський С.М., Климишин І.А. Курс загальної астрономії. Одеса: Астропринт, 2007. 468 с.
4. Климишин І.А., Гарбузов Г.О., Мурніков Б.О., Кабанова Т.І. Астрономія. Одеса: Астропринт, 2012. 352 с.
5. Климишин І.А. Астрономія. Львів: Світ, 1994. 432 с.
6. Климишин І. А. Історія астрономії. Івано-Франківськ: Гостинець, 2006. – 652 с.
7. Мохун С. Астрономія. Лабораторний практикум. Тернопіль: ТНПУ, 2013. 297 с.
8. Новосядлий Б. С. Структура й еволюція Всесвіту. Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2019. 120 с.
9. Чепрасов В. Г. Завдання, запитання і задачі з астрономії: Посібник для вчителів. Київ: Радянська школа, 1984. 144 с.
10. Lightman A. P., Press W. Y., Price R. H., Teukolsky S. A. Problem Book in Relativity and Gravitation. Princeton: University Press, 1975. 616 p.
11. Шигорін П. П. Вибрані питання астрономії та астрофізики. Луцьк, 2020. 136 ст.
12. Бурій А. Р. Астрономічна олімпіада: базові завдання, Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, 2018. 207 с.
13. Aniket S. Problems and Solutions: International Olympiads on Astronomy and Astrophysics, Published by Universities Press (India), 2015. 304 p.
14. III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії (Харківська область). <http://ru.astron.kharkov.ua/olympiad/school/index.html>
15. Bahcal J. N. Neutrino astrophysics. Cambridge University Press, 1989. 567 p. Бакал Дж. Нейтринна астрофізика. Москва: Мир, 1993. 624 с.
16. Трохимчук П. П. Механіка суцільних середовищ. Луцьк: Вежа-Друк, 2018. 156 с.
17. Trokhimchuck P. P. Theories of Everything: Past, Present, Future. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2021. 260 p.
18. Боярченко І. Х., Гулак Ю. К., Роздимаха Г. С., Сандаков С. В. Астрономія. Київ: Вища школа, 1976. 319 с.
19. Barrow J., Tipler F. The anthropic cosmological principle. Oxford: University Press, 1996. 676 p.
20. Климишин І. А. Календар і хронологія. Івано-Франківськ: Гостинець, 2002. 232с.
21. Arny Thomas T. Explorations. An introduction to astronomy. New York a. o.: McGraw–Hill Companies, 1998. 580 p.
22. Астрономічний енциклопедичний словник. Львів: ЛНУ ім. І.Франка, 2003. 548 с.
23. Новак О. С. Збірник задач і запитань з астрономії для загальноосвітніх навчальних закладів. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. 304 с.
24. Dole S. H. Habitable Planets for Man. New York: American Elsevier, 1970. 158 p.
25. Dole S. H., Asimov A. Planets for Man. New York: Random House, 1964. 242 p.
26. Трохимчук П. П. Механіка суцільних середовищ [Луцьк : Вежа-Друк, 2018. – 166 с.
27. Трохимчук П. П. Теоретична фізика. Луцьк: Вежа-Друк, 2017. 256 с.
28. Trokhimchuck P. P. Polymetrical Analysis. History, Concepts, Applications. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2018. 280 p.
29. Trokhimchuck P. P. Theories of Everything: Past, Present, Future. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2021. 260 p.
30. Одеська астрономічна обсерваторія: [www.astro-observ.odessa.ua/](http://www.astro-observ.odessa.ua/).

31. Головна астрономічна обсерваторія НАНУ (Київ, Голосієво): [mao.kiev.ua/](http://mao.kiev.ua/).
32. Миколаївська Астрономічна Обсерваторія: [www.nao.nikolaev.ua/](http://www.nao.nikolaev.ua/).
33. Інститут астрофізики товариства Макса Планка (МРА, ФРН, Гархінг): [www.mpa-garching.mpg.de/](http://www.mpa-garching.mpg.de/).
34. Barrow J. *New Theories of Everything. The Quest for Ultimate Explanation*. Oxford: University press, 2008. 274 p.
35. Hawking S. *The Theory of Everything*. Mumbai: Jaico Publisher, 2014. 140 p.
36. Sciama D. W. *Modern Cosmology*. Cambridge: University Press, 1982. 214 p.
37. Sciama D. W. *Modern Cosmology and the Dark Matter Problem (Cambridge Lecture Notes in Physics, Series Number 3)*. Cambridge: University Press, 1993. 216 p.
38. Dark energy. Wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Dark\\_energy#:~:text=In%20physical%20cosmology%20and%20astronomy,accelerating%20expansion%20of%20the%20universe](https://en.wikipedia.org/wiki/Dark_energy#:~:text=In%20physical%20cosmology%20and%20astronomy,accelerating%20expansion%20of%20the%20universe).
39. Linde A.D. *Particles physics and inflationary cosmology*. Chur: Harwood, 1990. 380 p.
40. Пришляк М. П., Кравцова О. М. *Астрономія: Підручник для 11 класу ЗЗСО, Харків: Ранок, 2019. 272 с.*
41. Камін О. Л., Камін О. О. *Космічна Одіссея (цікава олімпіада з астрономії, фізики Космосу, фізики Землі, фізики польоту)*. Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2016. 224 с.

## Зміст

Передмова	3
Вступ	4
1. Практична астрономія.	5
2. Небесна механіка.	22
3. Змішані астрономічні задачі.	36
4. Практична астрофізика.	47
5. Загальна астрофізика.	60
6. Основи космології.	73
7. Змішані астрофізичні задачі.	86
Література та джерела	101



Навчальне видання

**Трохимчук Петро Павлович  
Шигорін Павло Павлович**

## **Задачі та вправи з астрономії та астрофізики**

*Навчальний посібник*

Формат 60x84 1/16. Обсяг 6,04 ум. друк. арк., 5,81 обл.-вид. арк.  
Наклад 300 пр. Зам. 42. Виготовлювач – Вежа-Друк  
(м. Луцьк, вул. Шопена, 12, тел. 38 066 936 25 49).  
Свідоцтво Держ. комітету телебачення та радіомовлення України  
ДК № 4607 від 30.08.2013 р.



ISBN 978-966-940-550-0



9 789669 405500 >