

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ**

**Кафедра експериментальної фізики, інформаційних та освітніх технологій**

На правах рукопису

**Чикалюк Роман Анатолійович**

Спеціальність: 014 «Середня освіта. Фізика»  
Освітньо-професійна програма «Фізика»  
Робота на здобуття освітнього ступеня «магістр»

**ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИВЧЕННЯ КОЛИВАНЬ НА ПРИКЛАДІ  
МЕХАНІЧНИХ МАЯТНИКОВИХ СИСТЕМ.**

Науковий керівник:

**Шаварова Ганна Петрівна**, кандидат фізико-  
математичних наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНО ДО ЗАХИСТУ

Протокол № 4 \_\_\_\_\_  
засідання кафедри ЕФІОТ \_\_\_\_\_  
від 20 листопада 2023 р.

Завідувач кафедри  
(\_\_\_\_\_) Галян В.В. \_\_\_\_\_  
(підпис) ПБ

**ЛУЦЬК – 2023**

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1 КОЛИВАННЯ ТА ЇХ ВИДИ.....	6
1.1 Класифікація коливань.....	6
1.2. Незагасні гармонічні коливання систем з одним ступенем вільності.....	8
1.2.1. Математичний та пружинний маятники.....	8
1.2.2. Фізичний маятник.....	12
1.3. Додавання коливань.....	15
1.3.1. Додавання коливань одного напрямку, однакової частоти. Метод векторних діаграм.....	15
1.3.2. Додавання взаємно перпендикулярних коливань різної частоти.....	17
1.4. Аналіз руху систем з одним ступенем вільності методом фазової площини.....	22
1.4.1. Фазовий портрет коливальної системи.....	22
1.4.2. Фазовий портрет гармонічних коливань.....	22
1.4.3. Фазовий портрет математичного маятника з довільними кутами відхилення.....	24
1.5. Рівняння негармонічних коливань математичного маятника.....	27
1.6. Вільні коливання в дисипативних системах із в'язким тертям. ....	30
1.6.1. Рівняння згасних коливань та його розв'язки.....	30
1.6.2. Добротність коливальної системи.....	34
1.6.3. Критичний та аперіодичний режими руху.....	35
1.7. Згасання коливань у системах із сухим тертям.....	37
РОЗДІЛ 2 ДЕМОНСТРАЦІЙНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ МАЯТНИКОВИХ СИСТЕМ.....	40
2.1. Хвильовий маятник.....	40
2.2. Вільні коливання в системах з багатьма ступенями вільності.....	44

2.2.1. Суперпозиція двох взаємно перпендикулярних незалежних коливань..	44
2.2.2. Візуалізація коливань двох послідовно з'єднаних математичних маятників.....	46
2.2.3. Рух двох зв'язаних консервативних осциляторів.....	49
2.2.3. Подвійний фізичний маятник Ротта.....	51
ВИСНОВКИ.....	54
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	55

## ВСТУП

Маятник є одним із найдавніших фізичних приладів. За допомогою крутильних маятників було відкрито закони гравітаційної та електричної взаємодії, виміряно тиск світла, виконано безліч інших фізичних експериментів. Останнім часом реалізована низка експериментів для виявлення гравітаційних хвиль. У проєкті LIGO інтерференційним методом вимірювалось зміщення пробних мас, підвішених на сталевих струнах у вакуумних камерах. Спеціальне обладнання захищало такий «маятник» від будь-яких вібрацій, у т.ч. сейсмічних, та теплових деформацій. Джерелом збурень, яке не можна усунути у механічних маятникових системах, залишається хаотичний тепловий рух молекул у нитці підвісу і підвішеному тілі. Проте амплітуду коливань, викликаних тепловим рухом, можна зменшити, збільшуючи добротність маятника.

Таким чином, маятник був і залишається важливим науковим інструментом для вивчення не тільки окремих фізичних процесів, але і фундаментальних властивостей матерії.

З іншого боку, за допомогою маятників можна продемонструвати і дослідити різні види коливань: з одним, двома чи кількома ступенями вільності; лінійні і нелінійні; консервативні і дисипативні. До того ж рух різних видів маятників, наприклад подвійного маятника, хвильового маятника – видовищний і часто несподіваний, що спонукає учнів вивчати і пояснювати його, і викликає інтерес до фізики в цілому.

Усі типи коливань, незалежно від їх природи (механічні, електричні, оптичні, коливання атомів та молекул, біологічних систем), описуються однаковими законами. **Актуальність теми нашого дослідження** обумовлена тим, що засвоїти основні поняття коливального руху і пояснити базові закономірності коливальних процесів різної фізичної природи можна за допомогою аналізу руху маятникових систем.

**Метою дослідження** є підібрати і описати цікаві, доступні для

відтворення в умовах фізичної лабораторії прояви законів коливального руху.

**Об'єкт дослідження:** активізація пізнавальної діяльності учнів при вивченні коливань.

**Предметом дослідження** є формування понять, що описують коливальний рух, у процесі аналізу демонстрацій маятникових систем.

**Завдання роботи:**

- опрацювати теоретичний матеріал та провести огляд літератури та відеоматеріалів з теми дослідження;
- підібрати демонстрації маятникових систем, які відображають різні види коливань (лінійні, нелінійні, консервативні, дисипативні, вимушені, з різною кількістю ступенів вільності) і проаналізувати їх закономірності;
- провести теоретичні розрахунки та описати особливості виготовлення хвильового маятника;
- зробити висновки щодо ефективності засвоєння основ теорії коливань через практичне застосування основних її понять та емоційне сприйняття цікавих експериментів.

**Практичне значення одержаних результатів:** результати дослідження можуть бути використані на уроках фізики у школі, фізичних гуртках, закладах позашкільної освіти для поглибленого вивчення законів коливань, а також на наукових пікніках та у дитячих таборах для заохочення дітей до вивчення фізики.

## РОЗДІЛ 1

### КОЛИВАННЯ ТА ЇХ ВИДИ

Коливання - це процес, який повторюється точно або приблизно багато разів за час спостереження. Приклади таких процесів легко знайти в природі та техніці. Коливальні процеси можуть мати різну фізичну природу. Особливо важливими видами коливань є механічні та електромагнітні коливання. Хвилі – це поширення коливань у просторі. Крім уже згаданих механічних та електромагнітних, існують хвилі матерії та нещодавно відкриті гравітаційні хвилі [19].

Особливу роль відіграють гармонічні коливання, оскільки будь-який складний коливальний процес, математично описаний, можна розглядати як суму певної кількості простих гармонічних коливань з відповідними характеристиками (розклад у ряд Фур'є). А електромагнітні хвилі, які випромінюються атомами при переходах з вищих енергетичних рівнів на нижчі (хвильові цуги), можна представити суперпозицією гармонічних коливань з різними амплітудами, фазами та частотами певному інтервалі (розклад за допомогою інтеграла Фур'є) [5].

#### 1.1. Класифікація коливань

Навколишній світ повний об'єктів, що рухаються. Надзвичайно важливим класом рухів є такі, в яких об'єкт здійснює фінітний (обмежений) рух поблизу певного положення рівноваги. Зрозуміло, під рухом ми розуміємо не лише його найпростішу форму — зміну положення об'єкта у просторі, а й будь-яку зміну в часі властивостей матерії, розподіленої у просторі. Коливаннями називаються процеси, що повторюються (або приблизно повторюються) у часі.

Будь-яка система, коливання якої ми вивчатимемо, може бути охарактеризована деякою фізичною величиною, відхилення якої  $f(x, y, z, t)$  від рівноважного значення залежить від координат та часу. У випадку механічних систем об'єктами, що рухаються, є точкові маси або фізично малі елементи

обсягу матеріального середовища (рідини, газу, твердого тіла і т.д.). Тому при описі коливань таких систем функція  $f(x, y, z, t)$  може характеризувати зміщення (лінійне або кутове), швидкість, прискорення, деформацію, кінетичну або потенційну енергію, тиск тощо [31].

При коливаннях в електричних системах величиною  $f$ , що коливається, може бути струм у колі, заряд на пластинах конденсатора коливального контуру, напруга на котушці індуктивності. У разі відкритого коливального контуру в навколишньому просторі коливаються електричне  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  та магнітне  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$  поля.

Коливання можуть бути результатом короточасного зовнішнього збудження. Тоді вони називаються вільними, чи власними. Такі коливання відбуваються на частотах, зумовлених виключно конструктивними особливостями системи — власних частотах, і продовжуються протягом певного характерного часу — часу згасання, що залежить від дисипації енергії у системі [30].

Для підтримки незагасних коливань до системи повинна безперервно підводитися енергія від зовнішнього джерела. У цьому випадку коливання будуть вимушеними. Залежно від способу підтримки коливань, що не затухають, розрізняють вимушені коливання під дією періодичної сили, автоколивання, параметричні коливання, релаксаційні коливання і т.д. [38]/

У своїй книзі «Коливання та хвилі» [1] І.О. Анісімов дає такі варіанти класифікації коливань.

1. За кількістю ступенів вільності:

- з *одним* ступенем вільності;
- з *багатьма* ступенями вільності (виникає обмін енергією);
- з *нескінченною кількістю* ступенів вільності (з розподіленими параметрами).

2. За енергетичними характеристиками:

- *консервативні* та *дисипативні* (чи зберігається повна енергія систем)

- *автономні та неавтономні* (чи наша система взаємодіє з іншими системами)
- *замкнені та відкриті* (чи система обмінюється речовиною та енергією з іншими системами).

3. За характером диференціального рівняння:

- *лінійні та нелінійні* (чи залежать параметри системи від її руху)

До нелінійних належать також:

- *параметричні системи* (якийсь параметр змінюється за наперед заданим законом під дією зовнішньої сили, незалежно від руху самої системи - маятник із змінною довжиною підвісу)
- *автоколивні системи* (системи, в яких за відсутності зовнішнього періодичного впливу можуть виникати і встановлюватись періодичні коливання - механічний годинник)

## **1.2 Незагасні гармонічні коливання систем з одним ступенем вільності**

Якщо положення системи може бути описано одним єдиним параметром  $f(t)$ , що залежить від часу, то така система має один ступінь вільності.

**1.2.1. Математичний та пружинний маятники.** Прикладами систем з одним ступенем вільності є математичний та пружинний маятники, зображені на рис. 1.1, за умови, що перший з них рухається в одній площині, а другий по прямій.

Для математичного маятника  $f(t)$  може характеризувати або кутове зміщення ( $f(t) = \alpha(t)$ ), або лінійне зміщення вздовж траєкторії ( $f(t) = s(t)$ ) точкової маси  $m$  від положення рівноваги. Для пружинного маятника  $f(t) = s(t)$ , де  $s(t)$  — зміщення маси  $m$  від її рівноважного положення, зображеного пунктиром.

Рух таких і подібних до них систем можна описати на основі другого закону Ньютона:



$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.1)$$

Якщо знехтувати спочатку силами опору (надалі ми врахуємо їх дію), то на масу  $m$  математичного маятника діятиме результуюча сила  $\mathbf{F} = \mathbf{N} + m\mathbf{g}$  ( $\mathbf{N}$  — сила натягу нитки), спрямована, взагалі кажучи, під кутом до траєкторії, а на масу  $m$  пружинного маятника, що лежить на гладкій горизонтальній поверхні — горизонтальна сила  $\mathbf{F}$ , яка є функцією зміщення  $s$  від положення рівноваги.

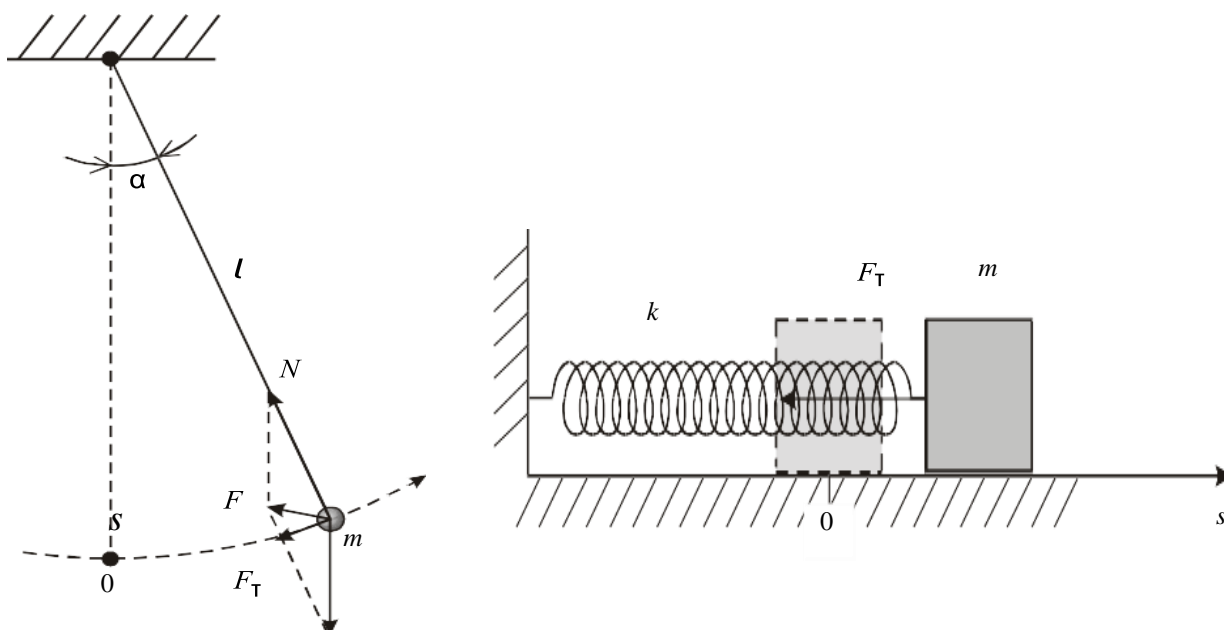


Рис. 1.1. Коливальні системи з одним ступенем вільності: математичний та пружинний маятники

Оскільки зміщення  $s(t)$  у разі математичного маятника визначається тангенціальним прискоренням, то рівняння (1.1) для обох маятників запишеться у вигляді

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(s) = -mg \sin \frac{s}{\ell}; \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(s), \quad (1.2)$$

де  $\ell$  - довжина нитки.

У першому рівнянні використана проекція  $F_\tau(s)$  результуючої сили  $\mathbf{F}$  на напрямок швидкості у вигляді:

$$F_{\tau} = -mg \sin \alpha = -mg \sin(s/l).$$

У прикладах, що розглядаються, повертаюча сила  $F_{\tau}(s)$  є, взагалі кажучи, нелінійною функцією зміщення  $s$ . Тому точний розв'язок рівнянь (1.2), які є нелінійними, отримати не вдається. Якщо вважати зміщення малими порівняно з довжиною нитки чи довжиною недеформованої пружини, то а таких припущень повертаюча сила буде пропорційна зміщенню:

$$F_{\tau}(s) = -mg \frac{s}{\ell}; \quad F_{\tau}(s) = -ks. \quad (1.3)$$

Вираз ліворуч записаний за умови  $\sin(s/l) \approx s/l$  а праворуч — з використанням закону Гука, справедливого за малих деформацій пружини з жорсткістю  $k$ .

З урахуванням (1.3) рівняння (1.2) набудуть однакового вигляду:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} s; \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{k}{m} s. \quad (1.4)$$

Відрізняються лише коефіцієнти у правих частинах цих рівнянь, які чисельно рівні відношенню повертаючої сили при одиничному зміщенні до маси тіла, що коливається і мають розмірність  $[c^{-2}]$ . Якщо використовувати позначення

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (1.5)$$

то рівняння (1.4) набудуть вигляду рівняння незатухаючих гармонічних коливань або рівняння гармонійного осцилятора:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega_0^2 s. \quad (1.6)$$

Розв'язком рівняння (1.6) є сімейство гармонічних функцій

$$s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.7)$$

у чому легко переконатися, двічі продиференціювавши функцію  $s(t)$  за часом:

$$\frac{ds}{dt} = s_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -s_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Зауважимо, що якщо рівняння руху зводиться до вигляду (1.6), то його розв'язками є гармонічні функції (1.7) з частотою  $\omega_0$ , що дорівнює кореню квадратному з коефіцієнта при  $s$ .

Значення цих гармонічних функцій у початковий момент часу (при  $t = 0$ ) визначаються початковою фазою  $\varphi_0$  та амплітудою коливань  $s_0$ . У однієї і тієї ж системи ці значення можуть бути різними при різних способах збудження коливань.

Щоб збудити власні коливання, треба спочатку (при  $t = 0$ ) або відхилити тіло (задати початкове зміщення  $s(0)$ ), або штовхнути його (задати початкову швидкість  $\dot{s}(0) = v(0)$ ), або зробити і те, й інше одночасно. Знання початкових умов (зміщення та швидкості) дозволяє визначити амплітуду  $s_0$  та початкову фазу коливань з очевидних рівнянь:

$$s(0) = s(t)|_{t=0} = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)|_{t=0} = s_0 \sin \varphi_0; \quad (1.8)$$

$$v(0) = \frac{ds}{dt}|_{t=0} = s_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)|_{t=0} = s_0 \omega_0 \cos \varphi_0. \quad (1.9)$$

Розв'язок цих рівнянь має вигляд:

$$s_0 = \sqrt{s^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega_0^2}}; \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\omega_0 s(0)}{v(0)}. \quad (1.10)$$

Важливо відзначити, що амплітуда коливань  $s_0$ , що дорівнює величині максимального зміщення тіла від положення рівноваги, може перевершувати початкове зміщення  $s(0)$  за наявності початкового поштовху.

Поряд з круговою частотою  $\omega_0$  коливання характеризуються циклічною частотою  $\nu_0 = \omega_0 / 2\pi$ , що дорівнює кількості коливань за одиницю часу, та періодом коливань  $T = 1 / \nu_0$ , що дорівнює тривалості одного коливання.

Період гармонічних коливань (як і частоти  $\omega_0$  і  $\nu_0$ ) не залежить від

початкових умов і дорівнює:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.11)$$

**1.2.2. Фізичний маятник.** Іншим прикладом лінійної системи з одним ступенем вільності є коливання фізичного маятника - тіла довільної форми маси  $m$ , закріпленого на горизонтальній осі  $O'$  так, що його центр мас знаходиться в точці  $O$ , віддаленої від осі на відстань  $a$  [Пушак]. При відхиленні маятника від вертикалі на невеликий кут  $\alpha$  він здійснюватиме вільні гармонійні коливання під дією сили тяжіння, прикладеної до центру мас ( рис 1.2).

Якщо відомий момент інерції тіла  $J$  щодо осі обертання, то рівняння обертального руху запишеться у вигляді.

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M = -mga \sin\alpha. \quad (1.12)$$

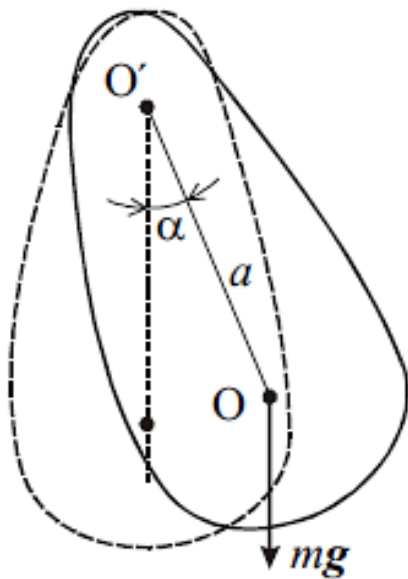


Рис. 1.2. Фізичний маятник [31]

Якщо вважати, що при обертанні, наприклад, проти годинникової стрілки кут  $\alpha$  збільшується, то момент сили тяжіння  $M$  викликає зменшення

цього кута  $i$ , отже, при  $\alpha > 0$  момент  $M < 0$ . Це відображає знак мінус у правій частині (1.12).

Для малих кутів відхилення рівняння (1.12) переходить у рівняння гармонічних коливань

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mga}{J}\alpha, \quad (1.13)$$

з вигляду якого відразу зрозуміло, що частота  $\omega_0$  та період  $T$  коливань відповідно дорівнюють

$$\omega_0^2 = \frac{mga}{J}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (1.14)$$

Порівнюючи вирази для періоду коливань фізичного (1.14) та математичного (1.11) маятників, легко бачити, що обидва періоди збігаються, якщо

$$\frac{J}{ma} = \ell. \quad (1.15)$$

Тому фізичний маятник характеризується зведеною довжиною (1.15), яка дорівнює довжині математичного маятника з таким самим періодом коливань.

Період коливань фізичного маятника (а, отже, та його заведена довжина  $\ell$ ) немонотонно залежить від відстані  $a$ . Це легко помітити, якщо відповідно до теорії Гюйгенса-Штейнера момент інерції  $J$  виразити через момент інерції  $J_0$  відносно до паралельної горизонтальної осі, що проходить через центр мас:

$$J = J_0 + ma^2$$

Тоді період коливань (1.14) дорівнюватиме:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}}. \quad (1.16)$$

Зміна періоду коливань при віддаленні осі обертання від центру мас  $O$  в обидві сторони на відстань  $a$  показана на рис. 1.3.

Легко бачити, що той самий період коливань може реалізуватися щодо будь-якої з чотирьох осей, розташованих попарно по різні боки від центру мас. Можна показати, що сума відстаней  $a_1$  і  $a_2$  дорівнює зведеній довжині фізичного маятника  $l = a_1^+ + a_2^+$ . Внаслідок симетричності графіка

$$l = a_2^+ + a_1^- . \quad (1.17)$$

Ця обставина дозволяє будь-якій осі обертання  $O^+$  визначити сполучену вісь  $O^-$ . Період коливань щодо цих осей однаковий, а відстань між ними дорівнює зведеній довжині фізичного маятника.

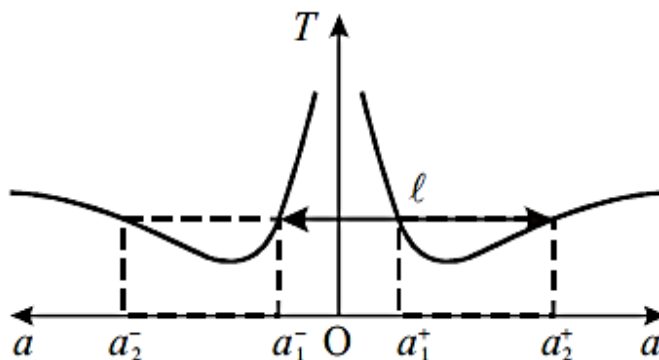


Рис. 1.3 Залежність періоду коливань від відстані  $a$  осі обертання від центра мас  $O$  по обидва боки [24].

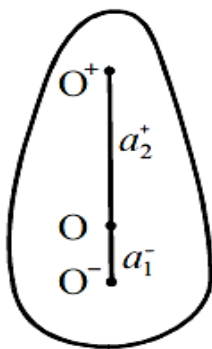


Рис. 1.4 Положення осей  $O^+$  та  $O^-$ , періоди коливань відносно яких будуть однакові [24].

На рис. 1.4 зображено положення осей  $O^+$  та  $O^-$ . Вісь обертання, що знаходиться на відстані  $a_2^-$  від центра мас, за такої форми маятника перебуває поза маятником.

Фізичний маятник застосовується для вимірювання прискорення

вільного падіння. З цією метою вимірюють залежність періоду коливань маятника від положення осі обертання і за цією експериментальною залежністю знаходять відповідно до формули (1.17) зведену довжину.

За визначеною таким чином зведеною довжиною і вимірним з хорошою точністю періодом коливань відносно обох осей можна розрахувати прискорення вільного падіння. Важливо зазначити, що за такого способу не потрібно визначати положення центра мас, що у деяких випадках підвищує точність вимірювань [33].

Таким чином, ми розглянули 3 види маятників, які здійснюють вільні коливання з невеликим відхиленням від положення рівноваги і втратами енергії за час спостереження можна знехтувати. Малі коливання усіх трьох осциляторів описуються одним і тим самим лінійним диференціальним рівнянням:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega_0^2 s,$$

одним з розв'язків якого є гармонічна функція

$$s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Ці маятники є прикладом *лінійного консервативного осцилятора*.

### 1.3. Додавання коливань

#### 1.3.1. Додавання коливань одного напрямку, однакової частоти.

**Метод векторних діаграм.** Гармонічні коливання (1.7) допускають наочну графічну інтерпретацію. Її сенс полягає в тому, що кожному гармонійному коливанню з частотою  $\omega_0$  можна поставити у відповідність вектор, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega_0$ , довжина якого дорівнює амплітуді  $s_0$ , а його початкове положення задається кутом  $\varphi_0$ , збігається з початковою фазою (рис. 1.5).

Вертикальна проекція вектора  $s_0$  змінюється з часом за законом:  $s(t) = s_0 \sin \varphi(t)$ . Миттєве положення вектора  $s_0$  визначається кутом  $\varphi(t)$ , який

називається фазою і дорівнює:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0. \quad (1.18)$$

При кутовій швидкості (кугловій частоті)  $\omega_0$  вектор  $s_0$  виконує:

$$v_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

обертів (циклів) за секунду, а тривалість одного оберту (період) дорівнює відношенню кута  $2\pi$  до кугової швидкості  $\omega_0$ :

$$T = 2\pi / \omega_0.$$

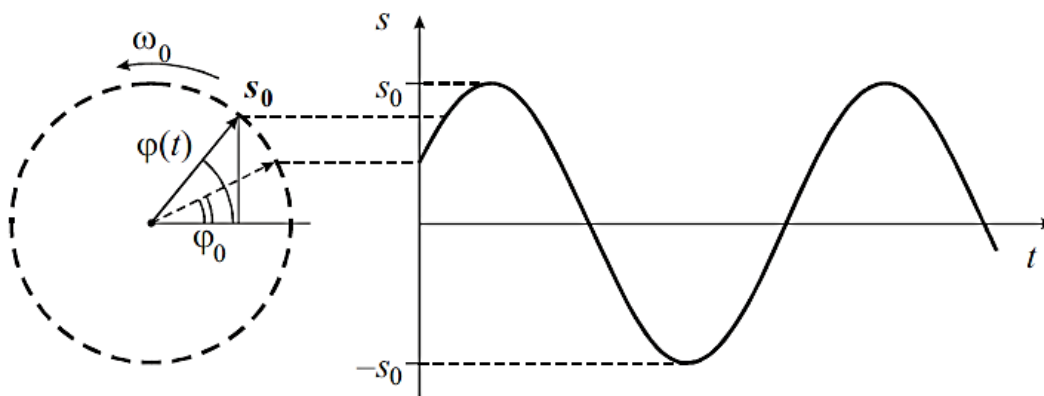


Рис.1.5. Представлення коливання методом векторних діаграм [37]

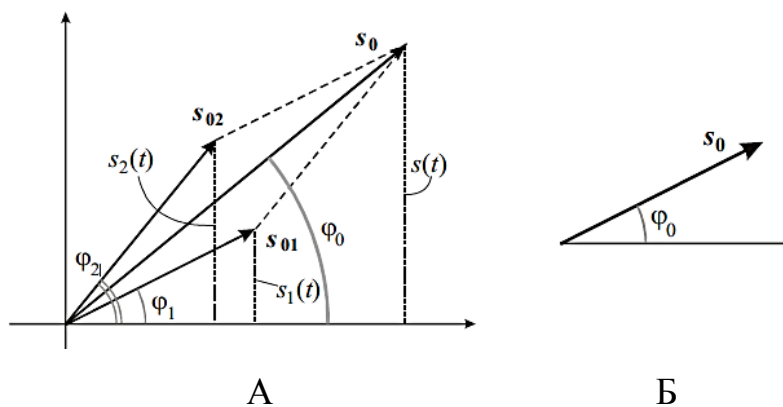


Рис.1.6 А - додавання коливань одного напрямку і частоти векторним методом. Б – амплітуда і фаза результуючого коливання [37]

За допомогою векторних діаграм легко здійснити додавання гармонічних коливань одного напрямку і частоти. Якщо необхідно додати два коливання з однаковими частотами, різними амплітудами і фазами:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) + s_2(t) = s_{01} \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + s_{02} \sin(\omega_0 t + \varphi_2) = \\ &= s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \end{aligned}$$



то амплітуду  $s_0$  та початкову фазу  $\varphi_0$  сумарного коливання  $s(t)$  з тією самою частотою  $\omega_0$  можна легко розрахувати з рис. 1.6а, на якому графічно зображено операцію додавання векторів  $s_0 = s_{01} + s_{02}$  в момент часу  $t = 0$

З рис. 1.6, А видно, що

$$s_0 = \sqrt{(s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2)^2 + (s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2)^2},$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2}{s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2}.$$

Зрозуміло, що вертикальна проекція вектора  $s_0$  також змінюватиметься за гармонічним законом із частотою  $\omega_0$ , оскільки взаємне розташування векторів  $s_{01}$  та  $s_{02}$  не змінюється з часом.

З цієї діаграми наочно видно, що сумарне коливання  $s(t)$  випереджає за фазою коливання  $s_1(t)$  та відстає за фазою від коливання  $s_2(t)$ . Повна фаза для кожного з трьох коливань у довільний момент часу відрізняється від їх початкових фаз одну і на ту саму величину  $\omega_0 t$ , яку при побудові векторних діаграм не враховують (оскільки взаємне розташування векторів  $s_1(t)$  та  $s_2(t)$  не змінюється у часі). При цьому результуюче коливання зображається нерухомим вектором (рис. 1.6, А), а частота коливання передбачається відомою.

### **1.3.2. Додавання взаємно перпендикулярних коливань різної частоти.**

Розглянемо коливальну систему, що складається з точкового тягарця маси  $m$  і чотирьох з'єднаних з ним пружин (рис. 1.7) — ускладнений варіант розглянутого вище пружинного маятника.

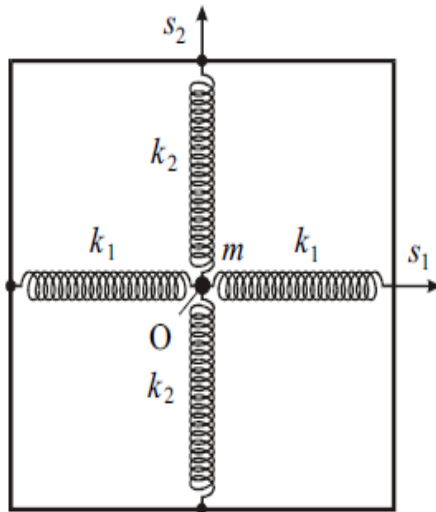


Рис. 1.7 Додавання взаємно перпендикулярних коливань [34].

Якщо маса рухається гладкою горизонтальною поверхнею (на малюнку показаний вигляд згори), то її миттєве розташування описується двома зміщеннями з положення рівноваги — точки  $O$ :  $s_1(t)$  і  $s_2(t)$ .

Така система має два ступені вільності [7, 25]. Будем вважати зміщення малими, щоб, по-перше, виконувався закон Гука, і, по-друге, при зміщенні вздовж напрямку  $s_1$  деформації пружин з жорсткістю  $k_2$  не призводили б до помітного внеску у повертаючу силу  $F_1 = -2k_1s_1$ . Аналогічно, при зміщенні в перпендикулярному напрямку  $s_2$  повертаюча сила  $F_2 = -2k_2s_2$  не має залежати від  $s_1$ . За таких умов коливання у двох взаємно перпендикулярних напрямках відбуваються незалежно одне від одного:

$$s_1(t) = s_{01}\sin(\omega_{01}t + \varphi_1), \quad s_2(t) = s_{02}\sin(\omega_{02}t + \varphi_2). \quad (1.19)$$

Тут власні частоти гармонічних коливань рівні:

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{2k_1}{m}}, \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{2k_2}{m}}, \quad (1.20)$$

амплітуди та початкові фази визначаються початковими умовами.

При збудженні коливань в такій системі при довільному співвідношенні власних частот  $\omega_{01}$  і  $\omega_{02}$  траєкторія тягарця може бути надзвичайно складною. Її можливо проаналізувати, беручи до уваги той факт, що результуючий рух тягарця є суперпозицією двох взаємно перпендикулярних незалежних

коливань.

Розглянемо спочатку рух тягарця, якщо  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$  (жорсткості всіх пружин однакові). Щоб отримати траєкторію руху, виключимо із (1.19) поточний час.

$$\begin{aligned}\frac{s_1}{s_{01}} &= \sin \omega_0 t \cos \varphi_1 + \cos \omega_0 t \sin \varphi_1, \\ \frac{s_2}{s_{02}} &= \sin \omega_0 t \cos \varphi_2 + \cos \omega_0 t \sin \varphi_2.\end{aligned}\tag{1.21}$$

Для цього помножимо перше рівняння (1.21) на  $\cos \omega_2$ , а друге — на  $\cos \omega_1$  та віднімемо друге рівняння від першого. В результаті отримаємо:

$$\frac{s_1}{s_{01}} \cos \varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \cos \varphi_1 = \cos \omega_0 t \sin(\varphi_1 - \varphi_2).\tag{1.22a}$$

Тепер помножимо перше рівняння на  $\sin \varphi_2$ , на друге — на  $\sin \varphi_1$ , віднімемо і одержимо:

$$\frac{s_1}{s_{01}} \sin \varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \sin \varphi_1 = \sin \omega_0 t \sin(\varphi_2 - \varphi_1).\tag{1.22б}$$

Кожне рівняння (1.22) піднесемо до квадрата і додамо їх. Так ми вилучимо час і одержимо траєкторію еліпса:

$$\left(\frac{s_1}{s_{01}}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{s_{02}}\right)^2 - 2 \frac{s_1}{s_{01}} \frac{s_2}{s_{02}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).\tag{1.23}$$

Таким чином, у загальному випадку вантаж здійснюватиме періодичні рухи еліптичною траєкторією [6]. Напрямок руху вздовж траєкторії та орієнтація еліпса щодо осей  $O s_1$  та  $O s_2$  залежать від початкової різниці фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

Усі траєкторії укладені у прямокутник зі сторонами  $2s_{01}$  та  $2s_{02}$ . При  $\Delta\varphi = 0$  і  $\Delta\varphi = \pi$  тягарець рухається вздовж прямої. При  $\Delta\varphi = \pi/2$  та  $\Delta\varphi = 3\pi/2$  півосі еліпса співпадають з  $O s_1$  і  $O s_2$  (при  $s_{01} = s_{02}$  еліпс вироджується в коло). При

початковій різниці фаз  $0 < \Delta\varphi < \pi$  тягарець рухається за годинниковою стрілкою, а при  $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$  — проти годинникової стрілки.

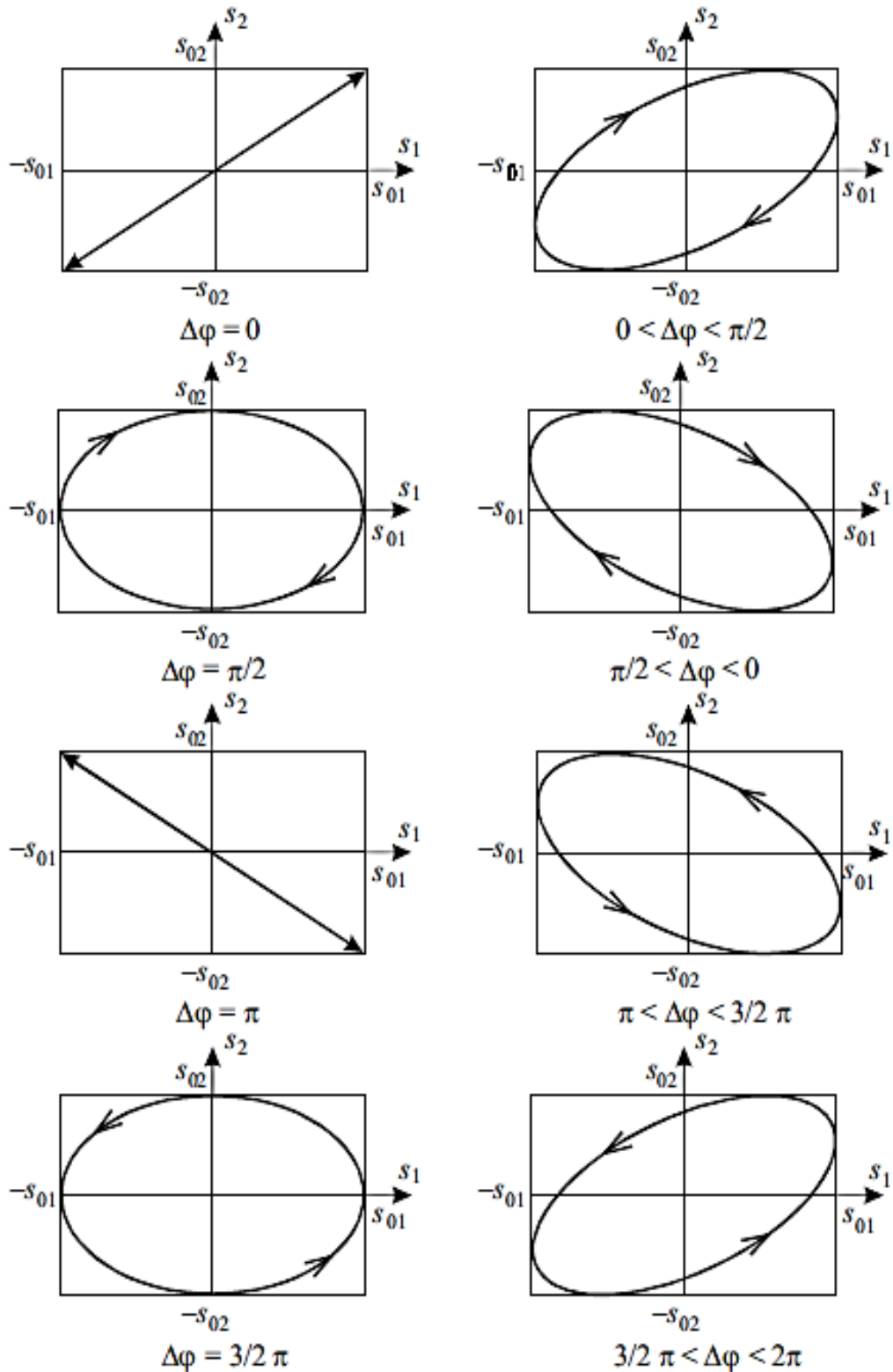


Рис 1.8. Траєкторії руху тягарця для різних значень початкової різниці фаз  $\Delta\varphi$  [13].

На рис. 1.8 зображені траєкторії руху тягарця, що бере участь у двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях при різних значеннях початкової різниці фаз коливань.

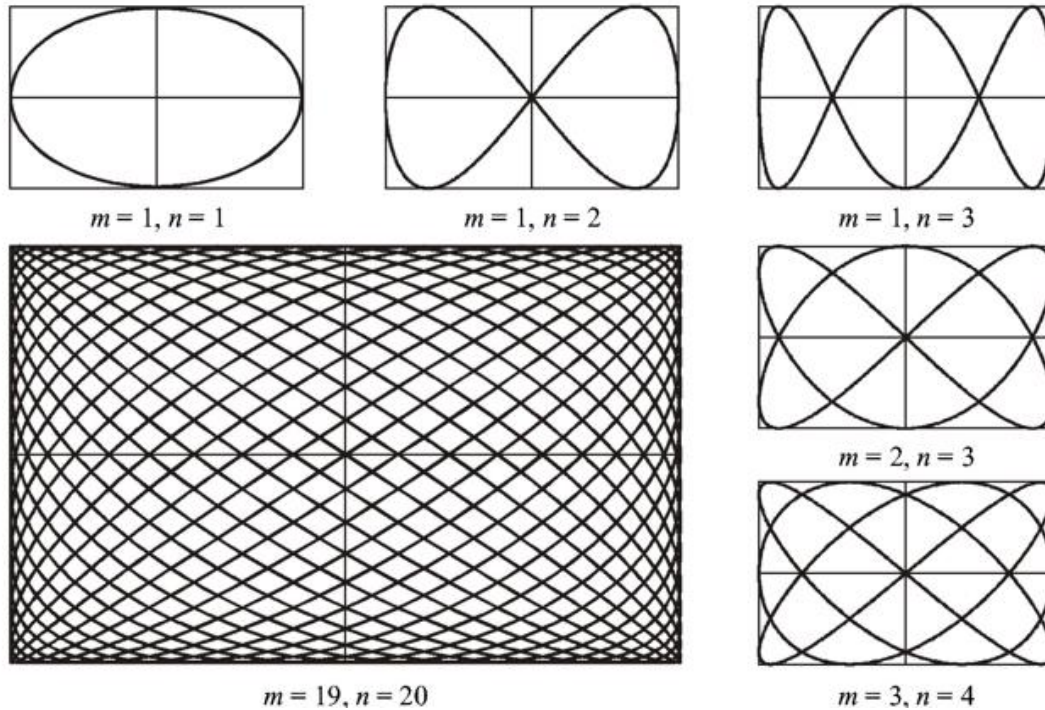


Рис. 1.9 Фігури Лісажу [14]

Типовим прикладом двовимірного осцилятора (маятника) є електрон в атомі, який рухається навколо ядра еліптичною орбітою з періодом обертання  $T = 10^{-15}$  с [24]. Можна вважати, що такий електрон одночасно здійснює два взаємно перпендикулярні коливання з частотою  $\omega_0 = 2\pi/T \sim 10^{16}$  с<sup>-1</sup>.

Якщо частоти двох взаємно перпендикулярних коливань не збігаються, але є кратними:  $m\omega_{02} = n\omega_{01}$ , де  $m$  і  $n$  — цілі числа, то траєкторії руху являють собою замкнуті криві, які називають фігурами Лісажу рис. (1.9). Зазначимо, що відношення частот коливань дорівнює відношенню чисел точок торкання фігури Лісажу до сторін прямокутника, у який вона вписана.

Якщо кратність між частотами відсутня, то траєкторії не замкнені і поступово заповнюють весь прямокутник, нагадуючи нитку в клубку.

## 1.4. Аналіз руху систем з одним ступенем вільності методом фазової площини

**1.4.1. Фазовий портрет коливальної системи.** У будь-якій коливальній системі з одним ступенем вільності зміщення  $s(t)$  і швидкість  $v(t) = ds/dt$  змінюються з часом. Стан системи у кожний момент часу можна характеризувати двома значеннями  $s$  і  $v$ , і на площині цих змінних цей стан однозначно визначається положенням зображувальної точки  $P$  з координатами  $s$  та  $v$ . З плином часу зображувальна точка  $P$  буде переміщуватися вздовж кривої, яку називають *фазовою траєкторією руху*.

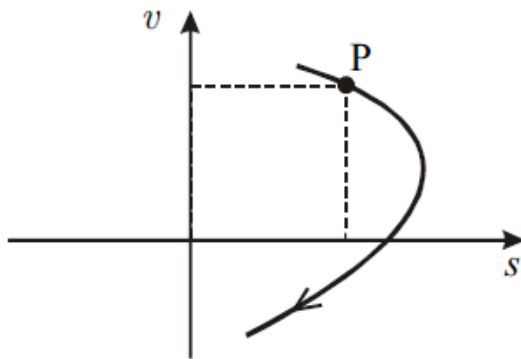


Рис. 1.10. Фазова площина та фазова траєкторія руху

Площина змінних  $s$  і  $v$  називається *фазовою площиною*. Сімейство фазових траєкторій утворює *фазовий портрет* коливальної системи. Аналіз фазового портрета дає важливу інформацію про коливальну систему. До побудови такого портрета вдаються тоді, коли не вдається розв'язати аналітично рівняння, що описує складні коливання. Насамперед це стосується нелінійних коливань, аналіз яких ускладнений через відсутність точних розв'язків нелінійних рівнянь.

**1.4.2. Фазовий портрет гармонічних коливань.** Побудуємо фазовий портрет найпростіших гармонічних коливань, які описуються рівнянням виду  $s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Оскільки швидкість  $v(t) = \frac{ds}{dt} = s_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$

випереджає зміщення по фазі на  $\pi/2$ , то фазова траєкторія буде еліпсом (рис. 1.11).

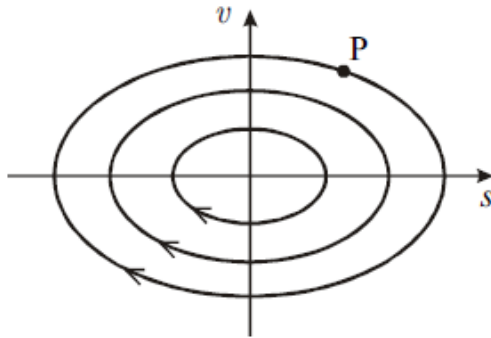


Рис.1.11. Фазовий портрет гармонічного осцилятора. Півосі кожного еліпса відповідають амплітудам зміщення та швидкості [1]

Точка P рухатиметься за еліптичною траєкторією за годинниковою стрілкою (при  $v > 0$  зміщення  $s$  зростає, а при  $v < 0$  — зменшується. Параметри еліпса визначаються енергією, запасеною гармонічним осцилятором. Потенціальна енергія пружинного маятника пропорційна квадрату зміщення:

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} ks^2 = \frac{1}{2} ks_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.24)$$

Кінетична енергія пропорційна квадрату швидкості:

$$E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 s_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.25)$$

Якщо взяти до уваги рівність  $k = m\omega^2$ , то легко бачити, що взаємоперетворення одного виду енергії на інший за період відбуваються двічі. При цьому повна енергія системи залишається постійною:

$$E_0 = E_{\text{пот}} + E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} m(\omega_0^2 s^2 + v^2). \quad (1.26)$$

Рівність (1.26) якраз і є рівнянням еліпса, яке можна переписати у зручнішому вигляді:

$$s^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} = \frac{2E_0}{m\omega_0^2}. \quad (1.27)$$

Фазовий портрет гармонічного осцилятора є сімейством еліпсів, кожному з яких відповідає енергія  $E_0$ , запасена осцилятором. Положення рівноваги в точці 0 на фазовій площині є особливою точкою та називається особливою точкою типу «центр».

**1.4.3 Фазовий портрет математичного маятника з довільними кутами відхилення.** Зі збільшенням енергії  $E_0$  зростають амплітуди коливань зміщення  $s_0$  та швидкості  $s_0\omega_0$ . Коливання, як правило, перестають бути гармонічними, а фазові траєкторії — еліпсами. Проаналізуємо на фазовій площині коливання математичного маятника за довільних кутів  $\alpha$  відхилення від положення рівноваги. При цьому вважатимемо, що точкова маса  $m$  прикріплена не до нитки, а до жорсткого невагомого стрижня довжини  $l$ . Перше з рівнянь (1.2) запишемо у вигляді.

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin \alpha. \quad (1.28)$$

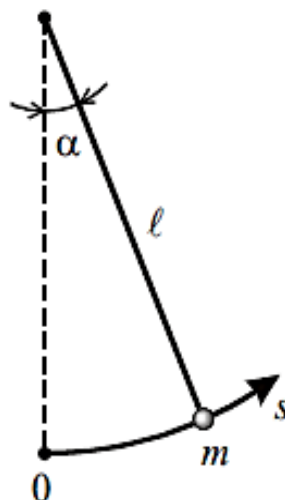


Рис. 1.12. Математичний маятник з довільним кутом відхилення стрижня [7].



Це нелінійне рівняння немає простого аналітичного рішення. Проте багато закономірностей таких коливань можна проаналізувати за допомогою фазового портрета на площині  $(\alpha, \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt})$ . З цією метою рівняння (1.28) треба перетворити до такого вигляду, щоб у ньому залишилися тільки змінні кут відхилення та кутова швидкість, а час був би виключений. Для цього кутове прискорення в лівій частині (1.28) перетворюємо до вигляду:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\dot{\alpha}}{dt} = \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} \cdot \dot{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\alpha}^2)}{d\alpha}. \quad (1.29)$$

$$\frac{1}{2} d(\dot{\alpha}^2) = -\omega_0^2 \sin \alpha d\alpha. \quad (1.30)$$

Рівняння (1.30) відображає те, що приріст кінетичної енергії маятника дорівнює зменшенню його потенціальної енергії у полі сили тяжіння. Інтегруючи (1.30), отримаємо

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} - \omega_0^2 \cos \alpha = \text{const}. \quad (1.31)$$

Якщо прийняти, що потенціальна енергія маятника у положенні рівноваги дорівнює нулю, то константа виражається через запасену маятником енергію  $E$

$$\text{const} = \frac{E_0}{m\ell^2} - \omega_0^2. \quad (1.32)$$

Рівняння фазової траєкторії (1.31) остаточно запишеться у вигляді:

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{\alpha}^2}{\omega_0^2} + (1 - \cos \alpha) = \frac{E_0}{m\ell^2 \omega_0^2}. \quad (1.33)$$

При цьому потенціальна та кінетична енергії задаються виразами:

$$E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\alpha}^2; \quad E_{\text{пот}} = m\ell^2 \omega_0^2 (1 - \cos \alpha). \quad (1.34)$$

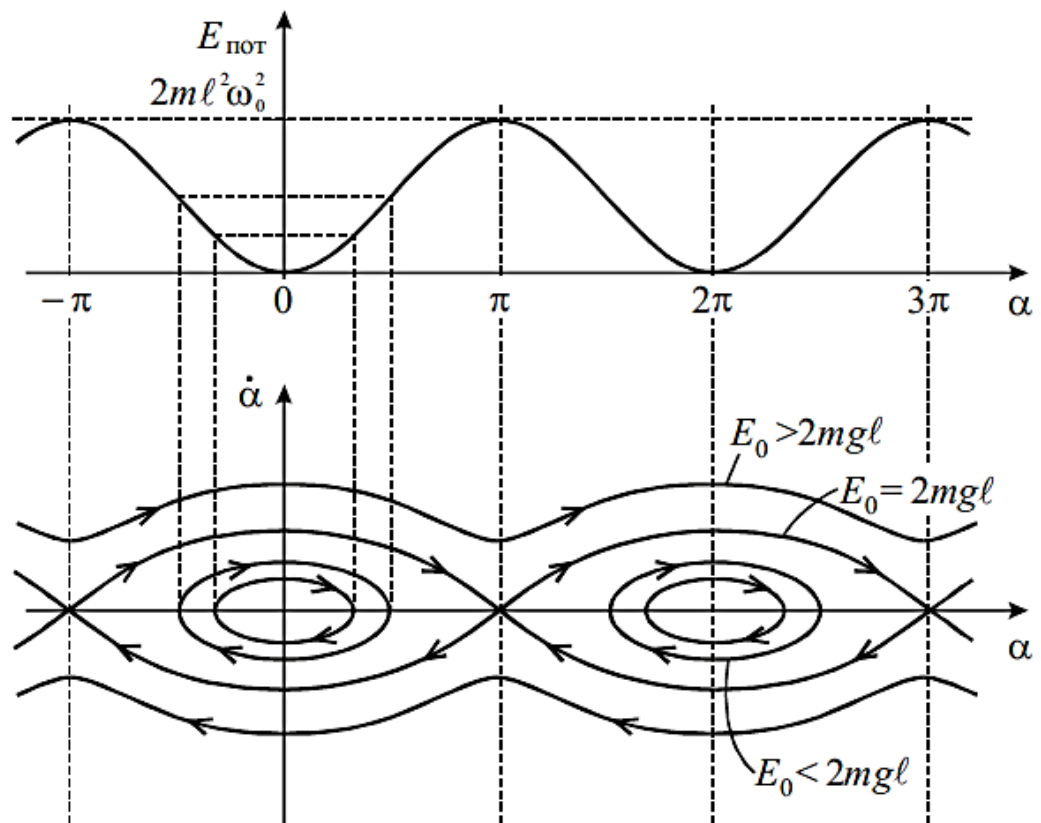


Рис. 1.13. Фазовий портрет математичного маятника з довільними кутами відхилення [1].

Використовуючи рівняння фазової траєкторії (1.33), побудуємо фазовий портрет маятника (рис. 1.13). Виразно видно два типи фазових траєкторій, що відповідають двом типам руху. Замкнені траєкторії, що оточують особливі точки типу «центр» з координатами  $\alpha' = 0$ ,  $\alpha = 2\pi n$  ( $n$  — ціле число), відповідають коливанням маятника відносно стійкого нижнього положення рівноваги. Такі коливання мають місце, якщо енергія системи  $E_0 < ml^2 \omega^2 = 2mgl$  (див. рис. 1.13). При цьому, якщо  $E_0 \ll 2mgl$ , то коливання будуть гармонічними, а фазові траєкторії — еліпсами. Якщо  $E_0 \sim 2mgl$ , то коливання будуть негармонічними. При збільшенні енергії, а, отже, і амплітуди коливань осцилятора, їх період зростатиме, оскільки повертаюча сила у рівнянні (1.28) менша, ніж у випадку гармонічного осцилятора.

Верхньому положенню рівноваги з координатами  $\alpha' = 0$ ,  $\alpha = (2n - 1)\pi$  відповідають особливі точки типу «сідло». Фазові криві, що проходять через «сідла», відповідають енергії  $E_0 = 2mgl$  і називаються сепаратрисами.

Якщо, нарешті,  $E_0 > 2mgl$ , то виходять незамкнені траєкторії, що відповідають обертальному руху маятника.

Таким чином, сепаратриси поділяють фазову площину на дві області: область замкнених траєкторій і область траєкторій, що приходять з нескінченності і прямують у нескінченність.

Зазначимо, що для негармонічних коливань не можна вживати термін «кругова частота», оскільки такі коливання є, як правило, суперпозицією гармонічних коливань із різними частотами [17]. Однією з головних характеристик коливань є період. Фазовий портрет не дозволяє визначити, як швидко рухається точка Р траєкторії. Однак період нелінійних коливань математичного маятника можна отримати на основі наближеного розв'язування рівняння (1.28).

### 1.5. Рівняння негармонічних коливань математичного маятника.

Коливання математичного маятника при великих амплітудах не будуть гармонічними [ 24, 25]. Це відбувається тому, що повертаюча сила в правій частині рівняння (1.28) пропорційна  $\sin \alpha$  і при великих  $\alpha$  стає меншою від тієї «лінійної» сили (пропорційної  $\alpha$ ), яка повертає масу, що коливається, в положення рівноваги за незмінний час, рівне чверті періоду коливань . Така «лінійна» сила забезпечує незалежність цього часу від амплітуди  $\theta$ , тобто. ізохронність коливань. Для аналізу коливань при великих амплітудах  $\alpha_0$  запишемо розклад  $\sin \alpha$  у ряд:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \dots, \quad (1.35)$$

у якому ми відкинули члени вищого порядку:  $\alpha^5$ ,  $\alpha^7$  тощо. Підстановка (1.35) в (1.28) призводить до нелінійного рівняння коливань:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = \frac{\omega_0^2}{6}\alpha^3. \quad (1.36)$$

Гармонічна функція не буде розв'язком цього рівняння. Справді, припустимо, що розв'язком рівняння (1.36) буде гармонійне коливання  $\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \phi_0)$ . Підставляючи цей вираз у праву частину (1.36) і враховуючи тригонометричну тотожність

$$\sin^3 \omega t \equiv \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t, \quad (1.37)$$

Нелінійний член у правій частині змінюється не тільки з частотою  $\omega$ , але і  $3\omega$ , тобто коливання маятника здійснюються одночасно на частотах  $\omega$  і  $3\omega$ .

Тобто,

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \phi_0) + \varepsilon \alpha_0 \sin 3(\omega t + \phi_0), \quad (1.38)$$

де  $\varepsilon$  – безрозмірний параметр.

Підставляючи (1.38) (1.36), знову виявляємо, що нелінійний член, крім двох частот  $\omega$  і  $3\omega$ , змінюється в часі і на частоті  $9\omega$ . Це свідчить, що рішення (1.38) не є повним (у ньому відсутні вищі гармоніки  $9\omega$ ,  $27\omega$  тощо.). Проте, якщо амплітуда коливань  $\alpha_0$  не дуже велика, то параметр  $\varepsilon \ll 1$ , і відсутні члени з вищими гармоніками мають амплітуди  $\varepsilon^2\alpha_0$ ,  $\varepsilon^3\alpha_0$  тощо, які набагато менші за амплітуду третьої  $\varepsilon\alpha_0$ .

Тепер розрахуємо частоту  $\omega$  [24]. Для простоти покладемо  $\phi_0 = 0$  (маятник отримує початковий поштовх у положенні рівноваги). Використовуючи (1.38), запишемо кожен із трьох членів рівняння (1.36), опускаючи доданки, що мають порядок малості  $\varepsilon^2$  і вище:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha}{dt^2} &= -\omega^2\alpha_0 \sin \omega t - 9\omega^2\varepsilon\alpha_0 \sin 3\omega t; \\
\omega^2\alpha &= \omega^2\alpha_0 \sin \omega t + \omega_0^2\varepsilon\alpha_0 \sin 3\omega t; \\
-\frac{1}{6}\omega_0^2\alpha^3 &= -\frac{3\omega_0^2}{24}\alpha_0^3 \sin \omega t + \frac{\omega_0^2}{24}\alpha_0^3 \sin 3\omega t - \frac{\omega_0^2}{2}\alpha_0^3\varepsilon \sin^2 \omega t \sin 3\omega t.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Зауважимо, що в останній рівності третій доданок у правій частині, що містить множник  $\alpha^3\varepsilon$ , малий у порівнянні з двома попередніми, і його також можна відкинути.

Додамо отримані три рівності. З огляду на (1.36), сума лівих частин рівностей (1.39) дорівнює нулю. Тому

$$0 = \alpha_0(-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{24}\omega_0^2\alpha_0^2)\sin \omega t + \alpha_0(-9\omega^2\varepsilon + \omega_0^2\varepsilon + \frac{1}{24}\omega_0^2\alpha_0^2)\sin 3\omega t. \tag{1.40}$$

Оскільки рівність (1.40) повинна виконуватися для будь-якого моменту часу, то кожен із виразів, що стоять у круглих дужках, має дорівнювати нулю. З рівності нулю першого виразу легко визначити квадрат частоти основної гармоніки

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{8}\alpha_0^2 \right). \tag{1.41}$$

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{\alpha_0^2}{8} \right)^{1/2} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{\alpha_0^2}{16} \right). \tag{1.42}$$

Останній вираз показує, що зі зростанням амплітуди коливань їхня частота зменшується (період збільшується), тобто. порушується ізохронність коливань [23]. Прирівняємо далі нулю другий вираз у круглих дужках у формулі (1.40):

$$-9\omega^2\varepsilon + \omega_0^2\varepsilon + \frac{\omega_0^2}{24}\alpha_0^2 = 0. \tag{1.43}$$

Вважаючи, що  $\omega \approx \omega_0$ , знаходимо величину малого коефіцієнта  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \frac{\alpha_0^2}{192}. \quad (1.44)$$

Якщо покласти  $\alpha_0 = 15^\circ = 0,26$  рад, то  $\varepsilon = 3,5 \cdot 10^{-4}$ , і внесок третьої гармоніки в коливання мізерно малий. Відмінність частоти  $\omega$  від частоти гармонійних коливань  $\omega_0$  становитиме величину.

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\alpha_0^2}{16} = 4,2 \cdot 10^{-3}. \quad (1.45)$$

$\sim 1$  рад  $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{-3}$ , а  $(\omega_0 - \omega)/\omega_0 \sim 6\%$ . Таким чином, наближеним розв'язком рівняння (1.36) буде (1.38), де частота  $\omega$  визначається (1.41), а параметр  $\varepsilon$  знаходимо з (1.44).

Зауважимо, що негармонічні коливання [48] можуть виникати не лише за великих відхилень від положення рівноваги системи. Наприклад, якщо в розкладі повертаючої сили,  $F_\tau(s)$  за ступенями  $s$  відсутній лінійний член, і розклад починається з члена, пропорційного  $s^3$ , то коливання будуть ангармонічними при будь-яких, навіть дуже малих, відхиленнях.

## 1.6. Вільні коливання в дисипативних системах із в'язким тертям.

**1.6.1. Рівняння згасних коливань та його розв'язки.** У реальних системах завжди відбувається дисипація енергії. Якщо втрати енергії не компенсуються за рахунок зовнішніх пристроїв, то коливання з часом згасатимуть і через якийсь час припиняться взагалі.

Формально загасаючі коливання описуються рівнянням [30-32]

$$m\ddot{s} = F_\tau(s) + F_{\text{тер}}(\dot{s}), \quad (1.46)$$

яке, на відміну від (1.2), крім повертаючої сили  $F_\tau$ , містить і силу тертя  $F_{\text{тер}}$ . Сила опору руху, взагалі кажучи, залежить як від напрямку швидкості (наприклад, при сухому терті), так і від величини швидкості (при русі у в'язкому середовищі) [11]. Якщо повертаюча сила пропорційна зсуву:  $F_\tau(s) = -$

ks, де k — коефіцієнт пропорційності (для пружинного маятника — жорсткість пружини), то рівняння (1.46) можна переписати у вигляді.

$$\ddot{s} - \frac{F_{\text{тр}}}{m} + \omega_0^2 s = 0, \quad (1.47)$$

де  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  - власна частота незатухаючих гармонічних коливань.

Спочатку ми розглянемо загасні коливання у випадку, коли на тіло, що коливається, діє сила в'язкого тертя, пропорційна швидкості:  $F_{\text{тер}} = -\Gamma \dot{s}$ . Така ситуація може мати місце, наприклад, при коливальному русі тіла в повітрі або рідині, коли число Рейнольдса  $Re \sim 1$  або  $Re < 1$ . Тоді рівняння (1.47) можна записати у вигляді:

$$\ddot{s} + 2\delta \dot{s} + \omega_0^2 s = 0, \quad (1.48)$$

Загальна ідея розв'язку однорідних лінійних рівнянь на зразок (1.48) полягає в наступному: функціональна залежність  $s(t)$  має бути така, яка при диференціюванні за часом переходить сама у себе, тобто експоненту:  $s(t) = s_0 e^{\lambda t}$ .

Підставимо її в рівняння (1.48):

$$s_0 e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega_0^2) = 0. \quad (1.49)$$

Оскільки  $e^{\lambda t} \neq 0$ , отримуємо так зване «характеристичне» рівняння:

$$\lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (1.50)$$

яке в даному випадку (для рівняння другого порядку) має два корені

$$\lambda_{1,2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (1.51)$$

а саме рівняння (1.48) – два незалежні рішення:  $s(t) = s_1 e^{\lambda_1 t}$  та  $s(t) = s_2 e^{\lambda_2 t}$ . З огляду на лінійність рівняння (1.48) сума будь-яких його рішень також є рішенням, тобто справедливий так званий «принцип суперпозиції» рішень, і загальним рішенням цього рівняння є

$$s(t) = s_{01} e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} + s_{02} e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t}. \quad (1.52)$$

Залежно від співвідношення  $\delta$  і  $\omega_0$  можливі 3 випадки.

Якщо  $\delta < \omega_0$ , то  $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = i \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , де  $i = \sqrt{-1}$ . Розв'язок буде комплексним, але, оскільки початкові умови дійсні, то за допомогою формули Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1.54)$$

можна показати, що загальний розв'язок буде дійсним і може бути записаний у вигляді:

$$s(t) = s_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1.54)$$

тобто є загасними коливаннями, частота яких  $\omega$  менша, ніж у власних незатухаючих коливань:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (1.55)$$

Колівання, що описуються (1.54), є гармонічними (рис. 1.14). Під їхньою амплітудою розумітимемо величину

$$A(t) = s_0 e^{-\delta t}, \quad (1.56)$$

яка монотонно зменшується з часом. «Тривалість» коливань характеризується часом згасання

$$\tau = \frac{1}{\delta}. \quad (1.57)$$

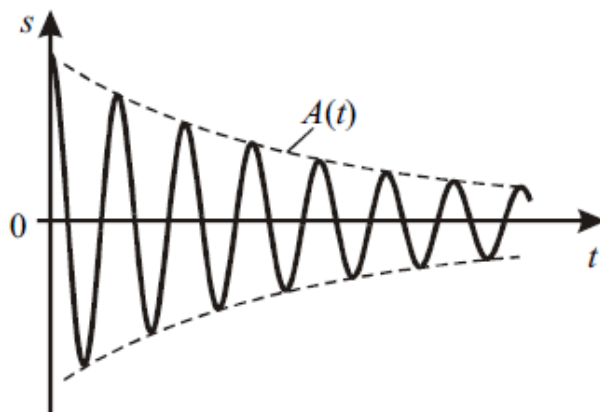


Рис. 1.14 Залежність амплітуди згасних коливань від часу [29].



Якщо підставити  $\tau$  в (1.56), то видно, що після часу згасання  $\tau$  амплітуда зменшується в  $e$  разів. Кількість здійснених системою коливань за час  $\tau$  дорівнює відношенню цього часу до періоду загасних коливань  $T = 2\pi/\omega$ . Якщо згасання в системі мале ( $\delta \ll \omega_0$ ), то період коливань  $T \approx 2\pi / \omega_0$ , і кількість цих коливань велика:

$$N = \frac{\tau}{T} \approx \frac{\omega_0}{2\pi\delta} \gg 1. \quad (1.58)$$

Експоненціальний закон зменшення амплітуди згодом дозволяє ввести безрозмірний параметр — логарифмічний декремент згасання  $\theta$ , який дорівнює логарифму відношення двох послідовних відхилень в один і той самий бік:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T. \quad (1.59)$$

З (1.57), (1.58), (1.59) знаходимо

$$\theta = \frac{1}{N}. \quad (1.60)$$

Логарифмічний декремент загасання можна оцінити, якщо підрахувати кількість коливань, здійснених системою за час загасання  $\tau$ , тобто до зменшення амплітуди коливань приблизно в 3 рази [3]. Чим більша кількість цих коливань, тим менше втрати енергії в системі. Простежимо за зменшенням енергії, запасеної осцилятором, з часом [8, 9]. Використовуючи (1.54), запишемо за аналогією з (1.24) та (1.25) вирази для потенціальної та кінетичної енергій осцилятора:

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} k s_0^2 e^{-2\delta t} \sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad (1.61)$$

$$E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} m \omega^2 s_0^2 e^{-2\delta t} \cos^2(\omega t + \varphi_0). \quad (1.62)$$

Зауважимо, що, строго кажучи, швидкість дорівнює

$$v = \dot{s} = -s_0 \delta e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + s_0 \omega e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.63)$$

Очевидно, що якщо  $\delta \ll \omega$ , то першим доданком у (1.63) можна знехтувати та записати вираз для кінетичної енергії у вигляді (1.62). Сумарна енергія осцилятора зменшується з часом:

$$E(t) = \frac{1}{2} s_0^2 e^{-2\delta t} [k \sin^2(\omega t + \varphi_0) + m \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)]. \quad (1.64)$$

Візьмемо до уваги, що при  $\delta \ll \omega$  частота  $\omega \approx \omega_0$ . Оскільки  $k = m\omega^2$ , то (1.64) запишеться у вигляді

$$E(t) = \frac{1}{2} s_0^2 m \omega_0^2 e^{-2\delta t} = E_0 e^{-2\delta t}. \quad (1.65)$$

Повна енергія осцилятора, яка спочатку була рівна  $E = \frac{1}{2} s_0 m \omega_0^2$ , монотонно спадає в часі за експоненціальним законом [2]:

$$\tau_E = \frac{1}{2\delta} = \frac{\tau}{2}. \quad (1.66)$$

**1.6.2 Добротність коливальної системи.** Якість коливальної системи характеризують безрозмірним параметром  $Q$ , який називається добротністю. Добротність пропорційна відношенню енергії, яку має система  $E(t)$ , до енергії  $\Delta E_T$ , що втрачається за період [4] (рис. 1.15):

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E_T} = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\delta t}}{E_0 e^{-2\delta t} - E_0 e^{-2\delta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}}. \quad (1.67)$$

Якщо кількість коливань велика, то  $\delta T = 1/N \ll 1$ . Тоді

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}} = \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\delta T + \dots)} \approx \frac{\pi}{\delta} = \pi N. \quad (1.68)$$

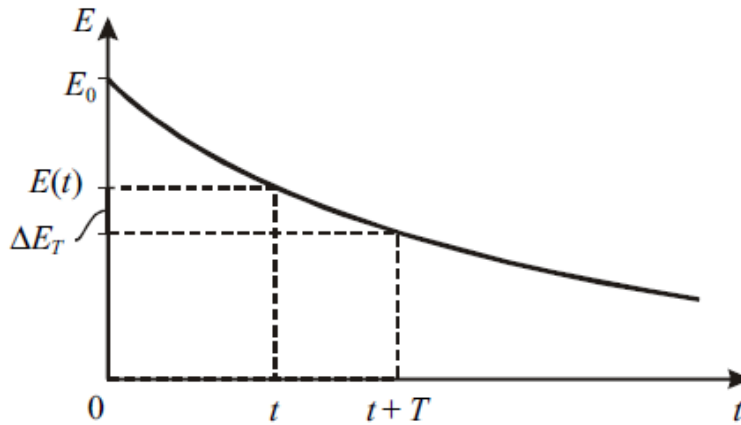


Рис 1.15 Залежність загальної енергії осцилятора від часу для згасних коливань [28].

Якщо енергія зменшується з часом за експоненціальним законом, добротність  $Q$  виявляється постійною величиною, яку, як і логарифмічний декремент згасання  $\theta$ , можна легко оцінити за кількістю коливань  $NQ = \pi N \approx 3N$ , скоєних системою до їх повного припинення (за час  $3\tau$  амплітуда коливань зменшується в  $e^3 \approx 20$  разів, тобто коливання практично повністю згасають).

**1.6.3. Критичний та аперіодичний режими руху.** Розглянемо тепер випадок  $\delta = \omega_0$ , коли корені характеристичного рівняння кратні:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ . Тоді частота

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 0,$$

тобто коливання відсутні. Загальний розв'язок, як неважко перевірити підстановкою, має такий вигляд:

$$s(t) = (s_0 + Ct)e^{-\delta t}, \quad (1.69)$$

де незалежні сталі  $s_0$  та  $C$  визначаються, початковими умовами. Можливий вигляд залежності  $s(t)$  за різних початкових умов зображених на малюнку 1.16. Характерною особливістю усіх кривих є те, що вони перетинають вісь  $Ot$  не більше одного разу, і повернення до рівноважного стану у системи, що виведена з нього, відбувається за час порядку кількох  $\tau$ . Такий режим руху називається критичним.

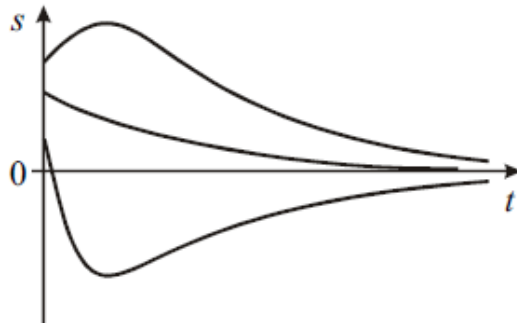


Рис 1.16. Критичний режим руху коливальної системи за різних початкових умов [ 27]

Нарешті, якщо  $\delta > \omega_0$ , то загальне рішення (1.52) є сумою двох спадних з часом експонент, оскільки

$$-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0.$$

Можливий вигляд залежностей  $s(t)$  схожий на те, що зображено на рис. 1.16, але повернення до рівноваги здійснюється повільніше, ніж у критичному режимі, оскільки в'язке тертя є більшим. Цей режим руху називається аперіодичним або за критичним.

Зазначимо, що найбільш швидке повернення системи до положення рівноваги відбувається в критичному режимі [12, 15], а коливальний та аперіодичний режими цей процес триває довше. Тому, наприклад, гальванометри — прилади для електричних вимірювань — працюють зазвичай у режимі, близькому до критичного, коли процес встановлення їх показів має найменшу тривалість [19]. Ілюстрацією до розглянутих закономірностей загасаючих коливань є фазові портрети, побудовані для коливального ( $\delta < \omega_0$ ), а також критичного та аперіодичного ( $\delta \geq \omega_0$ ) режимів (рис. 1.17).

При  $\delta < \omega_0$  фазовий портрет є сукупністю спіралей, що стягуються в особливу точку типу «фокус». На рис. 1.17 зображено одну з таких спіралей. За кожен оберт радіус спіралі зменшується в  $e^\theta$  разів [35]. Для критичного та аперіодичного режимів  $\delta \geq \omega_0$  фазові траєкторії сходяться в особливу точку типу «вузол».

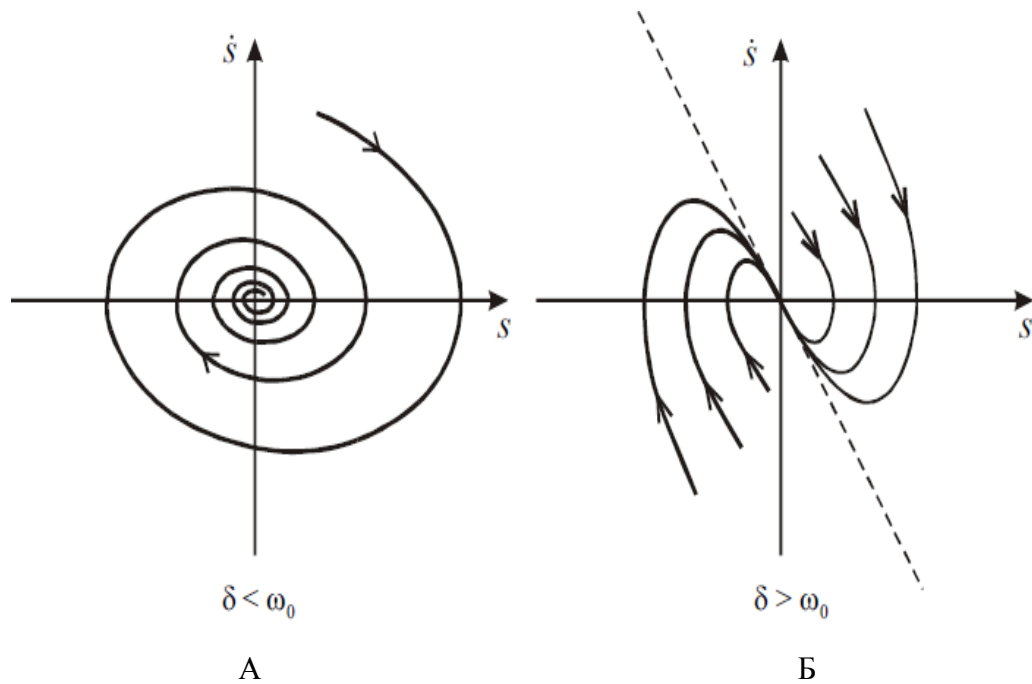


Рис.1.17. Фазові портрети періодичних (А) та аперіодичних (Б) коливань у системах з в'язким тертям [20].

### 1.7. Згасання коливань у системах із сухим тертям.

На практиці ми часто маємо справу з системами, в яких головну роль відіграє сила сухого тертя, яка не залежить від швидкості [21-22]. Типовий приклад — пружинний маятник, вантаж якого ковзає по шорсткій горизонтальній поверхні, або коливальна система біля стрілочних вимірювальних приладів, основу якої складає рамка, що обертається, і на яку діє сила сухого тертя в осі обертання. Хоча сила  $F_{\text{тр}}$  сухого тертя і не змінюється за величиною, проте вона змінює свій напрямок при зміні напрямку швидкості. В силу цього необхідно записати два рівняння

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = -\frac{F_{\text{тр}}}{m} \quad \text{для } \dot{s} > 0; \quad (1.70)$$

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = +\frac{F_{\text{тр}}}{m} \quad \text{для } \dot{s} < 0. \quad (1.71)$$

Якщо в (1.70) використувати змінну  $s_1 = s + \frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$ , а в (1.71)  $s_2 = s - \frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$ ,

рівняння набудуть однакового вигляду:

$$\ddot{s}_{1,2} + \omega_0^2 s_{1,2} = 0. \quad (1.72)$$

Фазові траєкторії, що відповідають цьому рівнянню, є еліпси з центрами, що мають координати  $s_- = -\frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$  ( $s_1=0$ ) для верхньої півплощини  $\dot{s} > 0$  та  $s_+ = \frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$  ( $s_2=0$ ) для нижньої півплощини  $\dot{s} < 0$ .

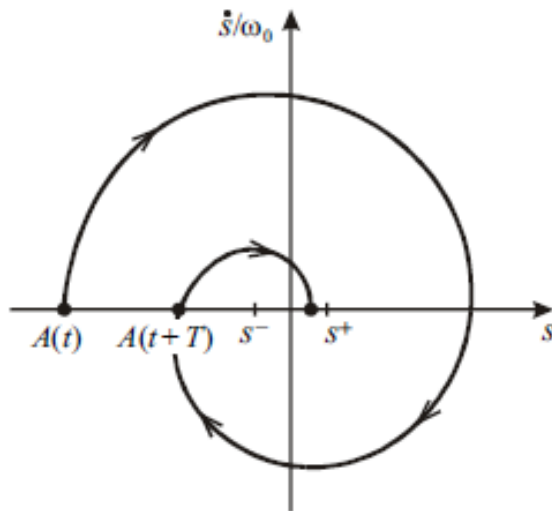


Рис.1.18. Фазовий портрет системи з сухим тертям [20].

Щоб намалювати фазовий портрет, необхідно з'єднати фазові портрети верхньої і нижньої півплощин на їх спільній границі  $\dot{s} = 0$ .

Із побудованого на рис. 1.18 фазового портрета видно, що рух припиняється після скінченної кількості коливань. Надзвичайно важливо, що система не обов'язково прийде до стану  $s = 0$ , а може зупинитися, потрапивши в зону застою  $s_+ - s_-$ . Зона застою тим більша, чим більша сила  $F_{\text{тр}}$ .

З фазового портрета легко визначити спад амплітуди коливань за один період. Ця зміна амплітуди вдвічі перевищує протяжність зони застою [38]:

$$\Delta A = A(t) - A(t+T) = 2(s_+ - s_-) = \frac{4F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}. \quad (1.73)$$

Таким чином, на відміну від експоненціального закону (1.56), характерного для в'язкого тертя, амплітуда коливань зменшується з часом лінійно. На рис. 1.19 показана залежність від часу зміщення тіла, що коливається, при сухому терті. Кількість коливань, що здійснюються

системою до їх припинення, залежить від початкової амплітуди  $A_0$ , і його можна оцінити за формулою:

$$N = \frac{A_0}{\Delta A} = \frac{A_0}{s_+ - s_-}$$

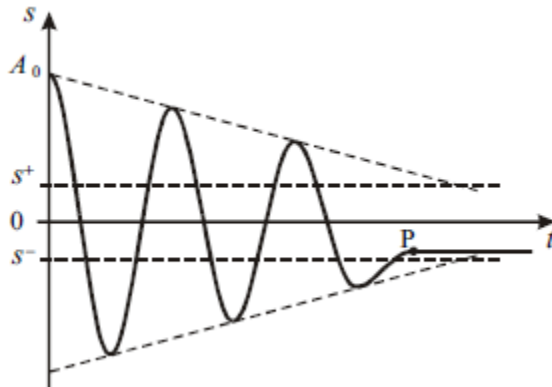


Рис.1.19. Залежність амплітудивід часу у системах з при сухим тертям [18]

Вона залежить від початкової амплітуди.  $A_0$ . Частота коливань залишається такою ж, які за відсутності сили тертя ( $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ).

Коливання продовжуються доти, доки їхня амплітуда залишається більшою половини ширини зони застою  $s^+ - s^-$ .

При цьому у реальних умовах маса, що коливається, зупиняється у випадковому положенні усередині цієї зони (у точці P на рис. 1.19) [36].

Ми розглянули основні види вільних коливань. Експериментально вивчити особливості цих коливань можна за допомогою маятникових систем.

## РОЗДІЛ 2

### ДЕМОНСТРАЦІЙНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ МАЯТНИКОВИХ СИСТЕМ

Вивчення теми «Коливання», як правило, починається з математичного маятника. Ми пропонуємо розглянути низку математичних (з певними обмеженнями) маятників, які коливаються навколо спільної осі і демонструють красиві візерунки. Розрахунок такої системи допоможе усвідомлено засвоїти базові поняття коливального руху.

#### 2.1. Хвильовий маятник.

Хвильовим маятником називається низка математичних маятників (тягарців) на нитках різної довжини [39-42]. Усі маятники розпочинають рух одночасно з однією початковою фазою, проте завдяки тому, що вони мають різні періоди коливань, між сусідніми маятниками виникає різниця фаз, яка з часом зростає. Тягарці утворюють різні лінії і орнаменти, які неперервно змінюються, повторюючись з певним періодом [43-45] (рис.2.1).

Для розрахунку довжин ниток необхідно задати два параметри:

- 1) час, за який фазові співвідношення у системі маятників будуть повторюватись, тобто період коливань усієї системи  $T_c$ ;
- 2) кількість коливань найдовшого маятника за період  $T_c$ .

У хвильовому маятнику частоти коливань окремих маятників підбираються так, щоб кожен наступний здійснював за період  $T_c$  одне додаткове коливання. Покладемо  $T_c = 20$  с. Нехай найдовший маятник здійснює за цей час  $k$  коливань. Покладемо  $k=22$ . Наступний, коротший, зробить 23 коливання за 20 с. Якщо ми виготовляємо систему з  $N$  маятників (візьмемо  $N=9$ ), то останній робитиме 30 коливань за час  $T_c$ , тобто  $k+N-1$ .



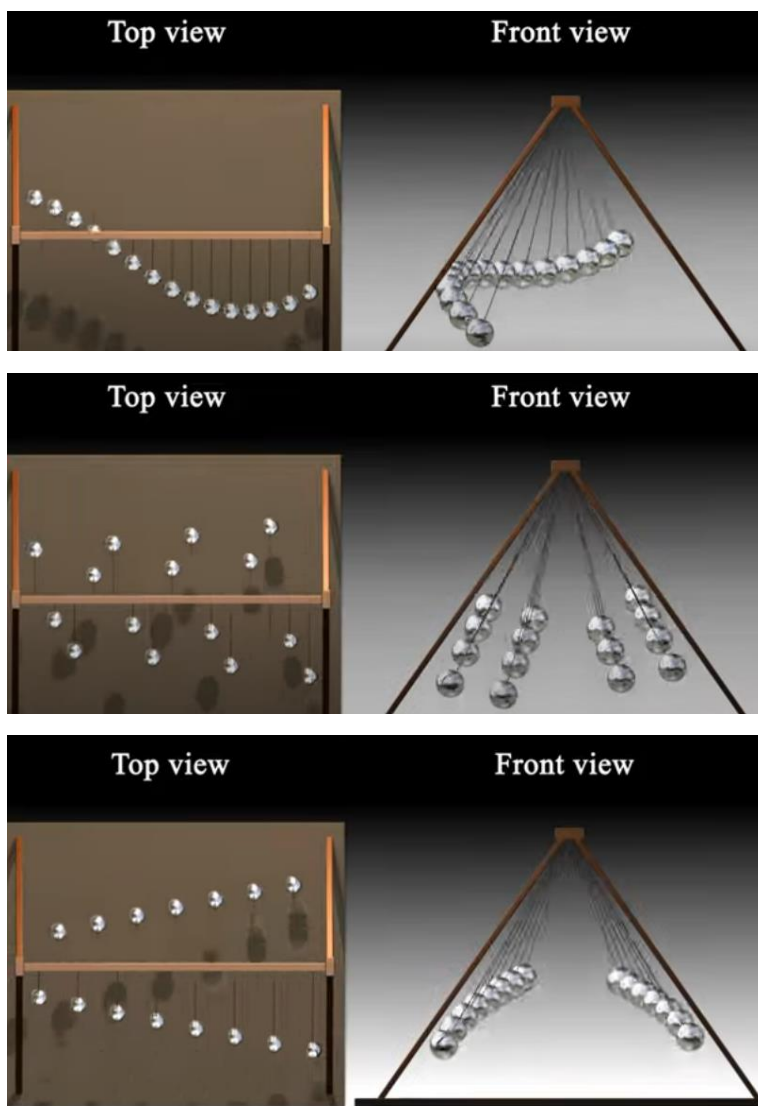


Рис. 2.1 Взаємне розташування тягарців хвильового маятника при різних співвідношеннях фаз коливань окремих маятників. Зліва – вигляд згори, справа – вигляд з торця [32].

Усе, що відбувається в середині цього інтервалу, зумовлене розташуванням багатьох маятників, кожен з яких має дещо коротший період, ніж попередній, які рухаються у фазі та протифазі одини з одним. Коли коротші маятники починають випереджати довші, вони ніби «підтягують» тих, які поруч, і створюють ефект хвилі вздовж планки, на якій прикріплені маятники. Через 10 секунд — на середині 20-секундного циклу — кожен непарний маятник (починаючи з найдовшого) завершить цілу кількість циклів, тоді як інші маятники синхронізуються разом на «половині циклу». Коли це відбувається, половина маятників групується разом з одного боку, а решта

маятників групуються разом з іншого боку.

Для того, щоб тягарці в окремі моменти розташовувалися з певною закономірністю, утворювали візерунки, необхідно, щоб 2 або кілька маятників у той самий час займали положення «у фазі» чи «у протифазі» [43-45]. Наприклад, у нашій системі перший маятник здійснює 4 повних коливання, за такий самий час, за який 7-й здійснює 5 коливань (знаходимо час одного коливання і множимо на їх кількість). Відхилення цих маятників у певний момент часу співпадуть, в інший будуть протилежними. Виникає биття, яке спостерігається при накладанні періодичних коливань з близькими частотами. Таким чином, коливання системи маятників – це прояв биття, обумовленого накладанням у нашому випадку 9 - ти гармонік.

Довжини ниток знайдемо, використовуючи формулу (1.11) для математичного маятника. Нехай  $n$  – порядковий номер маятника. Тоді

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L_1}{g}}, \quad T_n = 2\pi \sqrt{\frac{L_n}{g}} \quad \text{і}$$

$$\frac{T_n}{T_1} = \frac{\sqrt{L_n}}{\sqrt{L_1}}.$$

Для зручності виразимо довжини усіх маятників як  $L_n = C_n L_1$ , тоді

$$\frac{T_n}{T_1} = \sqrt{\frac{C_n L_1}{L_1}} = \sqrt{C_n} = \sqrt{\frac{k}{k+n-1}}.$$

$$L_n = L_1 \left( \frac{k}{k+n-1} \right)^2.$$

Таким чином, залежність  $L_n(n)$  - параболічна (рис.).

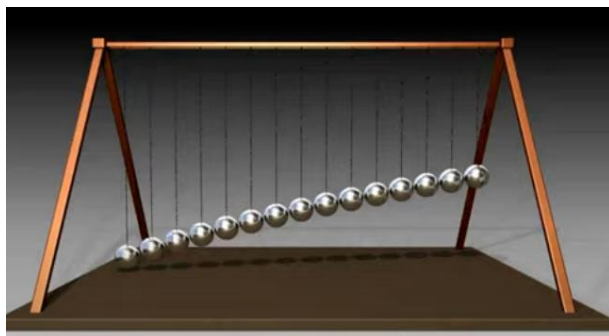


Рис. 2.2. Підвішені на однаковій відстані тягарці хвильового маятника утворюють частину параболи [32].

З графіка кореневої залежності (рис. 2.3 ) видно, що для малих значень

підкореневого виразу невелика зміна аргумента (у нашому випадку довжини) призводить до значної зміни функції (періоду коливань). Отже, чим коротша довжина маятників, тим точніше слід її регулювати. Тому для самостійного виготовлення краще обирати маятники більших розмірів [41, 42].

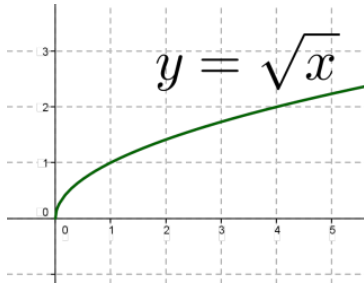


Рис. 2.3. Для малих значень  $x$  кривизна функції  $y = \sqrt{x}$ , більша, невеликій приріст аргумента призводить до істотної зміни функції.

Для експериментального спостереження візерунків, що утворюються тягарцями, розрахуємо довжини усіх 9-ти маятників. Покладемо  $L_1 = 35$  см.

$$L_2 = L_1 \left( \frac{22}{22+2-1} \right)^2 = 32,02 \text{ см}$$

$$L_9 = L_1 \left( \frac{22}{22+9-1} \right)^2 = 18,82 \text{ см.}$$

Одержані значення наведені в табл. 2.1.

Табл.2.1

Розраховані довжини ниток математичних маятників,  
що утворюють хвильовий маятник

Номер маятника	Довжина маятника, см
1	35,00
2	32,02
3	29,40
4	27,10
5	25,06
6	23,23
7	21,61
8	20,14
9	18,82

Довжиною маятника вважається відстань від точки підвісу до центра мас.

Внаслідок тертя у підвісах амплітуда коливань поступово зменшується. Для математичного маятника період не залежить від амплітуди, проте маятники, що входять до складу нашої системи, не можна вважати математичними, оскільки відхилення від положення рівноваги - десятки градусів. Тому слід уникати тертя у підвісах та втрати енергії через розтяг нитки, щоб збільшити добротність маятників. Добротність пропорційна відношенню запасу енергії в системі до втрати енергії за 1 період.

$$Q = \frac{2\pi W}{\Delta W}$$

Експериментально визначити добротність можна, порахувавши кількість коливань  $N$  до зупинки маятників. Для великої кількості коливань використовується наближене співвідношення  $Q = 3N$  [27, 28].

На прикладі механічних маятників учні наглядно вивчають та засвоюють *поняття*:

- відхилення від положення рівноваги, амплітуда,
- фаза, період коливань, частота, циклічна частота,
- лінійний осцилятор (малі відхилення  $\varphi$  та  $s$ ),
- консервативний осцилятор (амплітуда не залежить від часу).

## **2.2 Вільні коливання в системах з багатьма ступенями вільності.**

**2.2.1 Суперпозиція двох взаємно перпендикулярних незалежних коливань.** Експериментально реалізувати незалежні взаємно перпендикулярні коливання можна за допомогою тягарця, до якого приєднані 4 пружини (рис. 2.4). При невеликих відхиленнях тягарця від положення рівноваги його коливання у взаємно перпендикулярних напрямках будуть незалежними.

Відхиляючи тягарець у початковий момент у різних напрямках, ми змінюємо початкові фази коливань, а отже і різницю фаз між ними. Так можна одержати траєкторії, зображені на рис. 1.8. а також спостерігати зміну напрямку руху по еліптичній орбіті.

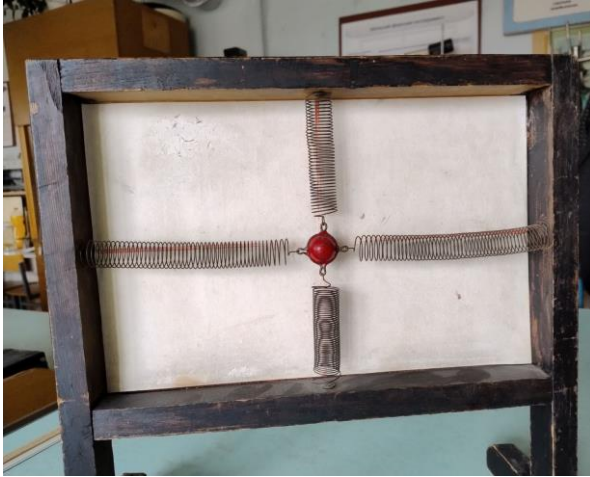


Рис. 2.4. Пружинний маятник для демонстрації суперпозиції взаємно перпендикулярних коливань

Такі самі траєкторії описує кінець вектора напруженості електричного (і магнітного) поля еліптично поляризованого світла. Елементарні випромінювачі (атоми і молекули) є гармонічними осциляторами, які випромінюють лінійно поляризовані хвилі. Правда, площини поляризації хвиль, що випромінюються різними атомами, орієнтовані у різних напрямках. Тому природне світло не поляризоване. За допомогою поляризаторів можна одержати лінійно поляризоване світло. А щоб одержати еліптично чи циркулярно поляризоване світло, необхідно за допомогою оптично анізотропного кристала розкласти світловий промінь на два, поляризованих у взаємно перпендикулярних напрямках (рис.2.5). Ці промені поширюються в кристалі з різними швидкостями, тому на виході з кристала між ними утворюється різниця фаз.



Рис. 2.5. Подвійне променезаломлення та люмінесценція у кристалі кальциту [50]

Коли такі 2 промені накладаються, утворюється еліптично поляризоване світло. Тип поляризації світлових хвиль залежить від різниці фаз між взаємно перпендикулярними компонентами вектора  $\mathbf{E}$  так, як це зображено на рис. 1.8.

Цей факт є ще одним підтвердженням того, що коливання і хвилі різної природи описуються однаковими законами.

**2.2.2. Візуалізація коливань двох послідовно з'єднаних математичних маятників.** Додавання взаємно перпендикулярних коливань можна здійснити за допомогою двох послідовно з'єднаних математичних маятників. Нитку з тягарцем прив'язують до шнурка, закріпленого кінцями на стелі чи іншій горизонтальній опорі (рис.2.6). Довжину верхнього маятника становить глибина провисання шнурка, а напрям коливань - перпендикуляр до лінії, що з'єднує кінці шнурка (рис.2.7).

Щоб бачити траєкторію коливання кінця нижнього маятника, замість тягарця підвішують пластикову пляшку, заповнену сухим піском, який може висипатись через невеликий отвір (рис.2.8).



Рис. 2.6 Кріплення верхнього маятника [51]

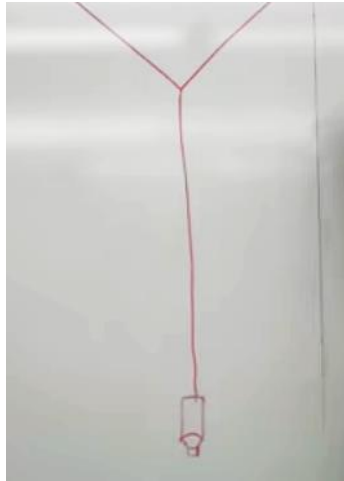


Рис. 2.7. Схема подвійного математичного маятника [51]



Рис.2.8. Сухий пісок може висипатись через маленький отвір у кришці, малюючи на темній поверхні траєкторію руху пляшки [51]

Для того, щоб збудити коливання пляшки у двох напрямках, необхідно відхилити верхній маятник від положення рівноваги і «запустити» пляшку перпендикулярно або під кутом до площини його коливань. Змінюючи напрям і амплітуду першого поштовху, а також співвідношення довжин маятників, можна отримати різноманітні фігури (рис.2.9, 2.10).



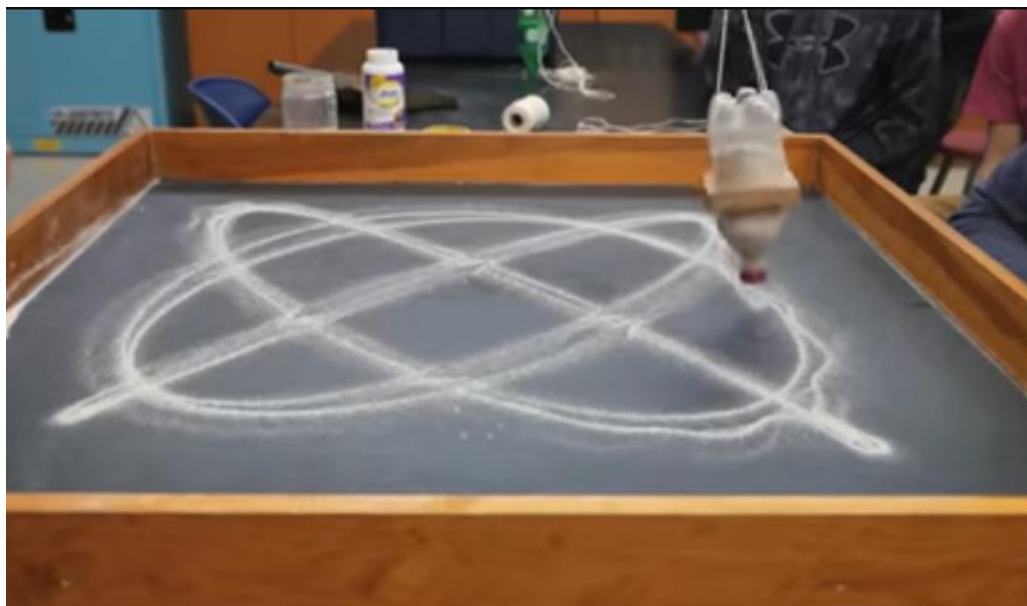


Рис. 2.9 Додавання 2-х коливань різних напрямків з різними періодами [51].



Рис.2.10 Суперпозиція взаємно перпендикулярних коливань з близькими періодами. Спостерігається затухання коливань [51].

Слід зазначити, що коливання такої системи не можна вважати гармонічними, і ми не отримаємо теоретично розрахованих фігур Лісажу.



Причин тому декілька. По-перше, коливання не можна вважати гармонічними через великі кути відхилення. По-друге, пляшка з піском не є точковою масою, до того ж при висипанні піску центр мас опускається. Крім того, напрямки коливань маятників не є строго перпендикулярними, і нарешті, у системі присутнє тертя, амплітуди коливань зменшуються, причому, по-різному для двох маятників.

**2.2.3 Рух двох зв'язаних консервативних осциляторів.** У п.2.2.1 ми розглядали систему з двома ступенями вільності, у якій відбуваються практично незалежні коливання у перпендикулярних напрямках.

Цікаво прослідкувати за рухом системи 2-х осциляторів, які зв'язані між собою пружними чи квазіпружними силами. Тут чітко спостерігається перекачування енергії від одного осцилятора до іншого. На рис.2.12 представлені приклади таких систем, де здійснюються коливання фізичних величин різної природи.

Якщо вивести з положення рівноваги перший осцилятор, він здійснює затухаючі коливання і нарешті зупиняється. А другий, що перебував у спокої, починає коливатись, збільшуючи амплітуду до максимальної, далі передає енергію першому. Оскільки система консервативна, так може тривати довго.

У початковий момент часу вся енергія зосереджена в першому осциляторі. Його коливання виступають в ролі *зовнішньої сили* для другого осцилятора. Під дією цієї сили амплітуда коливань другого осцилятора починає зростати. В силу консервативності системи зростання амплітуди коливань другого осцилятора призводить до зменшення амплітуди коливань першого осцилятора. Таким чином, в початкові моменти часу відбувається перекачування енергії від першого осцилятора до другого.

З часом сила, що діє з боку першого осцилятора на другий, стає протифазною до коливань, які збудилися в ньому в попередні моменти часу (оскільки коливання не гармонічні, і період залежить від амплітуди). З іншого боку, стає істотним зворотний вплив другого осцилятора на перший. Внаслідок цього починається перекачування енергії від другого осцилятора до

першого. Потім процес періодично повторюється. Це наглядно демонструють коливання двох зв'язаних математичних маятників на жорстких стрижнях (рис. 2.11).



Рис.2.11 Два зв'язані математичні маятники

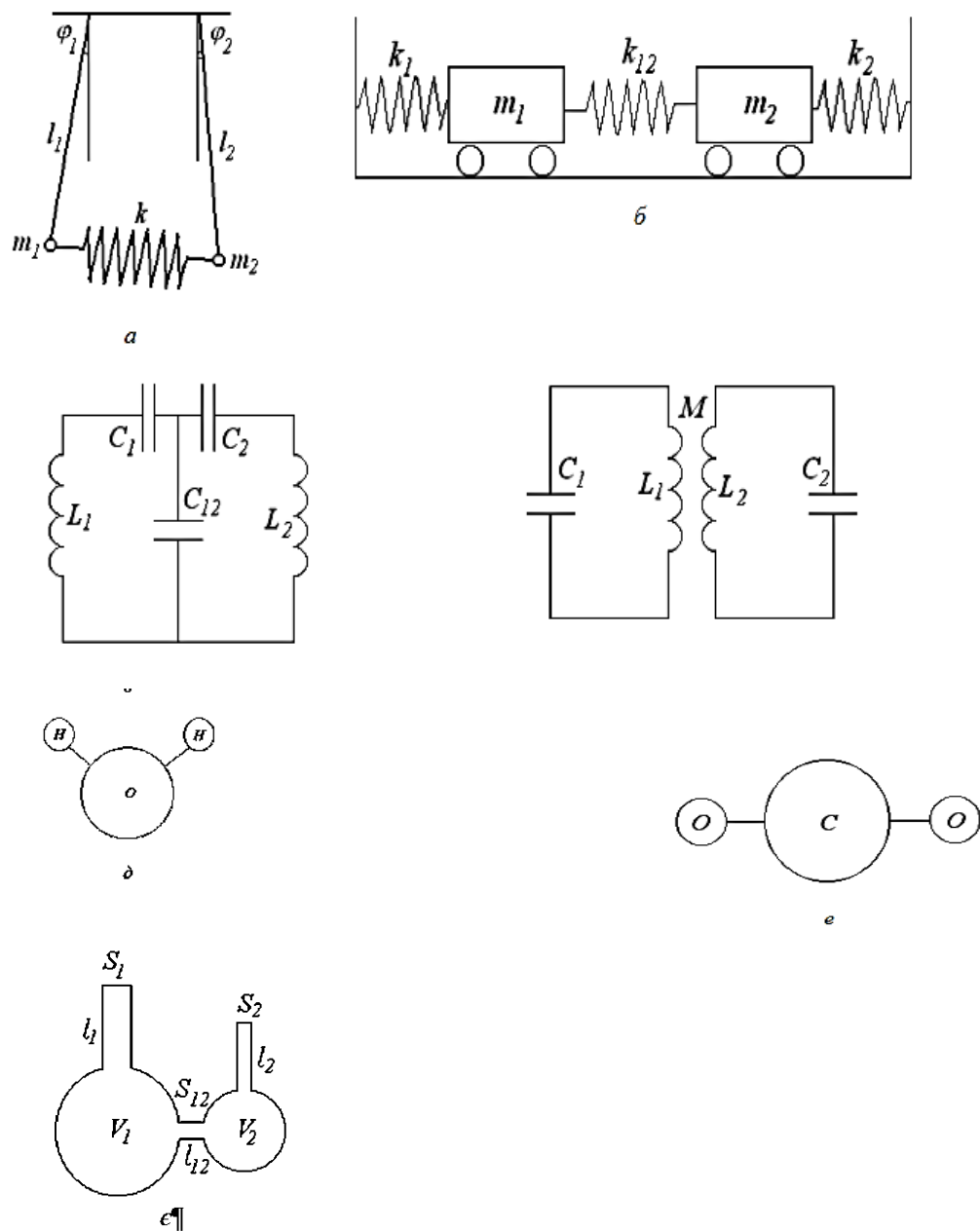
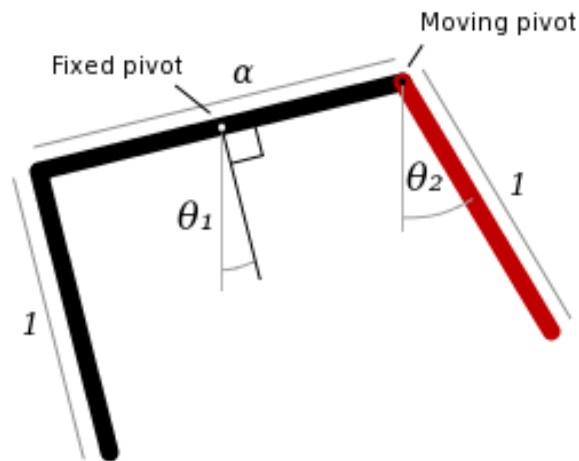


Рис.2.12. Приклади систем з багатьма ступенями вільності: а, б - зв'язані маятники, в, г - коливні контури з ємнісним та індуктивним зв'язком, д, е - триатомні молекули  $\text{H}_2\text{O}$  та  $\text{CO}_2$ , є - зв'язані акустичні резонатори [1].

#### 2.2.4 Подвійний фізичний маятник Ротта

Цікавим і непередбачуваним є рух подвійного фізичного маятника [46,47.49], одним з різновидів якого є маятник Ротта (рис.2.13).



### 2.13. Подвійний маятник Ротта.

Поєднані маятники — тобто два чи більше маятників, прикріплених один до одного — є системою, яка, як відомо, коливається хаотично, якщо амплітуди великі. Менш відомою є взаємодія, яка відбувається між резонансно пов'язаними маятниками при малих амплітудах коливань, що, на відміну від хаотичного руху, призводить до періодичної поведінки та періоду руху, значно більшого, ніж у будь-якого маятника окремо.

Маятник Ротта — це назва пари зв'язаних маятників із двома властивостями: по-перше, центри опори двох маятників горизонтальні, коли система перебуває в стабільній рівновазі, а по-друге, резонансні частоти маятника близькі до цілого співвідношення (зазвичай 2:1). Динаміку цієї системи вперше проаналізував Ніколаус Ротт [26], який також продемонстрував, що такий маятник можна моделювати за допомогою жорстких стержнів постійної маси на одиницю довжини у такій конфігурації, як на рис.2 13.

Щоб частота червоного маятника була в  $\lambda$  разів більша, ніж частота чорного, можна показати, що відношення довжини  $\alpha$  горизонтального стержня до одиничної довжини вертикальних стрижнів має бути дійсним коренем рівняння:

$$\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4(1 - \lambda^2) = 0$$

Поклавши відношення частот  $\lambda=2$  (у такому випадку досягається найсильніший зв'язок між осциляторами), ми отримуємо розв'язок  $\alpha \approx 1,2835670$ , довжина горизонтального стержня має бути приблизно у 1,3 рази більша, ніж вертикальних. На відео [52] можна спостерігати, як енергія передається від однієї частини маятника до іншої, особливо вражаючими і несподіваними є коливання з великим початковим відхиленням від положення рівноваги.

## ВИСНОВКИ

1. Коливальні процеси як рух частинок в обмеженому просторі чи зміна параметрів системи в обмеженому інтервалі, присутні у всіх галузях фізики від механіки до квантової фізики.
2. В середніх і вищих навчальних закладах характеристики коливань часто подаються як абстрактні поняття і не завжди засвоюються учнями і здобувачами освіти на належному рівні.
3. Ми показали, що на прикладі маятникових систем можна наочно пояснити поняття амплітуди, фази, періоду коливань. А також продемонструвати різні види коливань: лінійні, нелінійні, згасні, вимушені, параметричні автоколивання; коливання з одним та багатьма ступенями вільності.
4. У роботі ми підібрали видовищні експерименти з маятниками, які викликають зацікавленість учнів і прагнення пояснити інколи неочікуваний результат. Таке емоційне сприйняття сприяє більш глибокому засвоєнню матеріалу. Усі описані маятники можна виготовити у домашніх умовах чи на фізичному гуртку.
5. Ми розглянули всі етапи розрахунку і виготовлення хвильового маятника. Теоретично та практично довели, що у настольному варіанті приладу необхідно використовувати систему точного регулювання довжини підвісу, інакше синхронізувати фази усіх маятників у відповідні моменти не вдається. Без такої системи можна виготовити маятник висотою біля одного метра, тоді допустима абсолютна похибка довжини підвісу бути більшою.
6. Робота може бути корисною для вчителів, керівників гуртків, здобувачів вищої освіти і усіх, хто цікавиться фізикою.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Анісімов І.О. Коливання та хвилі. К.: «Київський університет», 2009. 399 с.
2. Антоняк О.Т., Стадник В.Й. Загальна фізика: підгрунтя оптики : навч. посібн. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2019. 216 с.
3. Бригінець В.П., Подласов С. О. Лекції з курсу загальної фізики. Коливання і хвилі К.: НТУУ «КПІ», 2013. 143 с.
4. Воробьев В. В., Киба С.П., Самойлов Н.Г. Колебания материальной точки. Кременчуг : КДПУ, 2000. 58 с.
5. Горбань І.С. Оптика. К.: Вища школа. 1979. 224 с.
6. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. Механіка, молекулярна фізика, термодинаміка. Київ, “Техніка”, 1999. 536 с.
7. Ковальов О. С. Малі коливання. І. Лінійні коливання : навч.-метод. посіб. / О. С. Ковальов та ін. Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2016. 112 с.
8. Козицький С.В., Курс загальної фізики : підручник у 6 т. / за загал. ред. В. А. Сминтини. Т. 1 : / С.В. Козицький, Д.Д. Поліщук. Механіка. Одеса : Астропринт, 2011. 472 с.
9. Козицький С.В., Поліщук Д.І. Механіка. Спеціальні питання (Коливання. Хвилі. Гідродинаміка. Акустика). Одеса: ОДМА, 1997. 120 с.
10. Козицький С.В., Поліщук Д.І. Основи механіки. – Одеса: Маяк, 1999. 248 с.
11. Король А.М., Андріяшко М.В. Фізика: Підручник. – Київ: «ІНКОС» центр навчальної літератури, 2006. – 344 с.
12. Косевич А. М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. К.: Наук. думка, 1989. 304 с.
13. Кушнір Р.М. Загальна фізика. Механіка. Молекулярна фізика. Навч. посібн. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2003. 404 с.
14. Михайленко В.І., Білоус В.М., Поповський Ю.М. Загальна фізика. К.: ІСДО, 1994. 528 с.

15. Пташенко О.О. Основи нелінійної фізики. Одеса: Астропринт, 2000. 108 с.
17. Пушак А.С. Механічні коливання і хвилі. Методичні вказівки та завдання з фізики. Львів: УАД, 2023. 61 с.
18. Фізика. Коливання і хвилі: навч. посібник / А. П. Поліщук, П. І. Чернега, Б. Ф. Лахін; за заг. ред. проф. А. П. Поліщука. Вид. 3-є., випр. і доп. К. : НАУ, 2017. 220 с.
19. Castelvechi Davide , Witze Alexandra . Einstein's gravitational waves found at last. Nature News. 11.02.2016, doi:10.1038/nature.2016.19361
20. Chaudhuri R.N. Waves and oscillations. New Delhi : New Age International (p) Limited, Publishers, 2010. 394 p.
21. Fitzpatrick Richard. Oscillations and Waves.  
<https://farside.ph.utexas.edu/teaching/315/Waves/Waveshtml.html>
22. Fowler M. Physics 152: Oscillations and Waves/  
<https://galileo.phys.virginia.edu/classes/152.mf1i.spring02/OscWavesIndex.htm>
23. Fox Smith Walter. Waves and Oscillations: A Prelude to Quantum Mechanics New York: Oxford University Press, 2010. 416.P.
24. Gebreselasie Daniel. Mechanics, Thermodynamics, Oscillations and waves. College physics i: notes and exercises. bookboon.com, 2015. 321 P.
25. Motion Mountain - The Adventure of Physics. V.1 Fall, flow and heat - classical physics.  
[https://www.motionmountain.net/classical.html?gclid=CjwKCAiA5L2tBhBTEiwAdSxJX3DqrmhAABjpTnHNvbPrvVhiM8EEjX\\_AgPeal3BotQXyu9IcdYwCsBoCdbwQAvD\\_BwE](https://www.motionmountain.net/classical.html?gclid=CjwKCAiA5L2tBhBTEiwAdSxJX3DqrmhAABjpTnHNvbPrvVhiM8EEjX_AgPeal3BotQXyu9IcdYwCsBoCdbwQAvD_BwE)
26. Rott, N. A multiple pendulum for the demonstration of non-linear coupling. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) 21, 570–582 (1970). <https://doi.org/10.1007/BF01587686>
27. Suzuki Masatsugu and Suzuki Itsuko S. Lecture Note on Oscillations and waves. <https://www.researchgate.net/profile/Masatsugu-Suzuki->



3/publication/269929933\_Lecture\_Note\_on\_Oscillations\_and\_waves/links/549994b20cf22a83139624b6/Lecture-Note-on-Oscillations-and-waves.pdf

28. Механічні коливання і хвилі-1 - Фізика. Електронний довідник.

[http://fizyka.inf.ua/Topics/Mehanika/Mehanichni\\_koluvannya\\_i\\_hvuli/1.html](http://fizyka.inf.ua/Topics/Mehanika/Mehanichni_koluvannya_i_hvuli/1.html)

29. Waves and Oscillations. Periodic & Oscillatory Motion.

[https://www.vssut.ac.in/lecture\\_notes/lecture1430261805.pdf](https://www.vssut.ac.in/lecture_notes/lecture1430261805.pdf)

30. Waves, Oscillations & Optics.

<https://physicaeducator.files.wordpress.com/2018/02/waves-optics-notes.pdf>

31. Introduction To Oscillations And Waves. [https://ocw.mit.edu/courses/res-8-](https://ocw.mit.edu/courses/res-8-009-introduction-to-oscillations-and-waves-summer-2017/pages/lecture-notes/)

009-introduction-to-oscillations-and-waves-summer-2017/pages/lecture-notes/

32. [https://www.youtube.com/watch?v=cjTczXq7hyc&ab\\_channel=HowToMechatronics](https://www.youtube.com/watch?v=cjTczXq7hyc&ab_channel=HowToMechatronics)

33. [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/College\\_Physics/College\\_Physics\\_1e\\_\(OpenStax\)/16%3A\\_Oscillatory\\_Motion\\_and\\_Waves](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/College_Physics/College_Physics_1e_(OpenStax)/16%3A_Oscillatory_Motion_and_Waves)

34. <https://www.khanacademy.org/science/physics/mechanical-waves-and-sound>

35. [https://www.austincc.edu/mmcgraw/files\\_2425/Chap\\_15Ha-Oscillations.pdf](https://www.austincc.edu/mmcgraw/files_2425/Chap_15Ha-Oscillations.pdf)

36. [https://www.physics.purdue.edu/~jones105/phys42200\\_Spring2013/notes/Phys42200\\_Lecture3.pdf](https://www.physics.purdue.edu/~jones105/phys42200_Spring2013/notes/Phys42200_Lecture3.pdf)

37. <https://ibphysics.org/topic4/Waves>

38. Механіка коливань та хвиль <https://fizika.dp.ua/тема-1-4/>

39. <https://youtu.be/08ueDogNkP8> Extraordinary Patterns of a Pendulum Wave

40. [https://www.youtube.com/watch?v=\\_8JMV1-\\_KKs&t=0s&ab\\_channel=NightHawkInLight](https://www.youtube.com/watch?v=_8JMV1-_KKs&t=0s&ab_channel=NightHawkInLight)

41. [https://www.youtube.com/watch?v=Q3Rn-](https://www.youtube.com/watch?v=Q3Rn-OuIzAw&ab_channel=ShawTVNanaimo)

[OuIzAw&ab\\_channel=ShawTVNanaimo](https://www.youtube.com/watch?v=Q3Rn-OuIzAw&ab_channel=ShawTVNanaimo)

42. [https://www.youtube.com/watch?v=vDtfWxL-](https://www.youtube.com/watch?v=vDtfWxL-AJg&ab_channel=MaxTurtonWorlds_Best_Ever_Pendulum_Wave)

[AJg&ab\\_channel=MaxTurtonWorlds Best Ever Pendulum Wave](https://www.youtube.com/watch?v=vDtfWxL-AJg&ab_channel=MaxTurtonWorlds_Best_Ever_Pendulum_Wave)

43. [https://www.youtube.com/watch?v=konzqbWnC-](https://www.youtube.com/watch?v=konzqbWnC-A&ab_channel=BrickCodeLabbyDawidMarasek)

[A&ab\\_channel=BrickCodeLabbyDawidMarasek](https://www.youtube.com/watch?v=konzqbWnC-A&ab_channel=BrickCodeLabbyDawidMarasek)

44. [https://www.youtube.com/watch?v=Ss7Sw1Fz-nI&ab\\_channel=Exploratorium](https://www.youtube.com/watch?v=Ss7Sw1Fz-nI&ab_channel=Exploratorium)

45. <https://www.exploratorium.edu/snacks/pendulum-snake>
46. <https://www.exploratorium.edu/snacks/coupled-resonant-pendulums>
47. Is it Possible to Predict Randomness? The Double Pendulum Experiment  
[https://www.youtube.com/watch?v=4xViPStT5II&ab\\_channel=TheActionLab](https://www.youtube.com/watch?v=4xViPStT5II&ab_channel=TheActionLab)
48. The Fastest Track—The Tautochrone Curve  
[.https://www.youtube.com/watch?v=zyGQjaTa8NE](https://www.youtube.com/watch?v=zyGQjaTa8NE)
49. <https://www.exploratorium.edu/snacks/coupled-resonant-pendulums-2>
50. [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/39/Fluorescence\\_in\\_calcite.jpg/800px-Fluorescence\\_in\\_calcite.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/39/Fluorescence_in_calcite.jpg/800px-Fluorescence_in_calcite.jpg)
51. [https://www.youtube.com/watch?v=uPbzhxYTioM&ab\\_channel=BruceYeany](https://www.youtube.com/watch?v=uPbzhxYTioM&ab_channel=BruceYeany)
52. [https://www.youtube.com/watch?v=dhZxdV2naw8&ab\\_channel=MariaZ.Haku](https://www.youtube.com/watch?v=dhZxdV2naw8&ab_channel=MariaZ.Haku)  
ba