Волинський національний університет імені Лесі Українки

Кафедра теоретичної та комп'ютерної фізики

імені А. В. Свідзинського

Федосов С. А., Захарчук Д. А., Сахнюк В. Є., Шигорін П. П.

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Курс лекцій

Луцьк

2023

УДК 539.2
Ф-33

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 7 від 15 березня 2023 р.).

Рецензенти: ***Ящинський Л. В.*** – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри фізики та вищої математики Луцького НТУ;
Федонюук А. А. – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри загальної математики та методики навчання інформатики ВНУ імені Лесі Українки.

Ф 33 Федосов С. А., Захарчук Д. А., Сахнюк В. Є., Шигорін П. П. **Основи математичного аналізу** : курс лекцій. Луцьк : Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки, 2023. 25 с.

Курс лекцій «Основи математичного аналізу» – складова комплексу робочих матеріалів створених для забезпечення якісної підготовки фахівців галузей знань 01 Освіта/Педагогіка, 10 Природничі науки, технічних і медичних спеціальностей. Матеріал навчального видання може бути використаний як окремий змістовий модуль навчальних дисциплін «Вступ до фаху», «Фізика», «Біофізика», «Медична фізика», «Вища математика», «Математичний аналіз» або ж як окрема вибіркова дисципліна навчального плану підготовки здобувачів освітніх ступенів «бакалавр» і «магістр». Курс лекцій містять набір матеріалів необхідних для організації повноцінної аудиторної та самостійної роботи здобувачів вищої освіти та рекомендовано використовувати перед опануванням навчальних дисциплін «Фізика», «Біофізика», «Медична фізика» тощо.

Навчальне видання відповідає чинним освітнім програмам підготовки й рекомендовано бакалаврам спеціальностей 014 «Середня освіта» (спеціалізації 014.08 Середня освіта (Фізика)), 104 «Фізика та астрономія», 105 «Прикладна фізика та наноматеріали», а також буде корисним у використанні здобувачам освіти спеціальностей галузей природничих, технічних і медичних наук.

УДК 539.2

ЗМІСТ

ВСТУП

У навчальному виданні «Основи математичного аналізу : курс лекцій» коротко викладені деякі питання вищої математики, а саме: елементи диференціального числення, елементи інтегрального числення, поняття про диференціальні рівняння. Обсяг викладення зазначених питань визначався так, щоб забезпечити студентам закладів вищої освіти набуття того рівня знань з вищої математики, який потрібен для наступного засвоєння інших розділів курсів «Вища математика», «Математичний аналіз», «Фізика», «Біофізика», «Медична фізика» тощо. Враховуючи, що частина студентів одержала повну середню освіту у закладах загальної середньої освіти, а частина в спеціальних закладах загальної середньої освіти, закладах професійної (професійно-технічної), фахової передвищої, закладах спеціалізованої освіти (мистецький ліцей, спортивний ліцей, військовий ліцей, науковий ліцей), матеріал, що викладається в навчальному виданні, частково містить повторення матеріалу, який вивчають у загальноосвітніх школах.

1. ОСНОВИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

1.1. Функція, види функцій та границя функції

Перш ніж перейти до викладення матеріалу з диференціального числення, є за доцільне нагадати такі поняття, як функція, види функцій та границя функції.

Поняття функції, як правило, спочатку вводиться для однозначних функцій. *Змінна величина y називається функцією незалежної змінної величини x, якщо будь-якому певному значенню величини x (з безлічі її можливих значень) відповідає певне значення величини y*. Величина x при цьому називається аргументом. Наявність функціональної залежності між величинами y і x зазвичай позначається так:

$$y = f(x).$$

Якщо $f(-x) = -f(x)$, то $y = f(x)$ – *непарна функція* x. Якщо $f(-x) = f(x)$, то $y = f(x)$ – *парна функція* x. Якщо при $y = f(x)$ $x = \varphi(y)$, то функція $\varphi(y)$ – *обернена функція* для $f(x)$.

Нехай a й A – деякі числа. *Функція $f(x)$ має границю A при x, що прямує до a, якщо для кожного додатного числа ε існує таке додатне число δ, що при $|x-a| < \delta$ функція $f(x)$ визначена та $|f(x) - A| < \varepsilon$*. Позначається границя функції так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

1.2. Похідна функції

Після визначення поняття границі функції можна перейти до визначення поняття похідної функції.

Нехай $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ – це *приріст функції* $y = f(x)$, пов’язаний з приростом аргументу Δx. Тоді *похідна функції* y *по аргументу* x *(звичайно позначається* y'*) – це границя відношення приросту функції до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу нескінченно малий*:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Використовуються й інші позначення похідної:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Розглянемо геометричне тлумачення похідної. *Значення похідної* y' *при* $x = x_0$ *дорівнює тангенсові кута між дотичною до графіка функції* $y = f(x)$*, проведеної в точці* x_0*, і віссю абсцис* (див. рис. 1.1).

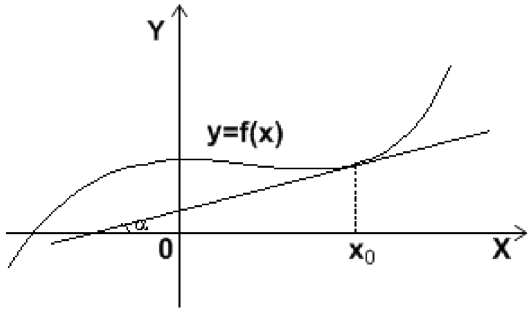

Рис. 1.1.

Для викладення матеріалу наступних розділів навчальних дисциплін важливим є фізичний зміст похідної. В окремому випадку, коли незалежною змінною (аргументом) є час, тобто $x = t$, *похідна* y *по* t *(зазвичай позначається* $\dot{y}$*) дорівнює швидкості зміни функції* y. *Наприклад*, якщо y – координата, то $\dot{y}$ – швидкість; якщо y – швидкість, то $\dot{y}$ – прискорення; якщо y – заряд, що протікає через поперечний переріз провідника, то $\dot{y}$ – сила струму в цьому провіднику.

Виходячи з визначення похідної, можна вивести її властивості та одержати формули для похідних деяких елементарних функцій, а саме:

- Нехай C – стале число (константа). Тоді $C' = 0$, тобто *похідна константи дорівнює нулю*.
- Нехай $u(x)$ і $\upsilon(x)$ – функції змінної x, $y = u(x) \pm \upsilon(x)$. Тоді $y' = [u(x) \pm \upsilon(x)]' = u'(x) \pm \upsilon'(x)$, тобто *похідна алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій*.
- Нехай $y = u(x) \cdot \upsilon(x)$. Тоді $y' = u'(x) \cdot \upsilon(x) + u(x) \cdot \upsilon'(x)$, тобто *похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутку похідної першої функції на другу функцію та добутку першої функції на похідну другої функції*.

Якщо маємо добуток трьох або більше функцій, то похідна такого добутку обчислюється як сума трьох або більше доданків відповідно, кожний з яких дорівнює добуткові похідної однієї з цих функцій на інші функції. Наприклад, якщо функція у є добутком трьох функцій ($y = u(x)\cdot \upsilon(x)\cdot \omega(x)$), то

$$y' = [u(x)\cdot \upsilon(x)\cdot \omega(x)]' = u'(x)\cdot \upsilon(x)\cdot \omega(x) + u(x)\cdot \upsilon'(x)\cdot \omega(x) + u(x)\cdot \upsilon(x)\cdot \omega'(x).$$

- Нехай $y = C\cdot u(x)$, де C – сталий множник. Тоді $y' = C\cdot u'(x)$, тобто *сталий множник можна винести за знак похідної*.
- Нехай $y = \dfrac{u(x)}{\upsilon(x)}$. Якщо знаменник функції не дорівнює нулю ($\upsilon(x) \neq 0$), то

$$y' = \frac{u'(x)\cdot \upsilon(x) - u(x)\cdot \upsilon'(x)}{\upsilon^2(x)},$$

тобто похідна частки двох функцій дорівнює відношенню, чисельник якого дорівнює різниці між добутком похідної чисельника частки на знаменник частки і добутком чисельника частки на похідну знаменника, а знаменник цього відношення дорівнює квадрату знаменника частки функцій.

Розглянемо тепер похідні деяких елементарних функцій:

- $y = x^n$; $\quad y' = n\cdot x^{n-1}$.
- $y = \ln x$; $\quad y' = \dfrac{1}{x}$.
- $y = \sin x$; $\quad y' = \cos x$.
- $y = \cos x$; $\quad y' = -\sin x$.
- $y = \mathrm{tg}\, x$; $\quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
- $y = \mathrm{ctg}\, x$; $\quad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
- $y = \arcsin x$; $\quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $y = \arccos x$; $\quad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $y = \mathrm{arctg}\, x$; $\quad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
- $y = \mathrm{arcctg}\, x$; $\quad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.
- $y = a^x$ (a – деяке додатне число); $\quad y' = a^x\cdot \ln a$.

Якщо $a = e$ (e – основа натурального логарифма, $e \approx 2{,}7$), то

- $y = e^x$; $\quad y' = e^x$.

При обчисленні похідних варто пам'ятати, що

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}; \qquad \frac{1}{x^n} = x^{-n}; \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Тому

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{n\cdot x} \quad \text{(зокрема, } \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\text{);}$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (-n)\cdot x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}} \quad \text{(зокрема, } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\text{);}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} = \frac{\log_a e}{x} \quad \text{(зокрема, } (\lg x)' = \frac{1}{x\ln 10} = \frac{\lg e}{x} \approx \frac{0{,}43}{x}\text{).}$$

1.3. Методики обчислення похідної складної функції

Перейдемо тепер до методики обчислення похідної *складної функції*. Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, f й φ – деякі функції. У цьому випадку величина y є складною функцією незалежної змінної x, і кажуть, що функція y залежить від x за допомогою *проміжної змінної* u. Похідну складної функції знаходять за формулою

$$y' = y'(u)\cdot u'(x),$$

де y' – похідна y по x, $y'(u)$ – похідна y по u, $u'(x)$ – похідна u по x. Таким чином, *похідна складної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжній змінній на похідну проміжної змінної по незалежній змінній*.

Приклад 1. Нехай $y = 2^{\sin x}$. Тут $y = 2^u$; $u = \sin x$. Тоді

$$y'(u) = 2^u \cdot \ln 2;\ u'(x) = \cos x \text{ і } y' = 2^{\sin x}\cdot \ln 2\cdot \cos x.$$

Розглянули випадок, коли складна функція містила одну проміжну змінну (двоступінчаста складна функція). Розглянута методика обчислення похідної складної функції може бути легко поширена на випадок довільного числа проміжних змінних. Як приклад розглянемо випадки двох та трьох проміжних змінних (випадки трьох- і чотириступінчастих функцій). Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(\upsilon)$, $\upsilon = \psi(x)$, то $y' = f'(u)\cdot\varphi'(\upsilon)\cdot\psi'(x)$. Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(\upsilon)$, $\upsilon = \psi(\omega)$, $\omega = \xi(x)$, то $y' = f'(u)\cdot\varphi'(\upsilon)\cdot\psi'(\omega)\cdot\xi'(x)$.

Приклад 2. Нехай $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$. Тоді

$$y' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Розглянемо тепер похідні вищих порядків. Якщо змінна y є функцією змінної x ($y = f(x)$), то похідна функції y (y') також є функцією x ($y' = \varphi(x)$). Від функції $\varphi(x)$, у свою чергу, можна знайти похідну. *Похідна функції, що є похідною первинної функції $y = f(x)$, називається похідною другого порядку y по x, або другою похідною y по x*. Для неї використовуються такі позначення $y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$. Зі сказаного вище зрозуміло також, що $y'' = \varphi'(x)$. Аналогічно можна ввести поняття *похідних вищих порядків* y по x, тобто похідних третього, четвертого, п’ятого і скільки завгодно вищих порядків. Вони позначаються відповідно $y''', y^{IV}, \ldots, y^{(n)}$.

Приклад 3. Нехай $y=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}$. Тоді

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}};\; y''=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}};\; y'''=-\frac{3}{8}x^{-\frac{3}{2}};\; y^{IV}=\frac{9}{16}x^{-\frac{5}{2}} \text{ та ін.}$$

Дотепер розглядали функції, що залежать від одного аргументу. Однак функція може залежати від декількох аргументів. *Наприклад*, запис $z=f(x,y)$ є позначенням того, що змінна z є функцією двох аргументів: x і y, запис $u=f(x,y,z,t)$ – позначенням того, що змінна u є функцією чотирьох аргументів: x, y, z і t. Приріст значення функції декількох змінних може відбуватися за рахунок приросту кожного з аргументів.

Нехай Δz_y і Δz_x – прирости функції $z=f(x,y)$ у випадках, коли величина y змінюється на Δy при сталому x та коли величина x змінюється на Δx при сталому y відповідно. Тоді ці прирости – це *частинні прирости* функції двох змінних при фіксованому значенні одного з аргументів (x або y відповідно). Отже, для функцій двох змінних можуть бути знайдені дві похідні, а саме: похідна z по y та похідна z по x. Такі похідні називаються *частинними похідними*. Частинна похідна z по y позначається z'_y або $\frac{\partial z}{\partial y}$, або $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ та визначається формулою

$$z'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z_y}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y};$$

частинна похідна z по x позначається z'_x, або $\frac{\partial z}{\partial x}$, або $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ та визначається формулою

$$z'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x};$$

Правила знаходження частинних похідних ті самі, що й у випадку звичайних похідних, але, якщо беремо частинну похідну по якомусь аргументу, то всі інші аргументи при цьому вважаються сталими.

Приклад 4. Нехай $z=x^y+3\ln x-2\sin y$. Тоді

$$z'_x=yx^{y-1}+\frac{3}{x};\qquad z'_y=x^y\cdot\ln x-2\cdot\cos y.$$

1.4. Диференціал функції

Наступним важливим поняттям, без якого неможливе викладення основ вищої математики, є поняття *диференціала функції*. За визначенням *диференціал функції – це головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту її аргументу.* Для функції $y = f(x)$ диференціал позначається dy або $df(x)$ та обчислюється за формулою

$$dy = y'dx,$$

де dx – диференціал аргументу**.** Для аргументу (незалежної змінної) поняття диференціала і приросту збігаються. З формули, що визначає диференціал функції, зрозуміло, що знаходження диференціала функції зводиться до знаходження похідної цієї функції та множення її на диференціал аргументу.

Приклад 5. Нехай $y = 3^{\operatorname{tg} x}$. Тоді

$$y' = 3^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{і} \quad dy = \frac{3^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 3}{\cos^2 x} dx.$$

З поняттям похідної вищого порядку пов’язане і поняття *диференціала вищого порядку*. Диференціал другого порядку для функції $y = f(x)$ позначається $d^2 y$ й обчислюється за формулою

$$d^2 y = y'' dx^2.$$

Аналогічно для диференціалів вищих порядків можна записати:

$$d^3 y = y''' dx^3;$$

$$d^4 y = y^{IV} dx^4;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

Розглянемо приклад обчислення диференціалів вищих порядків.

Приклад 6. Нехай $y = e^{\sin x}$. Тоді

$$y' = e^{\sin x} \cdot \cos x; \qquad y'' = e^{\sin x} \cdot \cos^2 x - e^{\sin x} \cdot \sin x$$

$$\text{і} \qquad d^2 y = \left(e^{\sin x} \cdot \cos^2 x - e^{\sin x} \cdot \sin x\right) dx^2.$$

Для функцій декількох змінних поряд з поняттям частинної похідної вводиться і поняття *частинного диференціала*. *Частинний диференціал функції по деякому аргументу є добутком частинної похідної функції по цьому аргументу на диференціал цього самого аргументу*. *Наприклад*, для функції $z = f(x, y)$ існують два частинних диференціала: по x і по y

$$dz_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx \quad \text{і} \quad dz_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy,$$

де dz_x і dz_y – частинні диференціали z по x та по y відповідно.

Для функції $u = f(x, y, z)$ існують три частинні диференціали: по x, по y і по z

$$du_x = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx, \qquad du_y = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy \qquad \text{і} \qquad du_z = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

Сума всіх частинних диференціалів функції декількох змінних є повним диференціалом цієї функції. Так, у розглянутих вище прикладах

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad \text{і}$$

$$du = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz,$$

де dz і du – повні диференціали функцій z і u відповідно.

Розглянемо приклад обчислення повного диференціала функції декількох змінних.

Приклад 7. Нехай $z = x^2 y^5$. Тоді

$$dz = 2xy^5 dx + 5x^2 y^4 dy.$$

Важливою є можливість застосування диференціала для наближених обчислень. Як зазначалося, диференціал – це головна частина приросту функції, причому, чим менший приріст аргументу, тим менша різниця між диференціалом функції та приростом функції. Тому для функції $y = f(x)$ при малих Δx можна записати $\Delta y \approx dy = y' dx$. З іншого боку, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; $dx = \Delta x$. Звідси випливає формула, яка часто використовується при наближених обчисленнях:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Ця формула застосовується в тому випадку, якщо значення $f(x)$ і $f'(x)$ відомі для деякого x_0 ($f(x_0)$ і $f'(x_0)$ відповідно), та необхідно обчислити значення $f(x_0 + \Delta x)$, де Δx – мале число.

Розглянемо застосування описаного підходу при наближених обчисленнях.

Приклад 8. Нехай необхідно обчислити $\ln(1{,}02)$. У цьому випадку

$$f(x_0 + \Delta x) = \ln(1{,}02); \qquad f(x) = \ln x; \qquad f'(x) = \frac{1}{x}; \quad x_0 = 1; \qquad \Delta x = 0{,}02;$$

$$\ln(1{,}02) = \ln(1 + 0{,}02) = \ln(1) + \frac{1}{1} \cdot 0{,}02 = 0 + 0{,}02 = 0{,}02.$$

1.5. Диференціальні оператори

Для опису різних фізичних явищ (дифузія, електромагнітні явища та ін.) можуть використовуватися так звані *диференціальні оператори*, а саме: *градієнт скалярної функції* (grad), *дивергенція векторної функції* (div) і ротор векторної функції (rot).

Градієнт скалярної функції – це вектор, проекції якого на осі OX, OY і OZ дорівнюють частинним похідним цієї функції по аргументах x, y і z відповідно. Таким чином, для скалярної функції u

$$\operatorname{grad}\vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

де $\operatorname{grad}\vec{u}$ – градієнт функції u, а $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ – вектори одиничної довжини (*орти*), спрямовані вздовж осей OX, OY і OZ відповідно.

У кожній точці простору вектор градієнта скалярної функції спрямований убік найшвидшого зростання цієї функції, а його модуль дорівнює швидкості зростання функції в цьому напрямку.

Дивергенція – це скаляр, величина якого обчислюється за формулою:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

де $\vec{A}$ – деяка векторна функція (величина).

У деяких задачах фізики дивергенція є питомою потужністю джерел векторної величини. В останній формулі такою величиною є величина $\vec{A}$.

Ротор – це вектор, який обчислюється за формулою:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Формула для градієнта знадобиться при розгляді питань механіки рідин та у деяких інших розділах фізики.

Формули для дивергенції та ротора потрібні для викладення питань, пов’язаних з електромагнітними явищами.

2. ОСНОВИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

2.1. Невизначений інтеграл

Операція, обернена до операції диференціювання, тобто операція обчислення функцій за відомим диференціалом цих функцій (відомою похідною цих функцій), називається інтегруванням. Нагадаємо основні поняття, що стосуються інтегрування.

Нехай функції $F(x)$ і $f(x)$ пов’язані між собою співвідношенням $F'(x) = f(x)$. У цьому випадку функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$. Для однієї і тієї ж $f(x)$ існує безліч (нескінченно велике число) первісних функцій. *Наприклад*, для функції $f(x) = 4x^3$ первісними є функції x^4, $x^4 + 5$, $x^4 - 3$ та ін. Очевидно, що, якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, то будь-яка функція виду $F(x) + C$, де C – довільна константа, також є первісною функції $f(x)$, оскільки $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$. Таким чином, усі первісні тієї самої функції відрізняються одна від одної на константу.

Сукупність усіх первісних тої самої функції (нехай, $f(x)$), що відрізняються одна від одної на довільну константу (C), називається *невизначеним інтегралом*, що позначається

$$\int f(x)dx.$$

У цьому позначенні функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією*, а вираз $f(x)dx$ – підінтегральним виразом. Якщо $F'(x)=f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Для обчислення невизначеного інтеграла треба знати його властивості, а саме:

- якщо A – константа, то

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx,$$

тобто *сталий множник можна виносити за знак інтеграла*;

- нехай $u(x)$ і $\upsilon(x)$ – деякі функції x. Тоді

$$\int [u(x)\pm\upsilon(x)]dx = \int u(x)dx \pm \int \upsilon(x)dx,$$

тобто *інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів цих функцій*;

- $d\int f(x)dx = f(x)dx$,

тобто *диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу*;

- $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$,

тобто *похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції*;

- $\int dF(x)dx = F(x)+C$,

тобто *інтеграл від диференціала функції дорівнює сумі цієї функції та довільної константи*. Звідси, зокрема, випливає, що

- $\int dx = x + C$.

Враховуючи, що операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання, формули обчислення деяких найпростіших інтегралів можна одержати з формул обчислення похідних елементарних функцій:

- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, (якщо $n \neq -1$);
- $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
- $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;
- $\int e^x dx = e^x + C$;
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
- $\int \cos x dx = \sin x + C$;
- $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$;
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$.

Для більшості підінтегральних функцій невизначений інтеграл не може бути виражений через елементарні функції. У тих випадках, коли це все ж таки можливо, невизначений інтеграл знаходять, зводячи його до відомих (табличних) інтегралів. У деяких випадках цього можна досягти, здійснюючи алгебраїчні перетворення підінтегрального виразу. При цьому можуть також використовуватися перші дві властивості невизначеного інтеграла.

Приклад 1.

$$\int \frac{3x^6 + x^2 \ln 2 - 7x + \sqrt{2} - x\cos x + 5x \cdot 2^x}{x} dx =$$

$$= 2\int x^5 dx + \ln 2\int x dx - 7\int dx + \sqrt{2}\int \frac{dx}{x} - \int \cos x dx + 5\int 2^x dx =$$

$$= \frac{3x^6}{6} + \frac{x^2 \ln 2}{2} - 7x + \sqrt{2}\ln|x| - \sin x + \frac{5 \cdot 2^x}{\ln 2} + C.$$

У деяких випадках звести вихідний інтеграл до табличного вигляду можна, використовуючи *метод заміни змінної* (*метод підстановки*). При цьому вводиться нова змінна (наприклад, t), що пов’язана функціональною залежністю з початковою змінною x, а саме $t = \varphi(x)$ або $x = \psi(t)$, де $\psi(t)$ – функція, обернена $\varphi(x)$. Потім установлюється зв’язок між dt і dx: $dx = \psi'(t)dt$ (або $dt = \varphi'(x)dx$). Підінтегральний вираз перетворюють так, щоб після перетворення він залежав від t і не залежав від x:

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)dt.$$

Якщо функціональний зв’язок між t і x обраний правильно, то інтеграл, що одержаний в результаті перетворення, виявляється або табличним, або зводиться до табличного (табличних) за допомогою алгебраїчних перетворень.

Приклад 2.

$$\int x^2 e^{x^3-2} dx \left\| \begin{array}{l} t = x^3 - 2 \\ dt = 3x^2 dx \\ x^2 dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right\| = \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3-2} + C.$$

Іноді невизначений інтеграл можна знайти, використовуючи *метод інтегрування частинами*. Нехай $u = u(x)$ і $\upsilon = \upsilon(x)$ є функціями x. Основна формула методу інтегрування частинами має такий вигляд:

$$\int u d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du .$$

Часто буває так, що інтеграл $\int u d\upsilon$ за допомогою розглянутих раніше способів не зводиться до табличних, а інтеграл $\int \upsilon du$ або є табличним, або зводиться до табличного інтеграла (до табличних інтегралів). Саме у цьому випадку і застосовується метод інтегрування частинами.

Зазначимо важливі окремі випадки застосування інтегрування частинами. З використанням цього методу зазвичай знаходять інтеграли виду:

$\int x^n e^x dx$	$\int x^n \ln x dx$
$\int x^n a^x dx$	$\int x^n \arcsin x dx$
$\int x^n \sin x dx$	$\int x^n \mathrm{arctg}\, x dx$
$\int x^n \cos x dx$	
$u = x^n$	$d\upsilon = x^n dx$

Інтеграли, що стоять у лівому стовпчику, можна знайти при цілих невід’ємних значеннях n, причому інтегрування частинами необхідно проводити n разів. У цих інтегралах приймають $u = x^n$, а що стосується іншої частини підінтегрального виразу, то її приймають за $d\upsilon$. Інтеграл виду $\int x^n \ln x dx$ можна знайти при будь-якому значенні n, але при $n = -1$ його знаходять методом заміни змінної. Інтеграли виду $\int x^n \arcsin x dx$ і $\int x^n \mathrm{arctg}\, x dx$ можна знайти при цілих невід’ємних n, але при цьому приймають $d\upsilon = x^n dx$, а частина, що залишилась після цього від підінтегрального виразу, приймається за u.

Приклад 3.

$$\int x \cos x dx \left\| \begin{matrix} u = x \\ d\upsilon = \cos x dx \\ du = dx \\ \upsilon = \sin x \end{matrix} \right\| = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C .$$

Приклад 4.

$$\int x^4 \ln x dx \left\| \begin{array}{l} u = \ln x \\ d\upsilon = x^4 dx \\ du = \frac{1}{x} dx \\ \upsilon = \frac{x^5}{5} \end{array} \right\| = \ln x \cdot \frac{x^5}{5} - \int \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^5 \ln x}{5} - \int \frac{x^4}{5} dx = \frac{x^5 \ln x}{5} - \frac{x^5}{25} + C.$$

2.2. Визначений інтеграл

Крім невизначеного інтеграла, у вищій математиці використовується *визначений інтеграл*. Позначення визначеного інтеграла відрізняється від позначення невизначеного інтеграла тим, що під та над знаком інтеграла розміщені два числа (нехай a і b відповідно), які називаються *межами інтегрування*. Таким чином, визначений інтеграл у загальному випадку записується так:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

На відміну від невизначеного інтеграла, що є функцією х, визначений інтеграл – це число, що може бути обчислене за формулою Ньютона -Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

де $F(b)$ і $F(a)$ – значення первісної $f(x)$ при $x = b$ і $x = a$.

Відповідно до формули Ньютона-Лейбніца, обчислення визначеного інтеграла зводиться до розглянутого раніше інтегрування функції $f(x)$, підстановці в отриманий вираз замість x чисел b і a, та обчислення різниці між отриманими при підстановці значеннями.

Приклад 5.

$$\int_1^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} == \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$$

При обчисленні визначеного інтеграла, як і у випадку невизначеного інтеграла, сталий множник можна виносити за знак інтеграла, а інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій. Крім того, визначений інтеграл має три властивості, притамані тільки йому, які відображаються такими формулами:

- $\int_a^b f(x)dx = 0$;
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

- $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, де c – деяке число.

При використанні методу заміни змінної перехід до нової змінної в процесі обчислення визначеного інтеграла пов'язаний не тільки зі зміною підінтегрального виразу, але також зі зміною меж інтегрування. Крім того, після знаходження первісної, немає необхідності повертатися до початкової змінної, як це робилося у випадку невизначеного інтеграла. Слід відразу підставляти в отриманий вираз нові межі інтегрування.

Приклад 6.

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \left\| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ t_1 = \ln 1 = 0 \\ i_2 = \ln 2 \end{array} \right\| = \int\limits_0^{\ln 2} t dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2} - 0 = \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Тут і далі t_1 та t_2 – це нові нижня та верхня межі інтегрування відповідно.

При обчисленні визначеного інтеграла формула інтегрування частинами має такий вигляд:

$$\int\limits_a^b u d\upsilon = u\upsilon\Big|_a^b - \int\limits_a^b \upsilon du.$$

Розглянемо приклад застосування методу інтегрування частинами у випадку визначеного інтеграла.

Приклад 7.

$$\int\limits_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \\ d\upsilon = x dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} \\ \upsilon = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \operatorname{arctg} x \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right) = \frac{\pi}{8} - \left. \frac{x}{2} \right|_0^1 + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

При розв'язанні деяких задач використовується геометричний зміст визначеного інтеграла. Нехай $f(x)$ – функція, графік якої показаний на рис. 1.2. Тоді $\int\limits_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (площі заштрихованої фігури на рис. 1.2).

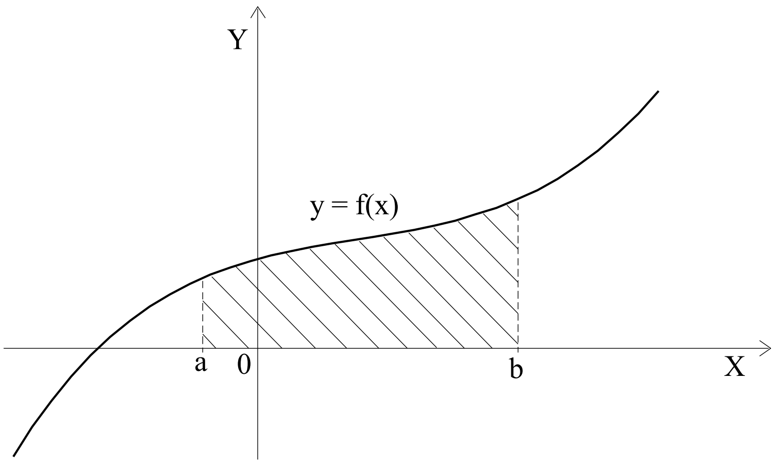

Рис. 1.2

Якщо числа a і b такі, що в інтервалі від a до b графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь абсцис, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ дорівнює різниці площ фігур, розташованих вище і нижче осі абсцис (на рис. 1.3 $\int\limits_a^b f(x)dx = S_2 - S_1$).

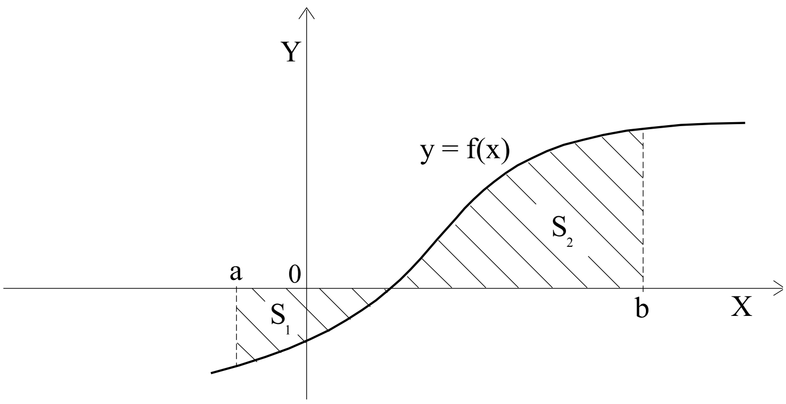

Рис. 1.3

3. ПОНЯТТЯ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

3.1. Види диференціальних рівнянь

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що пов'язує незалежну змінну x, *шукану функцію* $y(x)$ *та її похідні по* x: $y'(x)$, $y''(x)$, . . ., $y^{(n)}(x)$. За наявності однієї незалежної змінної, як у наведеному визначенні, рівняння називається *звичайним диференціальним рівнянням*. У випадку кількох незалежних змінних рівняння називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних*.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, що міститься у рівнянні (порядок старшої похідної).

Наведемо кілька прикладів:

$$(yy')^2 + y\sin x = 2;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = c,$$

де a, b, c – сталі, x – аргумент, y – шукана функція.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3\left(\frac{\partial z}{\partial y} + z\right),$$

де x, y – аргументи, z – шукана функція.

Перше з наведених рівнянь є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, друге – це звичайне диференціальне рівняння другого порядку, а третє рівняння є диференціальним рівнянням у частинних похідних другого порядку.

Розв'язання диференціального рівняння полягає у знаходженні такої функції $y(x)$, що при її підстановці в це рівняння воно перетворюється на тотожність. Розв'язання диференціального рівняння є неоднозначним, тобто існує безліч функцій, що задовольняють цьому рівнянню. Для однозначності (єдиності) розв'язання необхідно сформулювати деякі додаткові умови (які зазвичай називаються *початковими* або *граничними умовами*). Неоднозначність розв'язання диференціального рівняння пов'язана з тим, що знаходження його розв'язку потребує проведення операції інтегрування, внаслідок чого цей розв'язок містить довільну сталу інтегрування. Більш того, при знаходженні *аналітичного розв'язку* (розв'язку у вигляді формули) диференціального рівняння *n*-го порядку інтегрування виконується *n* разів, внаслідок чого *загальний розв'язок* диференціального рівняння *n*-го порядку містить n довільних сталих інтегрування. Маючи *n* початкових або граничних умов, можна визначити чисельні значення сталих інтегрування та, тим самим, знайти *частинний розв'язок* диференціального рівняння. Підкреслимо, що загальний розв'язок диференціального рівняння – це сукупність всіх його частинних розв'язків.

Одержання аналітичного розв'язку диференціального рівняння часто буває складним, а нерідко і неможливим. Для знаходження аналітичного розв'язку в тих випадках, коли це можливо, застосовуються різні методи залежно від виду рівняння.

Ознайомимось з методами розв'язання деяких видів диференціальних рівнянь. Почнемо зі звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

У загальному випадку звичайне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0.$$

Розглянемо деякі прості типи рівнянь першого порядку, розв'язання яких зводиться до знаходження невизначених інтегралів, а саме: *рівняння зі змінними, що розділяються; рівняння, однорідні щодо змінних* y *та* x*; лінійні рівняння*.

3.2. Диференціальні рівняння першого порядку зі змінними, що розділяються

Почнемо з рівнянь зі змінними, що розділяються. До таких рівнянь належать рівняння виду

$$y' = \frac{M(x)}{N(y)}.$$

Підставивши замість y' відношення $\frac{dy}{dx}$, запишемо це рівняння у вигляді

$$N(y)dy = M(x)dx.$$

Бачимо, що функції змінних x та y разом з диференціалами цих змінних стоять тепер у рівнянні по різні боки знака "=", тобто вихідне рівняння допускає *розділення змінних* x та y. Проінтегрувавши останнє рівняння, одержуємо

$$\int N(y)dy = \int M(x)dx.$$

Ця формула є загальним розв'язком вихідного рівняння у *неявній* формі. Якщо можливо виконати інтегрування, а потім розв'язати рівняння відносно змінної y, тобто перетворити його у такий спосіб, щоб ліва частина рівняння була функцією тільки змінної y, а права частина тільки функцією змінної x, то отримаємо загальний розв'язок рівняння у *явному* вигляді.

Розглянемо приклад розв'язання диференціальних рівнянь зі змінними, що розділяються.

Приклад 1. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y' - y^2 \cos x \cdot \sin x = 0,$$

що задовольняє умові $\quad y\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}\cdot$

Розділяємо змінні

$$\frac{dy}{y^2} = \cos x \cdot \sin x dx.$$

Проінтегрувавши обидві частини цього рівняння, отримаємо загальний розв'язок у неявному вигляді:

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

Підставляючи в загальний розв'язок $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 2$, для визначення сталої C отримаємо

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + C, \qquad \text{звідки} \qquad C = \frac{3}{4}.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$\frac{1}{y} = -\frac{2\sin^2 x - 3}{4} \qquad \text{або у явному вигляді} \qquad y = -\frac{4}{3 - 2\sin^2 x}.$$

Важливим рівнянням, що належить до рівнянь зі змінними, що розділяються, є рівняння

$$y' = ky.$$

Розділивши змінні та проінтегрувавши, отримаємо загальний розв'язок

$$\frac{dy}{y} kdx, \qquad \ln|y| = kx + C, \qquad y = \pm A e^{kx}, \text{ де } A = e^{C}.$$

Якщо є початкова умова $y(x_0) = y_0$, то, визначивши A з умови $y_0 = \pm A e^{kx_0}$, отримаємо частинний розв'язок

$$y(x) = \pm y_0 e^{k(x - x_0)}.$$

Розглянуте рівняння описує процеси, при яких швидкість зміни деякої величини пропорційна поточному значенню цієї величини (*наприклад*, радіоактивний розпад атомних ядер, поглинання звуку або світла речовиною тощо, і не лише фізичні – поширення епідемії, зростання внеску в банку та ін.).

3.3. Диференціальні рівняння першого порядку однорідні щодо змінних *y* та *x*

Перейдемо до рівнянь, однорідних відносно змінних y і x. У таких рівняннях сума показників степенів x та y є однаковою в кожному з доданків. Розділивши обидві частини такого рівняння на x^n, де n – максимальний степінь x у рівнянні, перетворюють це рівняння до вигляду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Після цього вводиться нова змінна $t = \frac{y}{x}$. Тепер $y = tx$ і $y' = t'x + t$, після чого вихідне рівняння набуває вигляду:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{f(t) - t}{x},$$

тобто з однорідного рівняння одержуємо рівняння зі змінними, що розділяються, методика розв'язання якого вже описана вище.

Розглянемо приклад розв'язання однорідних рівнянь.

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 y',$$

що задовольняє умові $y\Big|_{x=1} = 1.$

Розділимо вихідне рівняння на x^2:

$$1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = y'.$$

Тепер, виконавши заміну $t = \frac{y}{x}$, перетворимо останнє рівняння до вигляду

$$1+t^2=t'x.$$

Розділяючи змінні та проінтегрувавши, отримаємо загальний розв’язок

$$\frac{dt}{1+t^2}=\frac{dx}{x},$$

звідки $\quad \operatorname{arctg} t=\ln|x|+C \quad$ або $\quad \operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln|x|+C.$

Використовуючи граничну умову, для знаходження значення константи C отримаємо:

$$\operatorname{arctg}1=\ln|1|+C, \qquad \text{звідки} \qquad C=\frac{\pi}{4}.$$

Повертаючись до початкової змінної, отримуємо частинний розв’язок в явному вигляді

$$y=x\operatorname{tg}\left(\ln|x|+\frac{\pi}{4}\right).$$

3.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Тепер перейдемо до розгляду лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Такі рівняння у загальному випадку мають такий вигляд:

$$y'+f(x)y=g(x).$$

Якщо $g(x)\neq 0$, то рівняння є лінійним *неоднорідним* рівнянням. Якщо $g(x)=0$, то таке рівняння називається лінійним *однорідним*. Лінійне однорідне рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються, методика розв’язання якого описана раніше.

Лінійне неоднорідне рівняння можна розв’язувати за методикою, що викладається нижче.

Функція $y(x)$ завжди може бути подана у вигляді добутку двох функцій:

$$y(x)=u(x)\cdot \upsilon(x).$$

Тоді вихідне рівняння перетворюється до вигляду

$$u'(x)\cdot \upsilon(x)+u(x)\cdot \upsilon'(x)+f(x)\cdot u(x)\cdot \upsilon(x)=g(x)$$

або

$$u'(x)\cdot \upsilon(x)+u(x)\cdot(\upsilon'(x)+f(x)\cdot \upsilon(x))=g(x).$$

Зазначимо, що у ролі функції $\upsilon(x)$ можна вибрати будь-яку функцію, а функція $u(x)$ при цьому визначатиметься формулою

$$u(x)=\frac{y(x)}{\upsilon(x)}.$$

Оберемо функцію $\upsilon(x)$ такою, щоб

$$\upsilon'(x)+f(x)\cdot \upsilon(x)=0.$$

Останнє рівняння – це рівняння зі змінними, що розділяються. Розв’язуючи його, отримаємо

$$\frac{d\upsilon(x)}{\upsilon(x)} = -f(x)dx,$$

звідки $\ln|\upsilon(x)| = \int f(x)dx$ і $\upsilon(x) = e^{-F(x)}$,

де $F(x) = \int f(x)dx$.

Після такого введення функції $\upsilon(x)$ рівняння для функції $u(x)$ має наступний вигляд:

$$u'(x)\cdot\upsilon(x) = g(x),$$

і це рівняння також є рівнянням зі змінними, що розділяються.

Розв'язуючи його, знаходимо:

$$u(x) = \int \frac{g(x)}{\upsilon(x)}dx = \int g(x)\cdot e^{F(x)}dx,$$

звідки, використовуючи вирази для $u(x)$ і $\upsilon(x)$, остаточно отримуємо:

$$y(x) = e^{-F(x)} \cdot \int g(x)\cdot e^{F(x)}dx.$$

Розглянемо приклад розв'язання лінійних рівнянь.

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$x^2 y' = 2xy - 3,$$

що задовольняє граничній умові $y\Big|_{x=-1} = 1.$

Вихідне рівняння перетворюється до вигляду

$$y' - \frac{2y}{x} = -\frac{3}{x^2}.$$

Таким чином, це рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням, причому $f(x) = -\frac{2}{x}$, а $g(x) = -\frac{3}{x^2}$. Тепер

$$F(x) = \int -\frac{2}{x}dx = -2\ln|x| + C_1.$$

Для подальших обчислень можемо використовувати будь-яку з первісних. Виберемо $F(x) = -2\ln x$. Тоді

$$y(x) = e^{2\ln x}\cdot\int\left(-\frac{3}{x^2}\right)\cdot e^{-2\ln x}dx = -x^2\cdot\int\frac{3}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}dx =$$

$$= -x^2\cdot\int\frac{3dx}{x^4} = x^2\cdot\left(\frac{1}{x^3} + C\right) = \frac{1}{x} + Cx^2.$$

Таким чином, $\frac{1}{x} + Cx^2$ – це загальний розв'язок рівняння. Використовуючи вищенаведену граничну умову, отримаємо

$$1 = -1 + C, \qquad \text{звідки} \qquad C = 2.$$

Тоді частинний розв'язок вихідного рівняння, який задовольняє граничній умові, має вигляд:

$$y=\frac{1}{x}+2x^2.$$

3.5. Диференціальні рівняння вищих порядків

Наостаннє, трохи про диференціальні рівняння вищих порядків. У загальному випадку диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F\left(x,\, y,\, y',\, y'',\dots y^{(n-1)},\, y^{(n)}\right)=0\dots$$

Проінтегрувати рівняння вищого порядку до кінця вдається рідко. Часто розв'язок диференціальних рівнянь вищого порядку шукають шляхом зниження порядку цих рівнянь.

Серед диференціальних рівнянь вищих порядків практично важливими є *диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами*. Рівняння виду

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n)}+\dots+a_1y'+a_0y=f(x)$$

називається *неоднорідним диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами*. Якщо ж $f(x)=0$, то таке рівняння називається *однорідним диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами*. До диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами належать, зокрема, рівняння вільних незгасаючих і вільних згасаючих коливань, про що докладніше йтиметься при вивченні окремих розділів фізики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Губаль Г. М. Вища математика : навчальний посібник. Луцьк : Луцький національний технічний університет, 2015. 513 с.
2. Кузнецова Г. А. Ламтюгова С. М., Ситникова Ю. В. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях. Ч. 1 : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. 106 с.
3. Пономаренко В., Малярець Л., Бойко А., Любчик Л., Ляшенко О. Вища математика : базовий підручник для студентів вищих навчальних закладів. Х. : Фоліо, 2014. 670 с.
4. L. Ridgway Scott, Ariel Fernandez. A Mathematical Approach to Protein Biophysics (Biological and Medical Physics, Biomedical Engineering). Springer Publishing AG, 2017. 290 p.
5. Свердан П. Л. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірностей : підручник. К. : Знання, 2008. 456 с.
6. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. Вища математика : підручник для студ. вищ. фармац. ф-тів вищ. мед. навч. закл. IVр. акред. Вінниця : Нова книга, 2014. 632 с.
7. Кнігавко В. Г., Зайцева О. В., Бондаренко М. А. та ін. Медична та біологічна фізика : підручник для студентів медичних ВНЗ. Харків : ХНМУ, 2013. 364 с..
8. Чалий О. В., Цехмістер Я. В., Агапов Б. Т. та ін. Медична та біологічна фізика : підручник для студ. вищих мед. (фарм.) навч. заклад. Вид. 2-ге. Вінниця : Нова Книга, 2017. 528 с.

Навчальне видання

Федосов Сергій Анатолійович
Захарчук Дмитро Андрійович
Сахнюк Василь Євгенович
Шигорін Павло Павлович

Основи математичного аналізу

Курс лекцій

Друкується в авторській редакції