КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД ЛЕВІНА – ГАЛЬОРКІНА ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ВІД СИЛЬНО ОСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ

Пастернак Ярослав Михайлович, Корнійчук Андрій Володимирович
Волинський національний університет імені Лесі Українки, iaroslav.pasternak@vnu.edu.ua
Korniichuk.Andrii@vnu.edu.ua

Інтеграли від сильно осцилюючих функцій (highly oscillatory integrals) часто зустрічаються у задачах математичної фізики [1–3], та в основному, пов'язані з пошуком розв'язків динамічних задач класичної та квантової механіки, електромагнетизму тощо. Зазвичай, такі інтеграли не зводяться до аналітичних виразів, тому для їхнього обчислення будують певні числові квадратурні формули. Зрозуміло також, що класичні квадратури із використанням апроксимації підінтегрального виразу многочленом не в змозі забезпечити отримання результатів із належною точністю.

Розглянемо інтеграл

$$I(\omega)=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega g(x)}\,dx, \tag{1}$$

де $f(x)$ та $g(x)$ – деякі C_1-неперервні диференційовні на інтервалі $[-1,1]$ дійсні функції.

Левін [1] запропонував звести обчислення інтегралу (1) до розв'язування дифенціального рівняння

$$L(\phi)=\frac{d\phi(x)}{dx}+\mathrm{i}\omega\frac{dg(x)}{dx}\phi(x)-f(x)=0. \tag{2}$$

Якщо розв'язок (2) відомий, то інтеграл (1) обчислюється так:

$$I(\omega)=\phi(1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega g(1)}-\phi(-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega g(-1)}. \tag{3}$$

Левін [1] запропонував розв'язувати (2) шляхом апроксимації функції $\phi(x)$ одночленами із подальшим застосуванням методу колокацій для визначення невідомих коефіцієнтів апроксимації. З огляду на відсутність у схемі Левіна початкової умови до рівняння (2), у результаті отримано погано обумовлені системи лінійних рівнянь. Натомість, Ма та Лю [2] запропонували апроксимувати розв'язок (2) поліномами Чебишева та розглядати задачу у відповідному Гільбертовому просторі, використовуючи для розв'язку скінченну частину цієї апроксимації. У результаті отримали добре обумовлену систему рівнянь. Молабаграмі [3] з цією ж метою запропонував використовувати метод Гальоркіна, проте отримана в [3] обчислювальна схема є напіваналітичною і складною до застосування у загальному випадку.

У цьому дослідженні використано переваги спектральних методів та схеми Гальоркіна та запропоновано апроксимувати невідому функцію $\phi(x)$ та функції $f(x)$, $g(x)$ ортогональними поліномами Лежандра $P_k(x)$

$$\phi(x)=\sum_{k=0}^{n}\phi_k P_k(x),\; f(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k P_k(x),\; g(x)=\sum_{k=0}^{n} g_k P_k(x). \tag{4}$$

Невідомі коефіцієнти ϕ_k при цьому визначаються за схемою Гальоркіна

$$\int_{-1}^{1} L(\phi)P_k(x)\,dx=0 \quad (k=0,1,...,n). \tag{5}$$

З урахуванням умов ортогональності поліномів Лежандра

$$\int_{-1}^{1} P_k(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2k+1}\delta_{km} \quad (6)$$

та того, що їхній добуток можна подати у вигляді [4]

$$P_p(x) P_q(x) = \sum_{s=0}^{(p+q)/2} A_{2s}(p,q) P_{p+q-2s}(x), \quad (7)$$

систему рівнянь (5) зведено до такого вигляду:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(D_{mk} + \mathrm{i}\omega \sum_{p=0}^{n} B_{mkp} g_p \right)\phi_k = f_m \quad (m = 0,1,\ldots,n). \quad (8)$$

Тут

$$D_{jk} = \begin{cases} 2j+1, & k > j \wedge \left((k+j) \bmod 2 \right) = 1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

є оператором (матрицею) диференціювання поліномів Лежандра,

$$B_{mkp} = \sum_{q=0}^{n} A_{k+q-m}(k,q) D_{qp}, \quad (10)$$

а відповідно до [4]

$$A_{2s}(p,q) = \frac{2p+2q-4s+1}{2p+2q-2s+1}\frac{\lambda_s \lambda_{p-s} \lambda_{q-s}}{\lambda_{p+q-s}}, \quad \lambda_s = \frac{(2s)!}{2^s s! s!}. \quad (11)$$

Величини f_k, g_k запропоновано обчислювати шляхом апроксимації функцій $f(x)$, $g(x)$ поліномами Лежандра за певною системою точок $x_k \in [-1,1]$ $(k = 0,1,\ldots,n)$. Тоді

$$f_k = \sum_{j=0}^{n} T_{kj} f(x_j), \quad g_k = \sum_{j=0}^{n} T_{kj} g(x_j), \quad (12)$$

де

$$T_{kj} = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} L_j(x) P_k(x)\, dx \quad (13)$$

і

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \quad (14)$$

є поліномами Лагранжа для обраної системи точок $x_k \in [-1,1]$.

Оскільки підінтегральним виразом у (13) є многочлен степеню не більшого за $2n$, то коефіцієнти T_{kj} можуть бути обчислені точно за допомогою квадратури Ґаусса із щонайменше $n+1$ вузлами (що є точною для поліномів степеню $2n+1$).

Отже, запропонована квадратурна формула дає можливість числово обчислити інтеграл (1) як

$$I(\omega) \approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega g(1)} \sum_{k=0}^{n} \phi_k - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega g(-1)} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \phi_k \quad (15)$$

за значеннями $f(x_k)$, $g(x_k)$ функцій $f(x)$ у системі точок $x_k \in [-1,1]$ $(k = 0,1,\ldots,n)$. З метою уникнення ефекту Рунге за останню можна вибрати, наприклад, систему вузлів Ґаусса – Чебишова – Лобатто $x_k = -\cos(k\pi/n)$.

1. Levin D. Procedures for computing one- and two-dimensional integrals of functions with rapid irregular oscillations. *Mathematics of Computation*, 1982. Vol. 38, No. 158. P. 531–538.
2. Ma J., Liu H. A well-conditioned Levin method for calculation of highly oscillatory integrals and its application. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018. 342. P. 451–462.
3. Molabahrami A. Galerkin–Levin method for highly oscillatory integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017. 321. P. 499–507.
4. Dougall J. The product of two Legendre polynomials. *Glasgow Math. J.* 1953. 1 (3). P. 121–125.