ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ КВАЗІКРИСТАЛІЧНИХ ТІЛ

Пастернак Ярослав Михайлович
Волинський національний університет імені Лесі Українки, iaroslav.pasternak@vnu.edu.ua
Козелко Віталій Ярославович
Волинський національний університет імені Лесі Українки, vitalii.kozelko@vnu.edu.ua

На даний час, поряд із традиційними, у сучасних аерокосмічному та точному машинобудуванні усе більше використовуються новітні матеріали, що володіють непересічними властивостями. До таких, зокрема, відносяться квазікристали, що мають впорядковану, проте неперіодичну структуру [1]. Завдяки таким особливостям вони мають істотно відмінну від ізотропних чи анізотропних матеріалів термомеханічну поведінку. Для математичного опису їхнього термопружного деформування будують спеціальні моделі [1], що враховують внутрішню взаємодію у квазікристалах фононного та фазонного полів.

У двовимірних задачах для розв’язування задач термопружності квазікристалічних тіл ефективним виявився комплексний метод інтегральних рівнянь, що дав можливість отримати аналітичні розв’язки низки задач [2]. У цьому дослідженні метод інтегральних рівнянь поширено на просторові задачі термопружності квазікристалів.

Як і у [2] конститутивні співвідношення просторових задач теплопровідності та термопружності квазікристалічних тіл записано у такій узагальненій формі:

$$h_i = -k_{ij}\theta_{,j}\,,\quad \tilde{\sigma}_{Ij} = \tilde{C}_{IjKm}\tilde{u}_{K,m} - \tilde{\beta}_{Ij}\theta\,, \tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij},\, \tilde{\sigma}_{(i+3)j} = H_{ij},\, \tilde{u}_i = u_i,\, \tilde{u}_{i+3} = w_i;\\
&\tilde{C}_{ijkm} = C_{ijkm},\, \tilde{C}_{ij(k+3)m} = R_{ijkm},\\
&\tilde{C}_{(i+3)jkm} = R_{kmij},\, \tilde{C}_{(i+3)j(k+3)m} = K_{ijkm}\\
&\tilde{\beta}_{ij} = C_{ijkm}\alpha_{km} + R_{ijkm}\alpha'_{km}\\
&\tilde{\beta}_{(i+3)j} = R_{kmij}\alpha_{km} + K_{ijkm}\alpha'_{km} \quad \left(i,j,k,m = 1,2,3\right),
\end{aligned} \tag{2}$$

θ – зміна температури порівняно з відліковою; k_{ij} – коефіцієнти теплопровідності, причому $k_{ij} = k_{ji}$;. σ_{ij} – фононні напруження; H_{ij} – фазонні напруження; $\varepsilon_{ij} = \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)/2$ – компоненти фононного тензора деформацій; $w_{i,j}$ – фазонні деформації; C_{ijkm} – компоненти тензора фоннонних пружних сталих; K_{ijkm} – компоненти тензора фазонних пружних сталих; R_{ijkm} та $R'_{ijkm} = R_{kmij}$ – компоненти тензорів фононно-фазонної взаємодії; α_{ij}, α'_{ij} – фононна та фазонна складові коефіцієнтів лінійного теплового розширення. Причому отриманий розширений тензор $\tilde{C}_{IjKm}$ фононно-фазонних сталих є симетричним:

$$\tilde{C}_{IjKm} = \tilde{C}_{KmIj}\,. \tag{3}$$

У (1), (3) індекси великими літерами змінюються від 1 до 6, тоді як індекси малими літерами змінюються від 1 до 3.

Рівняння балансу тепла та рівноваги теж подано в узагальненому вигляді

$$h_{i,i} - f_h = 0\,,\quad \tilde{\sigma}_{Ij,j} = -\tilde{f}_I\,, \tag{4}$$

де f_h – густина розподілених за об'ємом тіла джерел (стоків) тепла; $\tilde{f}_i$, $\tilde{f}_{i+3}$ – відповідно компоненти векторів фононних та фазонних складових масових сил.

Підставивши (4) в (3) отримано

$$k_{ij}\theta_{,ij} = -f_h, \quad \tilde{C}_{IjKm}\tilde{u}_{K,jm} - \tilde{\beta}_{Ij}\theta_{,j} = -\tilde{f}_I. \tag{5}$$

Із використанням узагальнень формул Ґріна та узагальнених функцій на основі співвідношень (1), (5) отримано такі інтегральні формули теплопровідності та термопружності квазікристалічних тіл:

$$\theta(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial\mathbf{B}} \left(\Theta^*(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)h_n(\mathbf{x}) - \theta(\mathbf{x})H^*(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\right)dS(\mathbf{x}) - \\ - \iiint_{\mathbf{B}} \Theta^*(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\, f_h(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}), \tag{6}$$

$$\tilde{u}_I(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial\mathbf{B}} \left(U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\tilde{t}_J(\mathbf{x}) - T_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\tilde{u}_J(\mathbf{x})\right)dS(\mathbf{x}) \\ + \iint_{\partial\mathbf{B}} \left[R_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\theta(\mathbf{x}) + V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)h_n(\mathbf{x})\right]dS(\mathbf{x}) \\ + \iiint_{\mathbf{B}} U_{IJ}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,\tilde{f}_J(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}) - \iiint_{\mathbf{B}} V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\,f_h(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}), \tag{7}$$

де $\partial\mathbf{B}$ – межа області $\mathbf{B}$; n_p – компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\mathbf{B}$; $h_n = h_i n_i$ – нормальна до поверхні складова вектора теплового потоку; $\tilde{t}_i = \tilde{\sigma}_{ij}n_j$ – розширений вектор напружень на поверхні $\partial\mathbf{B}$ області $\mathbf{B}$; $\Theta^*(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ – фундаментальний розв'язок задачі теплопровідності (3), (4) за дії у точці $\mathbf{x}_0$ зосередженого одиничного стоку тепла $f_h = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$, що задовольняє рівняння

$$k_{ij}\Theta^*_{,ij}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0); \tag{8}$$

$U_{PK}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ – фундаментальний розв'язок задачі пружності квазікристала за дії у точці ξ одиничних зосереджених сил $\tilde{f}_I^P = \delta_{PI}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$, що згідно (3), (4) задовольняє таке рівняння:

$$\tilde{C}_{IjKm}U_{PK,jm}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = -\delta_{PI}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0); \tag{9}$$

$V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$ – фундаментальним розв'язком термопружності квазікристалів, що відповідає переміщенням безмежного середовища, зумовлених дією зосередженого джерела тепла одиничної інтенсивності, прикладеного у точці $\mathbf{x}_0$, і відповідно до (5) та (8) задовольняє таке диференціальне рівняння:

$$\tilde{C}_{IjKm}V_{K,jm}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) + \tilde{\beta}_{Ij}\Theta^*_{,j}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = 0, \tag{10}$$

причому $V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = -V_I(\mathbf{x}_0,\mathbf{x})$. Також при побудові (7) використано співвідношення

$$k_{pq}V_{I,pq}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) = \tilde{\beta}_{Jk}U_{IJ,k}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0). \tag{11}$$

За допомогою інтегрального перетворення Радона отримано вирази для усіх ядер інтегральних рівнянь у формі інтегралів по поверхні півсфери (тільки ядро $V_I(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)$) чи одиничного кола із виділеною особливістю. Запропоновано швидку і високоточну числову схему обчислення цих ядер.

На основі співвідношень (6) та (7) отримано інтегральні рівняння, що дають можливість просторові розв'язувати крайові задачі термопружності для квазікристалічних тіл.

Список літератури

1. Fan T.-Y. *Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and Its Applications,* Second Edition. Springer, 2016. https://doi.org/10.1007/978-981-10-1984-5
2. Кушнір Р., Пастернак Я., Сулим Г. Розширений формалізм Стро для розв'язування плоских задач теорії термопружності квазікристалічних середовищ. *XXIII МНТК "Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта"*, Київ, 2023. http://conf.mmi.kpi.ua/proc/article/view/277903.