Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра математичного аналізу та статистики

Федуник−Яремчук О.В., Бушев Д.М., Соліч К.В.

ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА:

методичні вказівки

Луцьк 2023

УДК 517 (072)

Ф 34

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Волинського національного університету імені Лесі Українки
(протокол № 10 від 21 червня 2023 року)

Рецензенти:
Кальчук Інна Володимирівна − кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії функцій та методики навчання математики Волинського національного університету імені Лесі Українки
Луньов Сергій Валентинович − доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та вищої математики Луцького національного технічного університету

Ф 34

Федуник−Яремчук О.В., Бушев Д.М., Соліч К.В. Інтеграли, що залежать від параметра: методичні вказівки з дисципліни "Математичний аналіз" для студентів, які навчаються за спеціальностями 014 Середня освіта (Математика), 111 Математика/ Оксана Володимирівна Федуник-Яремчук, Дмитро Миколайович Бушев, Катерина Василівна Соліч. Луцьк, 2023. 76 с.

Методичні вказівки призначені для методичного забезпечення лекційних та практичних занять, самостійної та дистанційної роботи студентів в рамках курсу „Математичний аналіз". Викладено основні теоретичні положення із розділу математичного аналізу "Інтеграли, що залежать від параметра. Інтеграли Ейлера"; також наведені приклади розв'язання типових задач, завдання для самоконтролю та індивідуальні завдання.

Мета розробки – допомогти студентам засвоїти основні поняття і методи математичного аналізу, виробити вміння застосовувати теоретичний матеріал в практичних задачах, підготувати студентів до самостійної роботи з науковою літературою.

УДК 517 (072)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Дана розробка призначена для методичного забезпечення лекційних та практичних занять, самостійної та дистанційної роботи студентів в рамках курсу „Математичний аналіз”, що вивчається на факультеті інформаційних технологій і математики.

Методична розробка складається із розділу математичного аналізу “Інтеграли, що залежать від параметра. Інтеграли Ейлера”. В розробці систематизовано теоретичні відомості із вказаного розділу: викладено основні поняття, теореми, деякі висновки і зауваження, які потрібні для розв’язування задач. Весь матеріал супроводжується розв’язанням типових прикладів. В кінці методичної розробки наведені завдання для самоконтролю та індивідуальні завдання. Основну увагу приділено висвітленню алгоритмічного аспекту розглядуваних понять, методів і тверджень.

Методичну розробку можна рекомендувати студентам математичних спеціальностей всіх форм навчання, але вона може бути корисною і для студентів інших спеціальностей.

1. Поняття інтеграла, що залежить від параметра. Неперервність по параметру

Нехай задано функцію $f(x;y)$, яка визначена в прямокутнику $D=[a;b]\times[c;d]$. Припустимо, що при кожному фіксованому $y\in[c;d]$, функція $f(x;y)$, як функція однієї змінної, є інтегровною на сегменті $[a;b]$, тобто існує

$$\int_a^b f(x;y)dx.$$

Цей інтеграл при різних значеннях y набуває різних значень, тобто є функцією від змінної y.

Позначимо

$$I(y)=\int_a^b f(x;y)dx\,,\qquad y\in[c;d].$$

Такий інтеграл називається інтегралом, що залежить від параметра y.

Приклад 1. Розглянемо інтеграл, який залежить від параметра α

$$\int_0^1 \sin\alpha x dx=-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\bigg|_0^1=\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}.$$

Теорема 1. *Якщо* $f(x;y)$ є неперервною в прямокутнику $D=[a;b]\times[c;d]$, то $I(y)=\int_a^b f(x;y)\,dx$ є неперервною функцією на сегменті $[c;d]$.

Доведення. Скористаємось означенням неперервності функції в точці на мові “$\varepsilon-\delta$”, тобто означенням Коші. Доведемо, що функція $I(y)$ є неперервною в довільній точці $y_0\in[c;d]$.

Згідно з умовою $f(x;y)$ неперервна в прямокутнику D, тобто неперервна в обмеженій і замкненій (компактній) множині із $\mathbb{R}^2$. Тоді, згідно із теоремою Кантора $f(x;y)$ буде рівномірно неперервною в прямокутнику D. Це означає, що

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall(x_1;y_1),(x_2;y_2)\in\ D,\ \ \rho\big((x_1;y_1),(x_2;y_2)\big)<\delta\ :$$

$$|f(x_1;y_1)-f(x_2;y_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тут $\rho((x_1;y_1),(x_2;y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

Оскільки записане вище твердження виконується для довільних двох точок із множини D, то воно буде виконуватися і для вибраних нами точок.

Покладемо: $x_1=x_2=x;\ y_1=y;\ y_2=y_0$.

Отримаємо, що при умові

$$\rho((x_1;y_1),(x_2;y_2))=\sqrt{(y-y_0)^2}=|y-y_0|<\delta,$$

буде виконуватись:

$$|f(x;y)-f(x;y_0)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Візьмемо $\forall\, y\in[c;d]$ і таке, що виконується умова $|y-y_0|<\delta$. Матимемо, що

$$\left|I(y)-I(y_0)\right|=\left|\int_a^b f(x;y)dx-\int_a^b f(x;y_0)dx\right|=$$

$$=\left|\int_a^b (f(x;y)-f(x;y_0))dx\right|\le$$

$$\le\int_a^b |f(x;y)-f(x;y_0)|dx<\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx=\varepsilon.$$

Таким чином, ми отримали, що

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall y\in[c;d],\ |y-y_0|<\delta:\ \left|I(y)-I(y_0)\right|<\varepsilon.$

Тобто, функція $I(y)$ є неперервною в точці y_0. Оскільки точка y_0 вибрана довільним чином із $[c;d]$, то $I(y)$ неперервна в усіх точках із сегмента $[c;d]$.

Теорему доведено.

Приклад 2. Розглянемо інтеграл

$$I(y)=\int_0^{\pi} e^{xy}\sin x dx.$$

Функція $f(x;y) = e^{xy}\sin x$, де $x \in [0;\pi]$, $y \in \mathbb{R}$, є неперервною при всіх $x \in [0;\pi]$ і при всіх $y \in \mathbb{R}$. Тоді, згідно з доведеною теоремою, $I(y)$ є неперервною для всіх $y \in \mathbb{R}$.

До такого ж висновку можна було б прийти, якщо обчислити цей інтеграл безпосередньо:

$$I(y) = \int_0^{\pi} e^{xy}\sin x dx = \left| \begin{matrix} u = e^{xy}, dv = \sin x\, dx, \\ du = ye^{xy}, v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

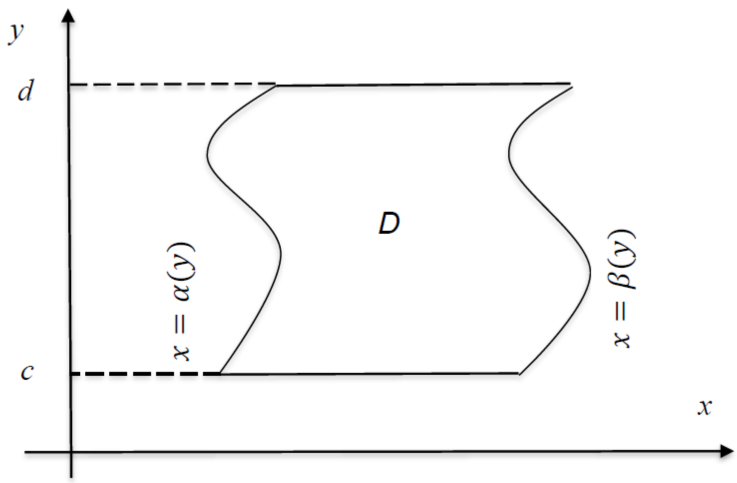
$$= -e^{xy}\cos x|_0^{\pi} + y\int_0^{\pi} e^{xy}\cos x\, dx = \left| \begin{matrix} u = e^{xy}, dv = \cos x\, dx, \\ du = ye^{xy}, v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= -(e^{\pi y} \cdot (-1) - 1) + y(e^{xy}\sin x|_0^{\pi} - y\int_0^{\pi} e^{xy}\sin x dx) =$$

$$= 1 + e^{\pi y} + 0 - y^2 \cdot I(y).$$

$$I(y) = 1 + e^{\pi y} - y^2 \cdot I(y) \Rightarrow I(y) = \frac{1+e^{\pi y}}{1+y^2}.$$

Теорема 1 має місце і в тому випадку, коли D є довільним компактом.



Зокрема, якщо $D = \{(x;y) |\ y \in [c;d], \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$, $\alpha(y), \beta(y)$ неперервні функції на $[c;d]$.

В цьому випадку можна розглядати інтеграл

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x;y)dx,$$

який залежить від параметра y і має змінні межі.

Приклад 1.Знайти границю

а) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\,dx$; б) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{a}^{1+a}\frac{dx}{1+x^2+a^2}$.

Розв'язання.

а) Оскільки функція $f(x;a)=\sqrt{x^2+a^2}$ неперервна при $x\in[-1;1]$, $a\in\mathbb{R}$, то $I(a)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ є неперервною функцією при $a\in\mathbb{R}$. Тому

$$\lim_{a\to 0} I(a)=I\left(\lim_{a\to 0}\right)=\lim_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\,dx=I(0)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}dx=$$

$$\int_{-1}^{1}|x|dx=-\int_{-1}^{0}xdx+\int_{0}^{1}xdx=-\frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

б) Оскільки функції $f(x;a)=\frac{1}{1+x^2+a^2}$, $\alpha(a)=a$, $\beta(a)=1+a$, неперервні при $a\in\mathbb{R}, x\in[a;1+a]$, то $I(a)=\int_{a}^{1+a}\frac{dx}{1+x^2+a^2}$ є неперервною функцією при $a\in\mathbb{R}$. Тому

$$\lim_{a\to 0} I(a)=\lim_{a\to 0}\int_{a}^{1+a}\frac{dx}{1+x^2+a^2}=I(0)=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}x|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

Теорема 2. Нехай функція $f(x;y)$ неперервна в прямокутнику $D=[a;b]\times[c;d]$, функції $x=\alpha(y), x=\beta(y)$ неперервні на сегменті $[c;d]$, і для всіх $y\in[c;d]$: $a\le\alpha(y)\le b;\ a\le\beta(y)\le b$. Тоді

$$I(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x;y)dx$$

є неперервною функцією на $[c;d]$.

2. Диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра

Теорема 1. Якщо функції $f(x;y)$ та $f'_y(x;y)$ є неперервними в прямокутнику $D=[a;b]\times[c;d]$, то функція $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ є диференційовною на $[c;d]$ і має місце рівність (формула Лейбніца)

$$I'(y) = \int_a^b f'_y\,(x; y) dx. \tag{1}$$

Доведення. Візьмемо $\forall\ y_0 \in [c; d]$. Надамо точці y_0 деякого приросту $\Delta y \neq 0$ і такого, щоб $(y_0 + \Delta y) \in [c; d]$.

Розглянемо вираз

$$\left|\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y\,(x; y_0) dx\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta y}\left(\int_a^b f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx\right) - \int_a^b f'_y(x, y_0) dx\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta y}\int_a^b (f(x; y_0 + \Delta y) - f(x; y_0)) dx - \int_a^b f'_y(x, y_0) dx\right| = I_1.$$

Оскільки $f(x; y)$ неперервна в прямокутнику D, то, згідно з теоремою Лагранжа про скінченні прирости, матимемо

$$I_1 = \left|\frac{1}{\Delta y}\int_a^b f'_y(x; y_0 + \theta \Delta y) \cdot \Delta y dx - \int_a^b f'_y\,(x; y_0) dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^b f'_y\,(x; y_0 + \theta \Delta y) dx - \int_a^b f'_y(x; y_0) dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^b \left(f'_y(x; y_0 + \theta \Delta y) - f'_y(x; y_0)\right) dx\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \left|f'_y(x; y_0 + \theta \Delta y) - f'_y(x; y_0)\right| dx = I_2.$$

Згідно з умовою $f'_y(x; y)$ неперервна в D, тому за теоремою Кантора ця функція буде рівномірно неперервною в D, тобто

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall y \in [c; d],\ \ |y - y_0| < \delta:$$

$$\left|f'_y(x; y_0 + \theta \Delta y) - f'_y(x; y_0)\right| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Тоді будемо мати:

$$I_2 < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (b - a) = \varepsilon.$$

Ми одержали, що

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in [c; d], \qquad |\Delta y| < \delta:$$

$$\left| \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} - \int_a^b f_y'(x; y_0) dx \right| < \varepsilon.$$

Це означає, що границею виразу

$$\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y}$$

при $\Delta y \to 0$ є $\int_a^b f_y'(x; y_0) dx$, тобто

$$I'(y_0) = \int_a^b f_y'(x; y_0) dx,$$

де точка y_0 вибрана довільним чином із $[c; d]$.

Тому для всіх $y \in [c; d]$ виконується (1).

Теорему доведено.

Теорема 2 (узагальнена теорема про диференціювання інтегралів, які залежать від параметра). Нехай функції $f(x; y)$ та $f_y'(x; y)$ неперервні в прямокутнику $D = [a; b] \times [c; d]$, функції $x = \alpha(y)$ і $x = \beta(y)$ неперервні разом зі своїми похідними на $[c; d]$, причому
$a \leq \alpha(y) \leq b, \ \ a \leq \beta(y) \leq b, \ \ y \in [c; d]$, тоді функція

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x; y) \, dx$$

диференційовна на $[c; d]$ і має місце формула

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y'(x; y) dx + \beta'(y) \cdot f(\beta(y); y) - \alpha'(y) f(\alpha(y); y)). \qquad (2)$$

Приклад 2. Чи можна за правилом Лейбніца знайти $I'(0)$, якщо $I(y) = \int_0^1 \ln\sqrt{x^2 + y^2} dx$?

Розв'язання.

Оскільки функція $f(x; y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ має розрив у точці $(0,0)$ то формулу Лейбніца не можна використовувати.

Приклад 3. Знайти $I'(a)$, якщо

$$I(a) = \int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{x}dx.$$

Розв'язання. Функції $\alpha(a) = 0,\ \beta(a) = a$ неперервні разом зі своїми похідними при $a \in \mathbb{R}$.

Розглянемо $f(x;a) = \frac{\ln(1+ax)}{x}, x \in [0;a],\ a \in \mathbb{R}$.

Знайдемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a}{1+ax} = a$. Доозначимо функцію $f(x;a)$ при $x = 0$ так, щоб вона була неперервною, тобто покладемо

$$f(x,a) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax)}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Тоді $f(x;a)$ неперервна при $x \in [0,a],\ a \in \mathbb{R}$.

Знайдемо

$$f'_a(x;a) = \begin{cases} \dfrac{x}{x(1+ax)} = \dfrac{1}{1+ax}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Функція $f'_a(x;a)$ також неперервна при $x \in [0;a],\ a \in \mathbb{R}$.

Скористаємося формулою (2)

$$I'(a) = \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} f'_a(x;a)dx + \beta'(a)\cdot f(\beta(a);a) - \alpha'(a)\cdot f(\alpha(a);a)) =$$

$$= \int_0^a \frac{1}{1+ax}dx + 1\cdot\frac{\ln(1+a\cdot a)}{a} - 0\cdot a =$$

$$= \frac{1}{a}\ln(1+ax)\Big|_0^a + \frac{\ln(1+a^2)}{a} = \frac{2}{a}\ln(1+a^2).$$

Приклад 4. Знайти $I'(y)$, якщо

$$I(y) = \int_{y+a}^{y+b} \frac{\sin xy}{x}dx.$$

Розв'язання. Функції $\alpha(y) = y + a,\ \beta(y) = y + b$ неперервні разом зі своїми похідними при $y \in \mathbb{R}$.

Розглянемо $f(x;y)=\frac{\sin xy}{x}, x\in[y+a;y+b], y\in\mathbb{R}$.

Знайдемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin xy}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y=y$.

Доозначимо функцію $f(x;y)$ при $x=0$ так, щоб вона була неперервною, тобто покладемо

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0,\end{cases}\qquad y\in\mathbb{R}.$$

Тоді $f(x;y)$ неперервна при $x\in[y+a;y+b],\ y\in\mathbb{R}$.

Знайдемо

$$f'_y(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot\cos xy}{x}=\cos xy\,, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}\quad y\in\mathbb{R}.$$

Функція $f'_y(x;y)$ також неперервна при $x\in[y+a;y+b],\ y\in\mathbb{R}$.

Скористаємося формулою (2)

$$I'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f'_y(x;y)dx+\beta'(y)\cdot f(\beta(y);y)-\alpha'(y)f(\alpha(y);y))=$$

$$=\int_{y+a}^{y+b}\cos xy\,dx+1\cdot\frac{\sin y(y+b)}{y+b}-1\cdot\frac{\sin y(y+a)}{y+a}=$$

$$=\frac{\sin xy}{y}\bigg|_{y+a}^{y+b}+\frac{\sin y(y+b)}{y+b}-\frac{\sin y(y+a)}{y+a}=$$

$$=\frac{\sin y(y+b)}{y}-\frac{\sin y(y+a)}{y}+\frac{\sin y(y+b)}{y+b}-\frac{\sin y(y+a)}{y+a}=$$

$$=\frac{\sin y(y+b)}{y}+\frac{\sin y(y+b)}{y+b}-\frac{\sin y(y+a)}{y}-\frac{\sin y(y+a)}{y+a}=$$

$$=\sin y(y+b)\frac{2y+b}{y(y+b)}-\sin y(y+a)\frac{2y+a}{y(y+a)}.$$

Приклад 5. Використовуючи диференціювання по параметру, обчислити

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\,a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx.$$

Розв'язання. Позначимо

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\,a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx.$$

Очевидно, що $I(0) = 0, I(-a) = -I(a)$.

Розглянемо випадок, коли $a \geq \varepsilon > 0$, і функцію

$$f(x;a) = \frac{\operatorname{arctg}(\,a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}, x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], a \geq \varepsilon > 0,$$

Знайдемо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(\,a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(\,a\operatorname{tg}x)}{a\operatorname{tg}x}\cdot a = a;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\,a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x} = 0.$$

Доозначимо функцію $f(x;a)$ при $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ так, щоб вона була неперервною, тобто покладемо

$$f(x,a) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}(\,a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}, & x \neq 0, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2}, \\ a, & x = 0, \\ 0, & x = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \quad a \geq \varepsilon > 0.$$

Тоді $f(x;a)$ неперервна при $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $a \geq \varepsilon > 0$.

Знайдемо

$$f'_a(x;a) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x(1 + a^2\operatorname{tg}^2x)} = \dfrac{1}{1 + a^2\operatorname{tg}^2x}, & x \neq 0, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & x = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \quad a \geq \varepsilon > 0.$$

Функція $f'_a(x;a)$ також неперервна при $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $a \geq \varepsilon > 0$.

Скористаємося теоремою про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра. Маємо:

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + a^2 \mathrm{tg}^2 x} dx = \left| \begin{array}{c} \mathrm{tg} x = t, x = \mathrm{arctg}\, t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = +\infty \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + a^2 t^2} \cdot \frac{dt}{1 + t^2} = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dt}{(1 + a^2 t^2)(1 + t^2)} =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{1}{a^2 - 1} \left(\frac{a^2}{1 + a^2 t^2} - \frac{1}{1 + t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{a^2 - 1} \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \left(\frac{1}{\frac{1}{a^2} + t^2} - \frac{1}{1 + t^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{a^2 - 1} \lim_{A \to +\infty} \left(a \mathrm{arctg}\, ta \Big|_0^A - \mathrm{arctg}\, t \Big|_0^A \right) =$$

$$= \frac{1}{a^2 - 1} \lim_{A \to +\infty} (a\, \mathrm{arctg} aA - \mathrm{arctg}\, A) = \frac{1}{a^2 - 1} \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a + 1}.$$

Отже,

$$I'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a + 1}.$$

Тоді

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \int \frac{da}{a + 1} = \frac{\pi}{2} \ln(a + 1) + C, \qquad a \geq \varepsilon > 0.$$

Оскільки ε може бути як завгодно малим, то отриманий результат правильний при $\forall a > 0$.

В рівності $I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(a + 1) + C$ перейдемо до границі при $a \to +0$. Тоді

$$\lim_{a \to +0} I(a) = \lim_{a \to +0} \left(\frac{\pi}{2} \ln(a + 1) + C \right) = C.$$

Оскільки функція $I(a)$ неперервна, то $C = I(0) = 0$.

Отже, $I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a+1), \ \ a \geq 0$.

Оскільки $I(-a) = -I(a)$, то $I(a) = I(|a|) \cdot \mathrm{sgn} a$. Маємо остаточно:

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(|a|+1) \cdot \mathrm{sgn} a, \ \ a \in \mathbb{R}.$$

3. Інтегрування по параметру інтеграла, що залежить від параметра

Теорема 1. Якщо функція $f(x;y)$ є неперервною в прямокутнику $D = [a;b] \times [c;d]$, то функція

$$I(y) = \int_a^b f(x;y)dx$$

інтегровна на $[c;d]$ і має місце рівність

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy. \tag{1}$$

Формула (1) показує, що при умові неперервності $f(x;y)$ в D в повторному інтегралі зі сталими межами можна змінювати порядок інтегрування.

Доведення. Покажемо, що $\forall u \in [c;d]$ виконується

$$\int_c^u dy \int_a^b f(x;y)dx = \int_a^b dx \int_c^u f(x;y)dy. \tag{2}$$

Зазначимо, що функція $f(x;y)$ є неперервною в прямокутнику $D = [a;b] \times [c;d]$, тоді функція $I(y) = \int_a^b f(x;y)dx$ є неперервною на $[c;d]$, а значить є інтегровною на цьому сегменті.

Позначимо ліву частину у формулі (2) через

$$g(u) = \int_c^u dy \int_a^b f(x;y)dx,$$

а праву частину

$$h(u) = \int_a^b dx \int_c^u f(x;y)dy.$$

Треба показати, що $\forall\, u \in [c; d]$, $g(u) = h(u)$.

Очевидно, що $g(c) = h(c) = 0$. Тому достатньо показати, що $g'(u) = h'(u), \forall\, u \in [c; d]$.

Знайдемо $g'(u)$. Функція $g(u)$ є інтегралом зі змінною верхньою межею, тому

$$g'(u) = \left(\int_{c}^{u} I(y)dy\right)' = I(u) = \int_{a}^{b} f(x; u)dx.$$

Знайдемо $h'(u)$. Функція $h(u) -$ інтеграл, який залежить від параметра u, бо внутрішній інтеграл є функцією від змінних $x; u$. Згідно із теоремою про диференціювання по параметру інтеграла, залежного від параметра, маємо, що

$$h'(u) = \left(\int_{a}^{b} dx \int_{c}^{u} f(x; y)dy\right)'_{u} = \int_{a}^{b} dx \left(\int_{c}^{u} f(x; y)dy\right)'_{u} = \int_{a}^{b} f(x; u)dx.$$

Тоді $g'(u) = h'(u)$, $\forall\, u \in [c; d]$. Взявши в ролі $u = d$, одержимо формулу (1).

Теорему доведено.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int_{0}^{1} \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \qquad 0 < a < b < +\infty.$$

Розв'язання. Розглянемо в прямокутнику $D = [0; 1] \times [a; b]$ функцію $f(x; y) = x^y$. Ця функція неперервна в D. Згідно з доведеною теоремою будемо мати, що

$$\int_{0}^{1} dx \int_{a}^{b} x^y dy = \int_{a}^{b} dy \int_{0}^{1} x^y dx.$$

Розглянемо

$$\int_{0}^{1} dx \int_{a}^{b} x^y dy = \int_{0}^{1} dx \left. \frac{x^y}{\ln x}\right|_{a}^{b} = \int_{0}^{1} \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

Знайдемо

$$\int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b dy \left. \frac{x^{y+1}}{y+1} \right|_0^1 = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln|y+1|\Big|_a^b =$$

$$= \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Отже,

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Приклад 2. Користуючись формулою

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}, \qquad x \neq 0,$$

обчислити інтеграл

$$I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Розв'язання. Інтеграл I є невласним, тому його потрібно розуміти як наступну границю:

$$I = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Підставимо в I замість $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ відповідний інтеграл. Отримаємо

$$I = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} dx \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}.$$

Розглянемо

$$f(x;y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}, \qquad x \in [0; 1-\varepsilon], \qquad y \in [0;1].$$

Функція $f(x;y)$ неперервна при $x \in [0;1-\varepsilon], y \in [0;1]$, тому в повторному інтегралі зі сталими межами можна змінити порядок інтегрування.

Отже,

$$I = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} dx \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^1 dy \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}.$$

Знайдемо первісну

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)} = \left|\begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \end{matrix}\right| = \int \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}(1+y^2\sin^2 t)} =$$

$$= \int \frac{dt}{1+y^2\sin^2 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t\left(\frac{1}{\cos^2 t} + y^2 \mathrm{tg}^2 t\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{\cos^2 t(1+\mathrm{tg}^2 t + y^2\mathrm{tg}^2 t)} = \left|\begin{matrix} u = \mathrm{tg}\, t \\ du = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{matrix}\right| = \int \frac{du}{1+u^2+y^2u^2} =$$

$$= \int \frac{du}{1+u^2(1+y^2)} = \frac{1}{1+y^2}\int \frac{du}{\frac{1}{1+y^2}+u^2} = \frac{1}{1+y^2}\int \frac{du}{\left(\sqrt{\frac{1}{1+y^2}}\right)^2 + u^2} =$$

$$= \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+y^2}}}\mathrm{arctg}\frac{u}{\sqrt{\frac{1}{1+y^2}}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\ \mathrm{arctg}\left(u\sqrt{1+y^2}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\ \mathrm{arctg}\left(\sqrt{1+y^2}\cdot \mathrm{tg}\, t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\ \mathrm{arctg}\left(\sqrt{1+y^2}\cdot \mathrm{tg}(\arcsin x)\right) + C.$$

Звідси

$$I = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^1 dy \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^1 dy\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\ \mathrm{arctg}\left(\sqrt{1+y^2}\cdot\mathrm{tg}(\arcsin x)\right)\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\ \mathrm{arctg}\left(\sqrt{1+y^2}\cdot\mathrm{tg}(\arcsin(1-\varepsilon))\right)dy.$$

Розглянемо тепер функцію

$$F(y;\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\ \mathrm{arctg}\left(\sqrt{1+y^2}\cdot\mathrm{tg}(\arcsin(1-\varepsilon))\right).$$

Покладемо:

$$F(y;0)=\lim_{\varepsilon\to+0}F(y;\varepsilon)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1+y^2}\cdot\operatorname{tg}(\arcsin(1-\varepsilon))\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Оскільки функція $F(y;\varepsilon)$ неперервна при $y\in[0;1]$, $\varepsilon\in[0;1]$, то

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^1 F(y,\varepsilon)dy=\int_0^1\lim_{\varepsilon\to+0}F(y,\varepsilon)dy=\int_0^1\frac{\pi}{2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{\pi}{2}\ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$I=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx,\qquad 0<a<b<+\infty.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою

$$\int_a^b x^y dy=\frac{x^y}{\ln x}\bigg|_a^b=\frac{x^b-x^a}{\ln x}.$$

Тоді

$$I=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\int_a^b x^y dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_a^b x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dy.$$

Розглянемо функцію

$$f(x;y)=x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right),\qquad x\in[0;1],y\in[a;b],$$

Знайдемо $\lim\limits_{x\to0}x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0.$

Доозначимо функцію $f(x;y)$ при $x=0$ так, щоб вона була неперервною, тобто покладемо

$$f(x;y)=\begin{cases}x^y\sin\left(\ln\dfrac{1}{x}\right), & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad y\in[a;b].$$

Розглянемо також функцію

$$f_1(x;y) = x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right), \qquad x \in [0,1], \qquad y \in [a;b],$$

і аналогічно доозначимо її при $x = 0$ так, щоб вона була неперервною, тобто покладемо

$$f_1(x;y) = \begin{cases} x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}, \qquad y \in [a;b].$$

Функція $f(x;y)$ неперервна при $x \in [0;1], y \in [a;b]$, тому в повторному інтегралі зі сталими межами можна змінити порядок інтегрування.

Отже,

$$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) dx\,.$$

Знайдемо первісну

$$\int x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) dx = \left| \begin{matrix} \ln\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = e^{-t} \\ dx = -e^{-t}dt \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int e^{-ty} \cdot \sin t \cdot e^{-t} dt = -\int e^{-t(y+1)} \cdot \sin t dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{Скористаємося відомою формулою} \\ \int e^{at} \cdot \sin bt dt = \dfrac{e^{at}(a\sin bt - b\cos bt)}{a^2 + b^2} + C \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{e^{-t(y+1)}(-(y+1)\sin t - \cos t)}{(y+1)^2 + 1} + C =$$

$$= -\frac{x^{y+1}\left(-(y+1)\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)}{(y+1)^2 + 1} + C.$$

Тоді

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= -\int_a^b dy \cdot \frac{x^{y+1}\left(-(y+1)\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)}{(y+1)^2+1}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \int_a^b \frac{dy}{(y+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(y+1)|_a^b = \operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}(a+1) =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}.$$

4. Граничний перехід під знаком інтеграла, залежного від параметра

Якщо функція

$$I(y) = \int_a^b f(x;y)dx$$

є неперервною в точці $y_0 \in [c;d]$, то

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x;y)dx = \int_a^b f(x;y_0)dx = I(y_0),$$

тобто при умові неперервності функції $f(x;y)$ в прямокутнику $D = [a;b]\times[c;d]$ можна здійснити граничний перехід під знаком інтеграла.

Приклад 1. Розглянемо

$$\int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 d\left(e^{-\frac{x^2}{y^2}}\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{y^2}} - 1\right) = \frac{1-e^{-\frac{1}{y^2}}}{2}.$$

Знайдемо

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = \lim_{y\to 0}\frac{1-e^{-\frac{1}{y^2}}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Обчислимо тепер

$$\lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{x}{y^2}}{e^{\frac{x^2}{y^2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-\frac{2x}{y^3}}{e^{\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{-2x^2}{y^3}} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{x\cdot e^{\frac{x^2}{y^2}}} = 0.$$

Тому $\int_0^1 \lim\limits_{y\to 0} \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = 0$.

Отже, в даному інтегралі не можна виконати граничний перехід під знаком інтеграла. Це пояснюється тим, що підінтегральна функція має розрив в точці $y = 0$. А, як було показано в попередньому параграфі, підінтегральна функція повинна бути неперервна по обох змінних x і y.

Умову граничного переходу можна послабити. Нехай функція $f(x;y)$ визначена в прямокутнику $D = [a;b] \times [c;d]$, $y_0 \in [c;d]$.

Означення. Функція $f(x;y)$ називається рівномірно збіжною при $y \to y_0$ до функції $g(x)$ на $[a;b]$, якщо

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall y \in [c;d], 0 < |y - y_0| < \delta, \forall x \in [a;b]:$$

$$|f(x,y) - g(x)| < \varepsilon.$$

Це рівносильно тому, що $\lim\limits_{y\to y_0} \sup\limits_{x\in[a;b]} |f(x,y) - g(x)| = 0$.

Теорема (про граничний перехід). Якщо $\forall y \in [c;d]$ функція $f(x;y)$ інтегровна по змінній x на $[a;b]$, $f(x;y)$ збігається рівномірно при $y \to y_0$ до функції $g(x)$ на $[a;b]$, то має місце рівність:

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x;y)\, dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Доведення. Згідно з умовою, $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, $y \to y_0$, $x \in [a;b]$, тому

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall y \in [c;d], 0 < |y - y_0| < \delta, \forall x \in [a;b]:$$

$$|f(x,y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Отже,

$$\left|\int_a^b f(x;y)dx - \int_a^b g(x)dx\right| = \left|\int_a^b \big(f(x,y) - g(x)\big)dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |f(x,y) - g(x)|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon.$$

Одержали, що

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \ \forall y \in [c;d], 0 < |y - y_0| < \delta:$$

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Тобто

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Теорему доведено.

5. Невласні інтеграли, що залежать від параметра. Рівномірна збіжність

Нехай функція $f(x;y)$ визначена на множині $[a;+\infty] \times Y$, де $Y \subset \mathbb{R}$, і для будь-якого $y \in Y$ збіжним є інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x;y)dx$. Значення цього інтеграла залежить від y, тому він є функцією змінної y.

Означення. Інтеграл

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x;y)dx = \lim_{B \to +\infty} \int_a^B f(x;y)dx$$

називається невласним інтегралом, що залежить від параметра y.

Означення. Невласний інтеграл $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x;y)dx$ називається рівномірно збіжним на множині Y, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A_0 \geq a \; \forall A > A_0 \; \forall y \in Y :$$

$$\left|I(y) - \int_a^A f(x;y)dx\right| = \left|\int_A^{+\infty} f(x;y)dx\right| < \varepsilon.$$

Останній запис рівносильний наступному:

$$\lim_{A \to +\infty} \sup_{y \in Y} \left|\int_A^{+\infty} f(x;y)dx\right| = 0.$$

Приклад 1. Дослідити на рівномірну збіжність інтеграл $\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx$.

Розв'язання. Цей інтеграл збіжний при всіх $y \geq 0$. Згідно з означенням рівномірної збіжності заданий інтеграл буде рівномірно збіжний, якщо

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists A_0 \geq a\ \ \forall A > A_0\ \forall y \geq 0 : \left|\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx\right| < \varepsilon.$$

Знайдемо цей інтеграл:

$$\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx = \lim_{B\to+\infty}\int_A^{B} ye^{-xy}dx =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left(-e^{-xy}\Big|_A^B\right) = \lim_{B\to+\infty}\left(e^{-Ay} - e^{-By}\right) = \begin{cases} e^{-Ay}, & y > 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Тоді нерівність $\left|\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx\right| < \varepsilon$ звелася донаступної $e^{-Ay} < \varepsilon$.

$$\frac{1}{e^{Ay}} < \varepsilon \ \Rightarrow\ e^{Ay} > \frac{1}{\varepsilon}\ \Rightarrow\ \ Ay > \ln\frac{1}{\varepsilon}\ \Rightarrow A > \frac{1}{y}\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

В ролі A_0 можна було б взяти $A_0 = \frac{1}{y}\ln\frac{1}{\varepsilon}$, але таке A_0 залежить від y. Якщо $y \in [c; d]$, де $0 < c < d < +\infty$, то можна знайти таке A_0, що при всіх $A > A_0$:

$$\left|\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx\right| < \varepsilon.$$

Якщо покласти $y = c$,то $A_0 = \frac{1}{c}\ln\frac{1}{\varepsilon}$. Тоді $\forall A > A_0, \forall y \in [c; d]$, де $0 < c < d < +\infty$, маємо: $e^{-Ay} < e^{-Ac} < \varepsilon$.

Це означає, що на сегменті $[c; d]$ невласний інтеграл є рівномірно збіжний. Якщо ж розглянути сегмент $[0; d]$, то не можна знайти A_0, яке б не залежало від y. Дійсно, яким би великим число A не було, вираз $e^{-Ay} \to 1$, якщо $y \to 0$.

Це означає, що при достатньо малих значеннях y, вираз e^{-Ay} буде більший від довільного $\varepsilon < 1$. Тобто, на $[0; d]$ заданий інтеграл збігається нерівномірно.

Теорема 1 (критерій Коші). Для того, щоб невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x; y)dx$ збігався рівномірно на множині Y, необхідно і достатньо, щоб

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists A_0 \geq a\ \ \forall A_1, A_2,\ \ A_0 < A_1 < A_2, \forall y \in Y:\ \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x;y)dx\right| < \varepsilon.$$

Невласні інтеграли, які залежать від параметра, мають ряд властивостей, аналогічних до властивостей функціональних рядів, зокрема для них мають місце аналогічні ознаки рівномірної збіжності.

Теорема 2 (ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності). *Якщо* існує функція $g(x) \geq 0, x \in [a;+\infty]$, така, що

$|f(x,y)| \leq g(x), x \geq a, y \in Y,$

і невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ збігається, то $\int_a^{+\infty} f(x;y)dx$ збігається рівномірно на множині Y.

Доведення. Оскільки невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ збіжний, то згідно з критерієм Коші збіжності невласного інтеграла

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists A_0 \geq a\ \ \forall A_1, A_2,\ A_0 < A_1 < A_2: \int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx < \varepsilon.$$

Але $\forall y \in Y$ має місце нерівність:

$$\int_{A_1}^{A_2} |f(x,y)| dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx,$$

тому

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists A_0 \geq a\ \ \forall A_1, A_2,\ A_0 < A_1 < A_2, \forall y \in Y:$$

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x;y)dx\right| \leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x;y)|dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x)dx < \varepsilon.$$

Згідно з критерієм Коші рівномірної збіжності невласного інтеграла, залежного від параметра, маємо, що $\int_a^{+\infty} f(x;y)dx$ збігається рівномірно на множині Y.

Теорему доведено.

Приклад 2. Дослідити на рівномірну збіжність інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2 y}{1+x^2} dx, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Для підінтегральної функції виконується:

$$\left|\frac{\sin x^2 y}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in [0;+\infty], y \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ – збіжний, то, згідно з ознакою Вейєршрасса, досліджуваний інтеграл збігається рівномірно на множині $\mathbb{R}$.

Теорема 3 (ознака Діріхле рівномірної збіжності). Нехай функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ визначені на множині $[a;+\infty] \times Y$ і виконуються умови:

1. $\exists K > 0 \ \forall A \ge a \quad \forall y \in Y: \ \left|\int_a^A f(x;y)dx\right| \le K$;
2. при кожному фіксованому $\forall y \in Y$ функція $g(x;y)$ є монотонною по змінній x на множині $[a;+\infty]$;
3. функція $g(x;y)$ збігається рівномірно до нуля на множині Y при $x \to +\infty$.

Тоді невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x;y) \cdot g(x;y)dx$ збігається рівномірно на множині Y.

Теорема 4 (ознака Абеля рівномірної збіжності). Нехай функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ визначені на множині $[a;+\infty] \times Y$ і виконуються умови:

1. невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x;y)dx$ збігається рівномірно на множині Y;
2. при кожному фіксованому $\forall y \in Y$ функція $g(x;y)$ є монотонною по змінній x на множині $[a;+\infty]$;
3. $\exists K > 0 \ \forall x \ge a \quad \forall y \in Y: \ |g(x;y)| \le K$.

Тоді невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x;y) \cdot g(x;y)dx$ збігається рівномірно на множині Y.

Приклад 3. Дослідити на рівномірну збіжність інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx, \qquad Y = [1;+\infty).$$

Розв'язання. Скористаємося ознакою Діріхле. Покладемо

$$f(x;y) = \sin xy, \qquad g(x;y) = \frac{1}{x}.$$

1. Розглянемо інтеграл

$$\left|\int_1^A \sin xy dx\right| = \left|\frac{-\cos xy}{y}\right|_1^A\right| = \frac{|\cos y - \cos Ay|}{y} \le \frac{|\cos y| + |\cos Ay|}{y} \le \frac{2}{1} = 2.$$

Отже,

$$\exists K = 2 \ \ \forall A \ge 1 \ \ \forall y \ge 1\colon \left|\int_1^A \sin xy dx\right| \le K.$$

2. Функція $g(x;y) = \frac{1}{x}$ монотонно спадає при $x \in [1;+\infty]$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x;y) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Тому за ознакою Діріхле інтеграл збігається рівномірно на множині $Y = [1;+\infty)$.

Приклад 4. Довести, що інтеграл $\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx$

1. збігається рівномірно на будь-якому проміжку $0 < a \le y \le b$;

2. збігається нерівномірно на проміжку $0 \le y \le b$.

Розв'язання.

1. Нехай $0 < a \le y \le b$. Користуючись означенням знайдемо

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;b]} \left|\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx\right| = \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;b]} \int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;b]} \lim_{B\to+\infty} \int_A^B ye^{-xy}dx = \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;b]} \lim_{B\to+\infty} \left(-e^{-xy}\Big|_A^B\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;b]} \lim_{B\to+\infty} \left(e^{-Ay} - e^{-By}\right) = \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;b]} e^{-Ay} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;b]} \frac{1}{e^{Ay}} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{e^{Aa}} = 0.$$

Отже, інтеграл збігається рівномірно на множині $[a;b]$, $a > 0$.

2. Нехай $0 \le y \le b$. Згідно означення знайдемо

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[0;b]} \left|\int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx\right| = \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[0;b]} \int_A^{+\infty} ye^{-xy}dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[0;b]} \lim_{B\to+\infty} \int_A^B ye^{-xy}dx = \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[0;b]} \lim_{B\to+\infty} (-e^{-xy}|_A^B) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[0;b]} \lim_{B\to+\infty} (e^{-Ay} - e^{-By}) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[0;b]} e^{-Ay} = \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[0,b]} \frac{1}{e^{Ay}} = = \lim_{A\to+\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Отже, інтеграл збігається нерівномірно на проміжку $[0; b]$.

Приклад 5. Дослідити на рівномірну збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^y}$.

1. якщо $1 < a \leq y < +\infty$; 2. якщо $1 < y < +\infty$.

Розв’язання.

1. Нехай $1 < a \leq y < +\infty$. Згідно означення знайдемо

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;+\infty)} \left|\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^y}\right| = \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;+\infty)} \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^y} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;+\infty)} \lim_{B\to+\infty} \int_A^B \frac{dx}{x^y} = \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;+\infty)} \lim_{B\to+\infty} \left(\frac{x^{-y+1}}{-y+1}\Big|_A^B \right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;+\infty)} \lim_{B\to+\infty} \left(\frac{B^{-y+1}}{-y+1} - \frac{A^{-y+1}}{-y+1} \right) = \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;+\infty)} \frac{A^{-y+1}}{y-1} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[a;+\infty)} \frac{1}{A^{y-1}(y-1)} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^{a-1}(a-1)} = 0.$$

Отже, інтеграл збігається рівномірно на множині $[a; +\infty)$, $a > 1$.

2. Нехай $1 < y < +\infty$. Згідно означення знайдемо

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in(1;+\infty)} \left|\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^y}\right| = \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in(1;+\infty)} \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^y} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in(1;+\infty)} \lim_{B\to+\infty} \int_A^B \frac{dx}{x^y} = \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in(1;+\infty)} \lim_{B\to+\infty} \left(\frac{x^{-y+1}}{-y+1}\Big|_A^B \right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in(1;+\infty)} \lim_{B\to+\infty} \left(\frac{B^{-y+1}}{-y+1} - \frac{A^{-y+1}}{-y+1} \right) = \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in(1;+\infty)} \frac{A^{-y+1}}{y-1} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in(1;+\infty)} \frac{1}{A^{y-1}(y-1)} = +\infty.$$

Отже, інтеграл збігається нерівномірно на множині $(1; +\infty)$.

Приклад 6. Дослідити на рівномірну збіжність інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання. Для підінтегральної функції виконується:

$$\left|\frac{\cos xy}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in (-\infty; +\infty), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$ - збіжний, то, згідно з ознакою Вейєршрасса, досліджуваний інтеграл збігається рівномірно на множині $\mathbb{R}$.

Приклад 7. Дослідити на рівномірну збіжність інтеграл

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-xy} \sin x \, dx, \qquad 0 < y_0 \leq y < +\infty.$$

Розв'язання. Для підінтегральної функції виконується:

$$|e^{-xy} \sin x| \leq e^{-xy} = \frac{1}{e^{xy}} \leq \frac{1}{e^{xy_0}}, \qquad x \in [0; +\infty), \qquad y \in [y_0; +\infty).$$

Оскільки інтеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{e^{xy_0}} = \left.\frac{e^{-xy_0}}{-y_0}\right|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{y_0} < +\infty$$

є збіжний, то згідно з ознакою Вейєршрасса, досліджуваний інтеграл збігається рівномірно на множині $[y_0; +\infty)$.

Приклад 8. Дослідити на рівномірну збіжність інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx, \qquad 0 \leq p \leq 10.$$

Розв'язання. Маємо

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx = \int_{1}^{e} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx + \int_{e}^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx.$$

Перший інтеграл є неперервною функцією змінної p, оскільки підінтегральна функція $\frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}}$ неперервна при $x \in [1, e]$, $p \in [0,10]$. Тому потрібно дослідити на рівномірну збіжність інтеграл $\int_e^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx$.

Для підінтегральної функції виконується:

$$\frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln^p x}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{x\sqrt[4]{x}} \leq \frac{\ln^{10} x}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}, \qquad x \geq e.$$

Розглянемо функцію $y = \frac{\ln^{10} x}{\sqrt[4]{x}}$. Знайдемо її найбільше значення при $x \geq e$.

$$y' = \frac{10 \cdot \ln^9 x \cdot \frac{1}{x} \cdot \sqrt[4]{x} - \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \cdot \ln^{10} x}{\sqrt{x}} = \frac{x^{-\frac{3}{4}} \cdot \ln^9 x (40 - \ln x)}{4\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow$$

$$40 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e^{40}.$$

$$y_{\max} = y(e^{40}) = \frac{\ln^{10}(e^{40})}{\sqrt[4]{e^{40}}} = \frac{40^{10}}{e^{10}} = \left(\frac{40}{e}\right)^{10}.$$

Тоді

$$\frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln^p x}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{x\sqrt[4]{x}} \leq \frac{\ln^{10} x}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{x\sqrt[4]{x}} \leq \left(\frac{40}{e}\right)^{10} \cdot \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}, \qquad x \geq e.$$

Оскільки інтеграл

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[4]{x}} = \int_e^{+\infty} x^{-\frac{5}{4}} dx = -4 \cdot x^{-\frac{1}{4}}\Big|_e^{+\infty} = 4 \cdot e^{-\frac{1}{4}} < +\infty,$$

збіжний, то, згідно з ознакою Вейєршрасса, досліджуваний інтеграл збігається рівномірно на множині $0 \leq p \leq 10$.

Приклад 9. Дослідити на рівномірну збіжність інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx, \quad y \geq 0.$$

Розв’язання. Скористаємося ознакою Абеля. Покладемо

$$f(x; y) = \frac{\sin x}{x}, \qquad g(x; y) = e^{-xy}.$$

1. Розглянемо $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, який збіжний.

2. при кожному фіксованому $\forall y \geq 0$ функція $g(x;y) = e^{-xy}$ є монотонною по змінній x на множині $[0;+\infty)$;

3. $\exists K = 1 > 0 \ \forall x \geq 0 \forall y \geq 0 : \ |g(x,y)| = |e^{-xy}| = \frac{1}{e^{xy}} \leq 1 = K.$

Тому за ознакою Абеля інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ збігається рівномірно на множині $[0;+\infty)$.

6. Властивості рівномірно збіжних невласних інтегралів, залежних від параметра: неперервність та інтегровність по параметру

Має місце теорема.

Теорема 1 (про неперервність по параметру невласного інтеграла, залежного від параметра). Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на множині $[a;+\infty] \times [c;d]$ і невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x;y)dx$ збігається рівномірно на сегменті $[c;d]$, то функція

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x;y)dx$$

є неперервною на $[c;d]$.

Доведення. Покажемо, що нескінченно малому приросту аргументу $\Delta y = y_1 - y_2, \ \ y_1, y_2 \in [c;d]$ відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta I(y) = I(y_1) - I(y_2)$.

Виберемо $\forall \varepsilon > 0$. Згідно з умовою теореми $\int_a^{+\infty} f(x;y)dx$ є рівномірно збіжним. Це означає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_0 \geq a \ \forall A > A_0 \ \ \forall y \in [c;d] : \left| \int_A^{+\infty} f(x;y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Візьмемо $\forall A > A_0$. Розглянемо вираз

$$|I(y_1) - I(y_2)| = \left| \int_a^{+\infty} f(x;y_1)\, dx - \int_a^{+\infty} f(x;y_2)dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^A f(x;y_1)dx + \int_A^{+\infty} f(x;y_1)dx - \int_a^A f(x;y_2)dx - \int_A^{+\infty} f(x;y_2)dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_a^A \big(f(x;y_1) - f(x;y_2)\big)dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(x;y_1)dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(x;y_2)dx \right| <$$

$$< \left| \int_a^A \big(f(x;y_1) - f(x;y_2)\big)dx \right| + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Оскільки $\int_a^A f(x;y)dx$ є власним інтегралом залежним від y, а функція $f(x;y)$ неперервна в прямокутнику $[a,A] \times [c;d]$, то цей інтеграл є неперервною функцією змінної y на $[c;d]$, а тому, згідно з теоремою Кантора, і рівномірно неперервною. Тобто для вибраного $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 \ \ \forall y_1, y_2 \in [c;d], |\Delta y| = |y_1 - y_2| < \delta :$$

$$\left| \int_a^A \big(f(x,y_1) - f(x,y_2)\big)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Звідси отримаємо, що $|I(y_1) - I(y_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$, якщо $|\Delta y| < \delta$.

Теорему доведено.

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію

$$I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^y} dx, \qquad y \geq 1.$$

Розв'язання. Функція $\frac{\cos x}{x^y}$ неперервна на множині $[1;+\infty) \times [1;+\infty)$.

Покажемо, що невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^y} dx$ збігається рівномірно на множині $[1;+\infty)$.

Скористаємося ознакою Діріхле. Покладемо

$$f(x;y) = \cos x, \qquad g(x;y) = \frac{1}{x^y}.$$

1. Розглянемо

$$\left| \int_1^A \cos x \, dx \right| = |\sin x|_1^A| = |\sin A - \sin 1| \leq |\sin A| + |\sin 1| < 2.$$

Отже,

$$\exists\, K = 2\ \ \forall A \geq 1\ \ \forall y \geq 1\colon \left|\int_1^A \cos x\, dx\right| \leq K = 2.$$

2. Функція $g(x; y) = \frac{1}{x^y}$ при кожному фіксованому $\forall y \geq 1$ монотонно спадає при $x \in [1; +\infty)$.

3. функція $g(x, y)$ збігається рівномірно до нуля на множині $[1; +\infty)$ при $x \to +\infty$, тобто

$$\lim_{x\to+\infty} \sup_{y\geq 1} |g(x; y)| = \lim_{x\to+\infty} \sup_{y\geq 1} \frac{1}{x^y} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Тоді за ознакою Діріхле інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^y} dx$ збігається рівномірно на множині $[1; +\infty)$.

Отже, інтеграл

$$I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^y} dx,$$

є неперервною функцією від змінної y на множині $[1; +\infty)$.

Теорема 2 (про інтегрування по параметру невласного інтеграла, залежного від параметра). Нехай функція $f(x; y)$ неперервна на множині $[a; +\infty] \times [c; d]$, невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x; y) dx$ збігається рівномірно на $[c; d]$. Тоді функція

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x; y) dx$$

інтегровна на $[c; d]$ і має місце рівність

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Доведення. Згідно з попередньою теоремою функція $I(y)$ неперервна на $[c; d]$, а значить інтегровна на цьому сегменті. Візьмемо $\forall A \geq a$. Знайдемо

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x; y) dy =$$

$$= \int_c^d dy \left(\int_a^A f(x;y)dx + \int_A^{+\infty} f(x;y)dx \right) =$$

$$= \int_c^d dy \int_a^A f(x;y)dx + \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x;y)dx =$$

$$= \int_c^d dy \int_a^A f(x;y)dx + r(A) = I.$$

Оскільки $f(x;y)$ неперервна, то в повторному інтегралі зі сталими межами можна змінювати порядок інтегрування. Тому

$$I = \int_c^d dy \int_a^A f(x;y)dx + r(A) = \int_a^A dx \int_c^d f(x;y)dy + r(A).$$

Розглянемо $r(A) = \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x;y)dx$. Оскільки невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x;y)dx$ збігається рівномірно на сегменті $[c;d]$, то згідно з означенням:

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{y\in[c;d]} \left| \int_A^{+\infty} f(x;y)dx \right| = 0.$$

Це означає, що $\lim\limits_{A\to+\infty} r(A) = 0$.

В рівності

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x;y)dy = \int_a^A dx \int_c^d f(x;y)dy + r(A).$$

перейдемо до границі при $A \to +\infty$. Одержимо:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x;y)dy + 0.$$

Теорему доведено.

Приклад 2. Користуючись формулою

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy, \qquad 0 < a < b,$$

обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad 0 < a < b.$$

Розв'язання. Підставимо в I замість $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ відповідний інтеграл. Отримаємо:

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy} dy\,.$$

Розглянемо функцію

$$f(x,y) = e^{-xy}, \qquad x \in [0;+\infty), \qquad y \in [a;b],$$

яка неперервна при $x \in [0;+\infty)$, $y \in [a;b]$.

Дослідимо на рівномірну збіжність

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx, \quad y \in [a;b].$$

Для підінтегральної функції виконується:

$$|e^{-xy}| = \frac{1}{e^{xy}} \le \frac{1}{e^{xa}} = e^{-ax}, \qquad x \in [0;+\infty), \qquad y \in [a;b].$$

Оскільки інтеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \left.\frac{e^{-ax}}{-a}\right|_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{-a} = \frac{1}{a} < +\infty$$

збіжний, то, згідно з ознакою Вейєршрасса, інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ збігається рівномірно на множині $[a;b]$.

Тому в повторному інтегралі можна змінити порядок інтегрування.

Отже,

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy} dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \int_a^b dy \lim_{B \to +\infty} \int_0^B e^{-xy} dx =$$

$$= \int_a^b dy \left(\lim_{B \to +\infty} \left.\frac{e^{-xy}}{-y}\right|_0^B \right) = \int_a^b \lim_{B \to +\infty} \left(\frac{e^{-By}}{-y} - \frac{1}{-y} \right) dy =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln|y|\,|_a^b = \ln\frac{b}{a}.$$

Приклад 2. Користуючись формулою

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy\,,\qquad 0<a<b,$$

обчислити інтеграл

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos mx\,dx,\qquad 0<a<b\,.$$

Розв'язання. Підставимо в I замість $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ відповідний інтеграл. Отримаємо

$$I=\int_0^{+\infty}\cos mx\,dx\int_a^b e^{-xy}dy=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}\cos mx\,dy\,.$$

Розглянемо функцію

$$f(x,y)=e^{-xy}\cos mx\,,\qquad x\in[0;+\infty),\qquad y\in[a;b],$$

яка неперервна при $x\in[0;+\infty), y\in[a;b]$.

Дослідимо на рівномірну збіжність інтеграл

$$\int_0^{+\infty}e^{-xy}\cos mx\,dx,\quad y\in[a;b].$$

Для підінтегральної функції виконується:

$$|e^{-xy}\cos mx|\le e^{-ax},\qquad x\in[0;+\infty),\qquad y\in[a;b].$$

Оскільки інтеграл

$$\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{e^{-ax}}{-a}\bigg|_0^{+\infty}=0-\frac{1}{-a}=\frac{1}{a}<+\infty$$

збіжний, то, згідно з ознакою Вейєрштрасса, інтеграл $\int_0^{+\infty}e^{-xy}\cos mx\,dx$ збігається рівномірно на множині $[a;b]$.

Тому в повторному інтегралі можна змінити порядок інтегрування.

Отже,

$$I=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}\cos mx\,dy=\int_a^b dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}\cos mx\,dx=$$

$$=\int_a^b dy\lim_{B\to+\infty}\int_0^B e^{-xy}\cos mx\,dx=$$

$$
= \left| \begin{array}{c} \text{Скористаємося відомою формулою} \\ \int e^{ax} \cdot \cos bx dx = \dfrac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C \\ a = -y, \;\; b = m \end{array} \right| =
$$

$$
= \int_a^b dy \left(\lim_{B \to +\infty} \frac{e^{-xy}(-y \cos mx + m \sin mx)}{y^2 + m^2} \Bigg|_0^B \right) =
$$

$$
= \int_a^b \lim_{B \to +\infty} \left(\frac{e^{-By}(-y \cos mB + m \sin mB)}{y^2 + m^2} - \frac{-y}{y^2 + m^2} \right) dy =
$$

$$
= \int_a^b \frac{y}{y^2 + m^2} dy = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d(y^2 + m^2)}{y^2 + m^2} = \frac{1}{2} \ln(y^2 + m^2)|_a^b = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + m^2}{a^2 + m^2}.
$$

7. Диференціювання по параметру невласних інтегралів, що залежать від параметра. Інтегрування по параметру по нескінченному проміжку. Інтеграли Діріхле та Ейлера-Пуассона

Має місце теорема.

Теорема 1 (про диференціювання по параметру невласного інтеграла, залежного від параметра). Нехай виконуються умови:

1. функції $f(x; y)$ та $f_y'(x, y)$ неперервні на множині $[a; +\infty] \times [c; d]$;

2. $\int_a^{+\infty} f(x; y) dx$ збіжний при будь-якому $y \in [c; d]$;

3. $\int_a^{+\infty} f_y'(x; y) dx$ рівномірно збіжний на $[c; d]$.

Тоді функція $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x; y) dx$ диференційовна на $[c; d]$ і

$$
I'(y) = \int_a^{+\infty} f_y'(x, y) dx.
$$

Доведення. Згідно з умовою функція $f_y'(x; y)$ неперервна на множині $[a; +\infty] \times [c; d]$ і $\int_a^{+\infty} f_y'(x; y) dx$ рівномірно збіжний на $[c; d]$. Тоді функція $\varphi(y) = \int_a^{+\infty} f_y'(x; y) dx$ неперервна на $[c; d]$.

До функції $\varphi(u)$ на сегменті $[c; y], y \in [c; d]$, застосуємо теорему про інтегрування по параметру невласного інтеграла, залежного від параметра. Маємо:

$$\int_{c}^{y} \varphi(u)du = \int_{c}^{y} du \int_{a}^{+\infty} f'_u(x,u)dx = \int_{a}^{+\infty} dx \int_{c}^{y} f'_u(x,u)du =$$

$$= \int_{a}^{+\infty} f(x,u)|_c^y dx = \int_{a}^{+\infty} \big(f(x,y) - f(x,c)\big)dx =$$

$$= \int_{a}^{+\infty} f(x,y)\, dx - \int_{a}^{+\infty} f(x,c)\, dx = \int_{a}^{+\infty} f(x,y)\, dx + C.$$

Отже,

$$\int_{c}^{y} \varphi(u)du = \int_{a}^{+\infty} f(x,y)\, dx + C \quad \text{або} \quad I(y) + C = \int_{c}^{y} \varphi(u)du.$$

Тоді

$$I'(y) + 0 = \left(\int_{c}^{y} \varphi(u)du\right)' = \varphi(y) = \int_{a}^{+\infty} f'_y(x,y)dx.$$

Теорему доведено.

Приклад 1 (інтеграл Діріхле). Знайти інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Розв'язання. Будемо вважати, що підінтегральна функція в точці $x = 0$ набуває значення, яке дорівнює $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Розглянемо інтеграл

$$I(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx\,, \qquad k > 0, \alpha \geq 0.$$

Функція $f(x,\alpha) = e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x}$ є неперервною при $x \geq 0, \alpha \geq 0$.

Знайдемо $f'_\alpha(x,\alpha) = e^{-kx} \cos \alpha x$. Ця функція також є неперервною при $x \geq 0, \alpha \geq 0$.

Розглянемо $\int_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)dx = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos\alpha x\,dx$. Дослідимо цей інтеграл на рівномірну збіжність. Маємо

$$|e^{-kx}\cos\alpha x| \le e^{-kx}, \qquad x \ge 0, \alpha \ge 0.$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}dx = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B e^{-kx}dx = \lim_{B\to+\infty}\left.\frac{-e^{-kx}}{k}\right|_0^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{e^{-kx}}{k}\right) = \frac{1}{k} < +\infty.$$

Отже, за ознакою Вейєрштрасса $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos\alpha x\,dx$ збігається рівномірно на множині $[0; +\infty)$.

Представимо функцію $I(\alpha)$ у вигляді

$$I(\alpha) = \int_0^1 e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx.$$

В першому інтегралі підінтегральна функція неперервна по x, тому інтегровна. В другому інтегралі:

$$\left|e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}\right| \le e^{-kx}, \qquad x \ge 1.$$

Інтеграл $\int_1^{+\infty} e^{-kx}\,dx$ збіжний, тому $\int_1^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$ збіжний при всіх $\alpha \ge 0$.

Отже, до інтеграла $I(\alpha)$ можна застосувати попередню теорему. Будемо мати:

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)dx = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\cos\alpha x\,dx = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B e^{-kx}\cos\alpha x\,dx = I.$$

Нагадаємо, що $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos x + b\sin x)}{a^2+b^2} + C$.

Матимемо, що

$$I = \lim_{B\to+\infty}\left.\frac{e^{-kx}(-k\cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x)}{k^2+\alpha^2}\right|_0^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \frac{e^{-kB}(-k\cos\alpha B + \alpha\sin\alpha B) + k}{k^2+\alpha^2} = \frac{k}{k^2+\alpha^2}.$$

Отже, $I'(\alpha) = \frac{k}{k^2+\alpha^2}$. Тоді

$$I(\alpha) = \int \frac{k}{k^2+\alpha^2} d\alpha = k \cdot \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k} + C = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k} + C.$$

Знайдемо $I(0) = 0,\ I(0) = 0 + C \ \Rightarrow C = 0, I(\alpha) = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{k},\ k > 0.$

В останній рівності перейдемо до границі при $k \to +0$. Одержимо:

$$\lim_{k\to+0} I(\alpha) = \lim_{k\to+0} \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin\alpha x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\, dx = \lim_{k\to+0} \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{k} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, при $\alpha > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Якщо $\alpha < 0$, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Отже,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\alpha.$$

Якщо $\alpha = 1$, то $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Знайти точки розриву функції

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-a^2)x}{x} dx$$

та побудувати її графік.

Розв'язання. Скористаємося інтегралом Діріхле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\alpha.$$

Цей інтеграл має розрив у точці $\alpha = 0$. Тоді

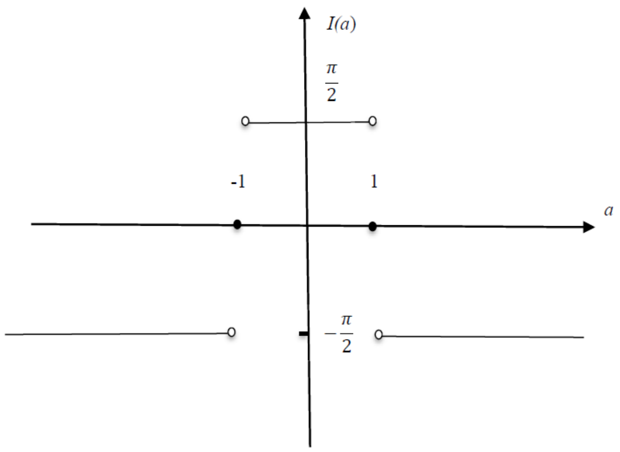
$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-a^2)x}{x} dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(1-a^2).$$

Нехай $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow \ 1 - a^2 < 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(1-a^2) = -1 \Rightarrow$ $I(a) = -\frac{\pi}{2}$.

Якщо $a \in (-1,1) \Rightarrow \ 1 - a^2 > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(1-a^2) = 1 \Rightarrow \ I(a) = \frac{\pi}{2}$.

Нехай $a = \pm 1 \Rightarrow \ 1 - a^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(1-a^2) = 0 \Rightarrow \ I(a) = 0$.

Отже, функція $I(a)$ має розрив у точках $a = -1$ і $a = 1$.



Приклад 3. Використовуючи інтеграл Діріхле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha,$$

обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x} dx.$$

Розв'язання. Скориставшись формулою пониження степеня $\sin^3 \alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$, маємо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{3\sin ax - \sin 3ax}{4x} dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{3\sin ax}{4x}dx - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3ax}{4x}dx = \frac{3}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}dx - \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3ax}{x}dx =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}a - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}3a = \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}a.$$

Приклад 4. Використовуючи інтеграл Діріхле, обчислити

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}dx.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}dx = \left|\begin{matrix} x^2 = t \\ x = \sqrt{t} \\ dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \end{matrix}\right| = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 5. Використовуючи диференціювання по параметру, обчислити інтеграл

$$I = I(m) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\sin mx\,dx, \qquad 0 < a < b\,.$$

Розв'язання. Знайдемо границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\sin mx = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}(e^{-ax} - e^{-bx})\frac{\sin mx}{mx}m = 0.$$

Розглянемо функції

$$f(x,m) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\sin mx\,, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$f'_m(x,m) = \begin{cases} (e^{-ax} - e^{-bx})\cos mx\,, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

які неперервні $\forall\, x \geq 0, \forall\, m \in \mathbb{R}$.

При кожному $m \in \mathbb{R}$ невласний інтеграл I є збіжний, оскільки

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\sin mx\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx \, dx.$$

В першому інтегралі підінтегральна функція неперервна, тому цей інтеграл є неперервною функцією змінної m.

Для підінтегральної функції в другому інтегралі виконується

$$\left| \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx \right| \leq \left| \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right| \leq |e^{-ax} - e^{-bx}| = e^{-ax} - e^{-bx},$$

$$x \geq 1, 0 < a < b \, , m \in \mathbb{R}.$$

Знайдемо

$$\int_1^{+\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) dx = \lim_{B \to +\infty} \int_1^B (e^{-ax} - e^{-bx}) =$$

$$= \lim_{B \to +\infty} \left(\frac{e^{-ax}}{-a} - \frac{e^{-bx}}{-b} \right) \Bigg|_1^B = \lim_{B \to +\infty} \left(\frac{e^{-aB}}{-a} - \frac{e^{-bB}}{-b} - \left(\frac{e^{-a}}{-a} - \frac{e^{-b}}{-b} \right) \right) =$$

$$0 - \left(\frac{e^{-a}}{-a} - \frac{e^{-b}}{-b} \right) = \frac{1}{ae^a} - \frac{1}{be^b} < +\infty.$$

Так як $\int_1^{+\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) dx$ збіжний, то і $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx \, dx.$ збігається при кожному $m \in \mathbb{R}$.

Розглянемо інтеграл

$$\int_0^{+\infty} f'_m(x, m) dx = \int_0^{+\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) \cos mx \, dx \, .$$

Цей інтеграл збігається рівномірно на множині $\mathbb{R}$ за ознакою Вейєрштрасса, бо

$$|(e^{-ax} - e^{-bx}) \cos mx| \leq e^{-ax} - e^{-bx}, \forall \, x \geq 0, \forall \, m \in \mathbb{R} \, ,$$

і збіжним є інтеграл:

$$\int_0^{+\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) dx = \lim_{B \to +\infty} \int_0^B (e^{-ax} - e^{-bx}) \, dx = \lim_{B \to +\infty} \left(\frac{e^{-ax}}{-a} - \frac{e^{-bx}}{-b} \right) \Bigg|_0^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left(\frac{e^{-aB}}{-a} - \frac{e^{-bB}}{-b} - \left(\frac{1}{-a} - \frac{1}{-b}\right)\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} < +\infty.$$

Скористаємося теоремою про диференціювання по параметру невласного інтеграла, залежного від параметра:

$$I'(m) = \int_0^{+\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) \cos mx \ dx =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\int_0^{B} (e^{-ax} - e^{-bx}) \cos mx \ dx =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left(\int_0^{B} e^{-ax} \cos mx \ dx - \int_0^{B} e^{-bx} \cos mx \ dx \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Скористаємося відомою формулою} \\ \int e^{ax} \cdot \cos mx \, dx = \dfrac{e^{ax}(a \cos mx + m \sin mx)}{a^2+m^2} + C \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left(\left.\frac{e^{-ax}(-a \cos mx + m \sin mx)}{a^2+m^2}\right|_0^B - \left.\frac{e^{-bx}(-b \cos mx + m \sin mx)}{b^2+m^2}\right|_0^B\right) =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left(\frac{e^{-aB}(-a \cos mB + m \sin mB)}{a^2+m^2} - \frac{-a}{a^2+m^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{-bB}(-b \cos mB + m \sin mB)}{b^2+m^2} + \frac{-b}{b^2+m^2}\right) = \frac{a}{a^2+m^2} - \frac{b}{b^2+m^2}.$$

Отже,

$$I'(m) = \frac{a}{a^2+m^2} - \frac{b}{b^2+m^2}.$$

Тоді

$$I(m) = \int I'(m) dm = \int \left(\frac{a}{a^2+m^2} - \frac{b}{b^2+m^2}\right) dm$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{m}{a} - \operatorname{arctg}\frac{m}{b} + C.$$

Поклавши $m = 0$, одержимо, що

$$I(0) = 0 = C.$$

Таким чином

$$I(m) = \operatorname{arctg}\frac{m}{a} - \operatorname{arctg}\frac{m}{b} = \operatorname{arctg}\frac{m(b-a)}{ab+m^2}.$$

Теорема 2 (про інтегрування по параметру невласного інтеграла, залежного від параметра, по нескінченному проміжку).

Нехай виконуються умови:

1. функція $f(x;y)$ неперервна на множині $[a;+\infty]\times[c;+\infty]$;

2. для будь-якого $b > a$ інтеграл $\int_c^{+\infty} f(x;y)dy$ збігається рівномірно на $[a;b]$;

3. для будь-якого $d > c$ інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x;y)dx$ збігається рівномірно на$[c;d]$,

4. для $x \geq a, y \geq c$ збігаються інтеграли $\int_a^{+\infty}|f(x;y)|dx$, $\int_c^{+\infty}|f(x;y)|dy$.

Тоді, якщо хоча б один з повторних інтегралів

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x;y)|\,dy \text{ або } \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x;y)|\,dx$$

збіжний, то збігаються і рівні між собою повторні інтеграли

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x;y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x;y)dx.$$

Приклад 5 (інтеграл Ейлера-Пуассона). Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Розв'язання. Зробимо заміну $x = tu,\ t > 0,\ dx = tdu$. Тоді

$$I = \int_0^{+\infty} te^{-t^2u^2}du.$$

Домножимо цю рівність на e^{-t^2}:

$$I \cdot e^{-t^2} = \int\limits_0^{+\infty} t \cdot e^{-t^2(u^2+1)} du.$$

Проінтегруємо одержану рівність по t в межах від 0 до $+\infty$:

$$I \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} t \cdot e^{-t^2(u^2+1)} du.$$

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} t \cdot e^{-t^2(u^2+1)} du = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_\varepsilon^{+\infty} dt \cdot \int\limits_0^{+\infty} t \cdot e^{-t^2(u^2+1)} du.$$

Для $\varepsilon > 0$ до інтеграла $\int_\varepsilon^{+\infty} dt \cdot \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-t^2(u^2+1)} du$ застосуємо теорему 2.

Розглянемо функцію

$$f(t; u) = t \cdot e^{-t^2(u^2+1)}, t \ge \varepsilon, \qquad u \ge 0,$$

яка неперервна при $t \ge \varepsilon,\ u \ge 0$.

Маємо, що $\forall b \ge 0$

$$\sup_{0 \le u \le b} \int\limits_A^{+\infty} t \cdot e^{-t^2(u^2+1)} dt = -\frac{1}{2} \sup_{0 \le u \le b} \int_A^{+\infty} \frac{d\left(e^{-t^2(u^2+1)}\right)}{u^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2} \sup_{0 \le u \le b} \frac{1}{u^2+1} \cdot e^{-t^2(u^2+1)} \Big|_A^{+\infty} = \frac{1}{2} \sup_{0 \le u \le b} \frac{1}{u^2+1} \cdot e^{-A^2(u^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-A^2} \to 0, \qquad A \to +\infty.$$

Отже, для будь-якого $b \ge 0$ інтеграл $\int_0^{+\infty} t \cdot e^{-t^2(u^2+1)} dt$ збігається рівномірно на $[0; b]$.

Крім того, $\forall d > 0$:

$$\sup_{\varepsilon \le t \le d} \int\limits_A^{+\infty} t \cdot e^{-t^2(u^2+1)} du \le \sup_{\varepsilon \le t \le d} \int\limits_A^{+\infty} t \cdot e^{-2u \cdot t^2} du =$$

$$= \sup_{\varepsilon\le t\le d} t \cdot \frac{e^{-2u\cdot t^2}}{-2t^2}\bigg|_A^{+\infty} = \sup_{\varepsilon\le t\le d} \frac{1}{2t\cdot e^{-2A\cdot t^2}} = \frac{1}{2\varepsilon\cdot e^{2A\cdot\varepsilon^2}} \to 0, \qquad A\to+\infty.$$

Отже, для будь-якого $\forall d > 0$ інтеграл $\int_0^{+\infty} t\cdot e^{-t^2(u^2+1)}du$ збігається рівномірно на $[\varepsilon; d]$.

Тоді, згідно з теоремою 2, маємо

$$\int_\varepsilon^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} t\cdot e^{-t^2(u^2+1)}du = \int_0^{+\infty} du \int_\varepsilon^{+\infty} t\cdot e^{-t^2(u^2+1)}dt.$$

Обчислимо інтеграл в правій частині рівності

$$\int_0^{+\infty} du \int_\varepsilon^{+\infty} t\cdot e^{-t^2(u^2+1)}dt = \int_0^{+\infty} du \lim_{B\to+\infty}\int_\varepsilon^{B} -\frac{d\left(e^{-t^2(u^2+1)}\right)}{2(u^2+1)} =$$

$$= \int_0^{+\infty} du \lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{2(u^2+1)}\cdot\left(e^{-B^2(u^2+1)} - e^{-\varepsilon^2(u^2+1)}\right)\right) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(u^2+1)}\cdot e^{-\varepsilon^2(u^2+1)}du.$$

Таким чином, $I^2 = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2(u^2+1)}\cdot e^{-\varepsilon^2(u^2+1)}du$.

Так як можна здійснити граничний перехід, то

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{2(u^2+1)}\cdot e^{-\varepsilon^2(u^2+1)}\right)du = \int_0^{+\infty}\frac{du}{2(u^2+1)} =$$

$$= \lim_{B\to+\infty}\int_0^{B}\frac{du}{2(u^2+1)} = \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg} u\big|_0^B = \frac{\pi}{4}.$$

Отже,

$$I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Наслідок. Якщо в рівності $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ покласти $x = \sqrt{\alpha}t, \alpha > 0$, матимемо

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\sqrt{\alpha}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Приклад 6. Використовуючи інтеграл Ейлера-Пуассона

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, обчислити $\int_{-\infty}^{+\infty}(4x-1)e^{-(x^2+6x+10)}dx$.

Розв'язання. Врахуємо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot 2 = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = 0.$$

Маємо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(4x-1)e^{-(x^2+6x+10)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(4x-1)e^{-(x+3)^2-1}dx = \begin{vmatrix} x+3=t \\ x=t-3 \\ dx=dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(4(t-3)-1)e^{-t^2-1}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}(4t-13)e^{-t^2-1}dt =$$

$$= 4\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2-1}dt - 13\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-1}dt = \frac{4}{e}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt - \frac{13}{e}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt =$$

$$= \frac{4}{e}\cdot 0 - \frac{13}{e}\cdot\sqrt{\pi} = -\frac{13}{e}\cdot\sqrt{\pi}.$$

Приклад7. Обчислити інтеграл

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\, dx\,, \alpha > 0.$$

Розв'язання. Покажемо, що цей невласний інтеграл є рівномірно збіжний. Оскільки

$$\left|e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\right| \le e^{-\alpha x^2}, \forall\, x \ge 0, \forall\, \beta \in \mathbb{R},$$

а $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx -$ збіжний, то за ознакою Вейєрштрасса $I(\beta)$ збігається рівномірно на $\mathbb{R}$.

Розглянемо функції $f(x;\beta) = e^{-\alpha x^2}\cos\beta x$,

$f'_\beta(x;\beta) = -x \cdot e^{-\alpha x^2} \sin\beta x$, які неперервні $\forall\, x \geq 0, \forall\, \beta \in \mathbb{R}$.

Розглянемо тепер інтеграл

$$\int_0^{+\infty} f'_\beta(x;\beta)dx = -\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2} \sin\beta x\, dx .$$

Цей інтеграл збігається рівномірно за ознакою Вейєрштрасса, бо

$$\left|-xe^{-\alpha x^2}\sin\beta x\right| \leq xe^{-\alpha x^2}, \forall\, x \geq 0, \forall\, \beta \in \mathbb{R}\,,$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}dx = -\lim_{B\to+\infty}\int_0^B \frac{1}{2\alpha} d(\, e^{-\alpha x^2}) = -\frac{1}{2\alpha}\lim_{B\to+\infty} e^{-\alpha x^2}\Big|_0^B =$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}\lim_{B\to+\infty}\left(e^{-\alpha B^2} - 1\right) = \frac{1}{2\alpha} < +\infty.$$

Скористаємося теоремою про диференціювання по параметру невласного інтеграла, залежного від параметра:

$$I'(\beta) = \int_0^{+\infty} -xe^{-\alpha x^2}\sin\beta x\, dx = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B -xe^{-\alpha x^2}\sin\beta x\, dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \sin\beta x \\ du = \beta\cos\beta x\, dx \\ dv = -xe^{-\alpha x^2}dx \\ v = \dfrac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2} \end{vmatrix} = \lim_{B\to+\infty}\left(\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\sin\beta x\Big|_0^B - \frac{\beta}{2\alpha}\int_0^B e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\, dx\right) =$$

$$= 0 - \frac{\beta}{2\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\, dx = -\frac{\beta}{2\alpha}I(\beta).$$

Отже,

$$I'(\beta) = -\frac{\beta}{2\alpha}I(\beta) \Rightarrow \frac{dI}{d\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha}I(\beta) \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{\beta}{2\alpha}d\beta \;\Rightarrow$$

$$\ln I = -\frac{\beta^2}{4\alpha} + \ln C \;\Rightarrow\; \frac{I}{C} = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \;\Rightarrow\; I = Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Покладемо $\beta = 0$, одержимо, що

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

З іншого боку $I(0) = C \cdot e^0 = C,$ звідси $C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$

Таким чином, $I(\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$

Теорема 3 (про граничний перехід під знаком невласного інтеграла, залежного від параметра). Нехай функція $f(x; y)$ визначена на множині $[a; +\infty) \times Y$, y_0 − гранична точка множини Y.

Нехай також виконуються умови:

1. $\forall A \geq a$ функція $f(x; y)$ збігається рівномірно при $y \to y_0$ до функції $g(x)$ на $[a; A]$, тобто $\lim\limits_{y \to y_0} \sup\limits_{x \in [a;A]} |f(x, y) - g(x)| = 0;$

2. інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ збігається рівномірно на множині Y.

Тоді можна здійснити граничний перехід під знаком інтеграла

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x; y) dx = \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

8. Інтеграли Ейлера

Інтеграл Ейлера I роду (B − функція).

Означення 1. Інтеграл виду

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx, \qquad \alpha > 0, \beta > 0,$$

називається інтегралом Ейлера I роду.

Цей інтеграл визначає деяку функцію від параметрів α і β, яку називають B − функцією і позначають

$$\mathrm{B}(\alpha;\beta)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx. \qquad (1)$$

Зазначимо, що інтеграл (1) збігається при всіх $\alpha,\beta>0$.

З'ясуємо деякі властивості $\mathrm{B}-$ функції.

Властивості інтеграла Ейлера I роду.

1. Симетричність відносно змінних α,β

$$\mathrm{B}(\alpha;\beta)=\mathrm{B}(\beta;\alpha).$$

Дійсно,

$$\mathrm{B}(\alpha;\beta)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\left|\begin{matrix} t=1-x,\ \ x=1-t \\ dx=-dt \\ x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=0\end{matrix}\right|=$$

$$=-\int\limits_1^0(1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt=\int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt=\mathrm{B}(\beta,\alpha).$$

2. $\mathrm{B}(1;\beta)=\frac{1}{\beta},\mathrm{B}(\alpha;1)=\frac{1}{\alpha}$.

Дійсно,

$$\mathrm{B}(1;\beta)=\int\limits_0^1(1-x)^{\beta-1}dx=-\frac{(1-x)^{\beta}}{\beta}\Bigg|_0^1=-\left(0-\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\beta}.$$

Внаслідок симетричності

$$\mathrm{B}(\alpha;1)=\mathrm{B}(1;\alpha)=\frac{1}{\alpha}.$$

З останніх рівностей випливає, що $\mathrm{B}(1;1)=1$

3. Формули зведення:

$$\mathrm{B}(\alpha;\beta+1)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha;\beta),\qquad \mathrm{B}(\alpha+1;\beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha;\beta).$$

Дійсно,

$$\mathrm{B}(\alpha;\beta+1)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}dx=\int\limits_0^1 x^{\alpha+\beta-1}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\beta}dx=$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\beta} \\ du = \ \beta\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\beta-1} \cdot \frac{-x-(1-x)}{x^2}dx = -\beta\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\beta-1} \cdot \frac{1}{x^2}dx \\ dv = x^{\alpha+\beta-1}dx, \ \ v = \frac{x^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\beta} \cdot \frac{x^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta} \cdot \beta\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\beta-1} \cdot \frac{1}{x^2}dx =$$

$$= \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\beta} \cdot \frac{x^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\Bigg|_0^1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^1 x^{\alpha+\beta-(\beta-1)-2}(1-x)^{\beta-1}dx =$$

$$= 0 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha;\beta).$$

Внаслідок симетричності

$$\mathrm{B}(\alpha+1;\beta) = \mathrm{B}(\beta;\alpha+1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha;\beta).$$

Формули зведення дають можливість значення функції $\mathrm{B}(\alpha;\beta)$ для $\alpha > 1, \beta > 1$ звести до значення цієї функції від α та β з проміжку $(0;1]$.

Використовуючи формули зведення матимемо:

$$\mathrm{B}(\alpha+1;\beta+1) = \frac{\beta}{\alpha+1+\beta}\mathrm{B}(\alpha+1;\beta) = \frac{\beta}{\alpha+\beta+1} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha;\beta).$$

Використаємо отриманий результат для обчислення функції $\mathrm{B}(m;n)$, де $m,n \in \mathbb{N}$.

4. Має місце формула

$$\mathrm{B}(m;n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}, \qquad m,n \in \mathbb{N}.$$

Дійсно,

$$\mathrm{B}(m;n) = \mathrm{B}(m-1+1;n-1+1) =$$

$$= \frac{(m-1)(n-1)}{(m-1+n-1+1)(m-1+n-1)}\mathrm{B}(m-1;n-1) =$$

$$= \frac{(m-1)(n-1)}{(m+n-1)(m+n-2)} \mathrm{B}(m-1, n-1) =$$

$$= \frac{(m-1)(m-2)(n-1)(n-2)}{(m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)(m+n-4)} \mathrm{B}(m-2, n-2) =$$

$$\dots = \frac{(m-1)(m-2)\cdot \ldots \cdot 1 \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 1}{(m+n-1)(m+n-2)\cdot \ldots \cdot 1} \mathrm{B}(1,1) =$$

$$= \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

5. $\mathrm{B}(\alpha;\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha+\beta}} dt.$

Дійсно,

$$\mathrm{B}(\alpha;\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \left| \begin{array}{c} x = \dfrac{t}{t+1}, \qquad t = \dfrac{x}{1-x} \\ dx = \dfrac{1}{(t+1)^2} dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = +\infty \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{t+1}\right)^{\beta+1} \cdot \frac{dt}{(t+1)^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha+\beta}} dt.$$

Отримали інше представлення для $\mathrm{B}-$ функції:

$$\mathrm{B}(\alpha;\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha+\beta}} dt.$$

Приклад 1. Обчислити $\mathrm{B}(5;4)$.

Розв'язання. Скориставшись формулою

$$\mathrm{B}(m;n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}, \qquad m, n \in \mathbb{N},$$

маємо:

$$\mathrm{B}(5;4) = \frac{4!\,3!}{8!} = \frac{6}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = \frac{1}{280}.$$

Інтеграл Ейлера II роду ($\Gamma -$ функція).

Означення 2. Інтеграл виду

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx\,,\quad \alpha>0, \tag{2}$$

називається інтегралом Ейлера II роду.

Інтеграл (2) збігається при всіх $\alpha>0$ і визначає деяку функцію параметра α, яка називається $\Gamma -$ функцією і позначається $\Gamma(\alpha)$.

Властивості інтеграла Ейлера II роду.

1. $\Gamma(1)=1.$

Дійсно,

$$\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx=-\lim_{B\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^B=-\lim_{B\to+\infty}\left(e^{-B}-1\right)=1.$$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$

Маємо,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\left|\begin{matrix}\sqrt{x}=t, \qquad x=t^2\\ dx=2tdt\\ x=0\Rightarrow t=0\\ x=+\infty\Rightarrow t=+\infty\end{matrix}\right|=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{t}e^{-t^2}\cdot 2tdt=$$

$$=2\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dx=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}.$$

3. $\Gamma(\alpha)>0,\ \ \alpha>0.$

4. $\Gamma -$ функція має похідні будь-якого порядку, які можна знайти, користуючись теоремою 1 параграфа 7:

$$\Gamma'(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\ln x\, e^{-x}dx,$$

$$\Gamma''(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\ln^2 x\, e^{-x}dx,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\ln^n x\, e^{-x} dx.$$

5. Формула зведення

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \alpha > 0.$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = \begin{vmatrix} u = x^{\alpha} \\ du = \alpha x^{\alpha-1}dx \\ dv = e^{-x}dx \\ v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= -x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = 0 + \alpha\Gamma(\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Знайдемо

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\cdot\Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\cdot\Gamma(2) = 2\cdot 1,$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\cdot\Gamma(3) = 3\cdot 2\cdot 1,$$

$$\Gamma(5) = \Gamma(4+1) = 4\cdot\Gamma(4) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

6. $\Gamma(n) = (n-1)!\ ,\ \ n \in \mathbb{N}.$

7. Має місце формула

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n}\cdot\sqrt{\pi},\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Використаємо формулу зведення $\forall\alpha > 0, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(\alpha+n) = \Gamma(\alpha+n-1+1) = (\alpha+n-1)\Gamma(\alpha+n-1) =$$

$$= (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\Gamma(\alpha+n-2) = \cdots =$$

$$= (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)$$

Покладемо $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

8. Формула доповнення

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \qquad \alpha\in(0;1).$$

9. Формула подвоєння Лежандра

$$2^{\alpha-1}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(\alpha).$$

10. Графік $\Gamma -$ функції.

Побудуємо графік $\Gamma -$ функції. Знаючи значення функції в цілочисельних точках, обчислимо:

$$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1,\ \ \Gamma(3)=2,\ \ \Gamma(4)=6,\ldots\ .$$

Згідно з теоремою Ролля на інтервалі $(0;1)$ існує точка α_0, така що $\Gamma'(\alpha_0)=0$. Оскільки при всіх $\alpha>0, \Gamma''(\alpha)>0$, то функція $\Gamma'(\alpha)$ зростає при $\alpha>0$. Тому рівняння $\Gamma'(\alpha)=0$ не має інших коренів, окрім α_0. Крім того при $\alpha<\alpha_0$, $\Gamma'(\alpha)<0$, тобто функція $\Gamma(\alpha)$ спадає. При $\alpha>\alpha_0$, $\Gamma'(\alpha)>0$ і функція $\Gamma(\alpha)$ зростає. Тобто $\alpha_0 -$ точка мінімуму.

$\Gamma -$ функція, як і $\mathrm{B} -$ функція не є елементарною, але її властивості добре вивчені і для неї побудовані таблиці значень.

Відомо, що $\alpha_0 = 1{,}461\ldots$, $\Gamma(\alpha_0)=0{,}885$.

При $\alpha>\alpha_0$ $\Gamma -$ функція є зростаючою, тому

$$\forall\alpha>n+1, n\in\mathbb{N}, \qquad \Gamma(\alpha)>\Gamma(n+1)=n!\ .$$

Звідси при $n\to\infty$ до нескінченності прямує і α, тому

$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\Gamma(\alpha)=+\infty.$

Нехай тепер $\alpha\to+0$, тоді $\lim\limits_{\alpha\to+0}\Gamma(\alpha+1)=\Gamma(1)=1.$

З використанням формули зведення $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$ маємо, що

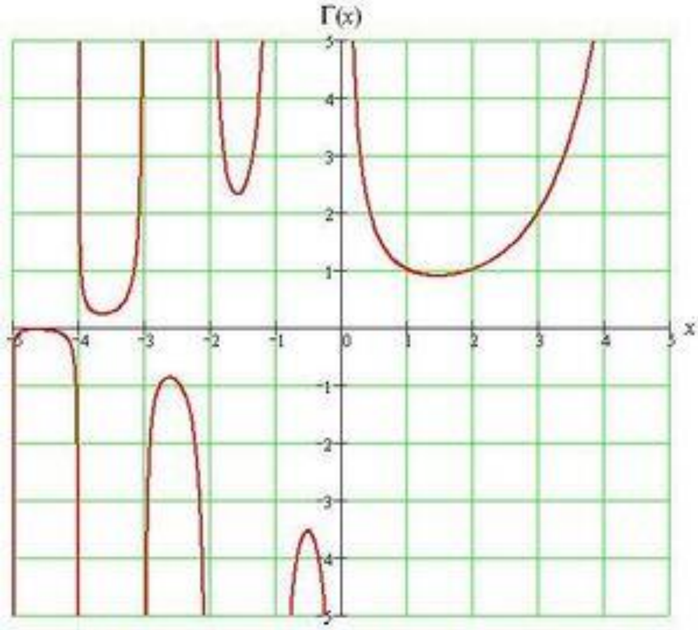
$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}. \tag{3}$$

Тоді одержимо, що

$$\lim_{\alpha \to +0} \Gamma(\alpha) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha} = +\infty.$$

Вище ми означили $\Gamma -$ функцію при $\alpha > 0$. Нехай тепер $\alpha \in (-1; 0)$, тоді $(\alpha + 1) \in (0; 1)$. При цьому права частина формули (3) має зміст. Завдяки цьому саме за формулою (3) доозначують $\Gamma -$ функцію на інтервалі $(-1; 0)$.

Візьмемо $\alpha \in (-2; -1)$, тоді $(\alpha + 1) \in (-1; 0)$. За допомогою формули (3) доозначимо $\Gamma -$ функцію на інтервалі $(-2; -1)$ і т.д.



Зазначимо що на $(-1; 0)$ $\Gamma -$функція має від'ємні значення. На $(-2; -1)$ $\Gamma -$функція матиме додатні значення.

Означення 3. Нехай $A -$ це деякий інтервал. Функція $f: A \to (0; +\infty)$ називається логарифмічно опуклою вниз на інтервалі A, якщо функція $\ln f$ є опуклою вниз на інтервалі A.

11. $\Gamma -$ функція є логарифмічно опуклою вниз на $(0; +\infty)$.

Дійсно, знайдемо

$$(\ln \Gamma(\alpha))' = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}, \qquad (\ln \Gamma(\alpha))'' = \frac{\Gamma''(\alpha) \cdot \Gamma(\alpha) - \left(\Gamma'(\alpha)\right)^2}{\left(\Gamma(\alpha)\right)^2}.$$

Скористаємося нерівністю Коші

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

Матимемо

$$\left(\Gamma'(\alpha)\right)^2 = (x^{\alpha-1}\ln x\, e^{-x}dx)^2 = \left(\int_0^{+\infty} x^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\ln x\, dx\right)^2 \le$$

$$\le \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \cdot \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\ln^2 x\, dx = \Gamma(\alpha)\cdot\Gamma''(\alpha).$$

Звідси

$$\Gamma''(\alpha)\cdot\Gamma(\alpha) - \left(\Gamma'(\alpha)\right)^2 \ge 0.$$

Тому $(\ln\Gamma(\alpha))'' \ge 0,\ \ \alpha > 0$. Отже, функція $\ln\Gamma(\alpha)$ опукла вниз на $(0;+\infty)$.

Теорема (основна теорема про Γ –функцію). Нехай функція $f\colon (0;+\infty) \to \mathbb{R}$ задовольняє умови:

1. $f(1) = 1$;

2. $f(\alpha+1) = \alpha f(\alpha), \forall\alpha > 0$;

3. $f(\alpha)$ логарифмічно опукла вниз на $(0;+\infty)$.

Тоді $\forall\alpha > 0\ \ :\ f(\alpha) = \Gamma(\alpha)$.

9. Зв'язок між інтегралами Ейлера

В цьому пункті виведемо формулу, яка пов'язує між собою Γ та B – функції.

Теорема. Має місце рівність

$$\mathrm{B}\,(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ \ \alpha,\beta > 0. \qquad (1)$$

Доведення. Для доведення формули (1) представимо B – функцію у вигляді

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha+\beta}}dt. \qquad (2)$$

Запишемо рівність

$$\Gamma\,(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx = \begin{vmatrix} x = ut, u > 0 \\ dx = udt \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} u^{p-1} t^{p-1}\, e^{-ut} \cdot udt = u^p \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\, e^{-ut} dt.$$

Звідси

$$\frac{\Gamma(p)}{u^p} = \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\, e^{-ut} dt. \qquad (3)$$

Покладемо в (3) $p = \alpha + \beta,\ u = 1 + v$. Маємо

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+v)^{\alpha+\beta}} = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1}\, e^{-(1+v)t} dt.$$

Домножимо обидві частини отриманої рівності на $v^{\alpha-1}$.Одержимо:

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\cdot v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}} = \int\limits_0^{+\infty} v^{\alpha-1} t^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+v)t} dt. \qquad (4)$$

Проінтегруємо рівність (4) по v на $[0, +\infty)$. З врахуванням формули (2) будемо мати:

$$\int\limits_0^{+\infty} \Gamma(\alpha+\beta) \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}} dv = \Gamma(\alpha+\beta) \int\limits_0^{+\infty} \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}} dv =$$

$$= \Gamma(\alpha+\beta)\cdot \mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} dv \int\limits_0^{+\infty} v^{\alpha-1} t^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+v)t} dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} v^{\alpha-1} t^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+v)t} dv =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1} e^{-t} dt \int\limits_0^{+\infty} v^{\alpha-1} e^{-vt} dv = I.$$

Знайдемо внутрішній інтеграл:

$$\int_0^{+\infty} v^{\alpha-1}e^{-vt}dv = \left|\begin{matrix} z = vt \\ dz = tdv \end{matrix}\right| = \int_0^{+\infty} z^{\alpha-1}\cdot t^{-(\alpha-1)}e^{-z}\cdot\frac{dz}{t} =$$

$$= t^{-\alpha}\int_0^{+\infty} z^{\alpha-1}e^{-z}dz = t^{-\alpha}\Gamma(\alpha).$$

Тоді

$$I = \int_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1}e^{-t}\cdot t^{-\alpha}\,\Gamma(\alpha)dt = \Gamma(\alpha)\cdot\int_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t}dt = \Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta).$$

Отже,

$$\Gamma(\alpha+\beta)\cdot \mathrm{B}(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta).$$

Звідси випливає формула (1).

Теорему доведено.

10. Застосування B та Г − функцій для обчислення інтегралів

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x dx$.

Розв'язання. Зробивши заміну змінної, матимемо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\,dx = \left|\begin{matrix} \sin^2 x = t \\ 2\sin x\cos x\,dx = dt \\ \cos^2 x = 1-t \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt =$$

$$= \left|\begin{matrix} \alpha - 1 = \dfrac{5}{2}, \alpha = \dfrac{7}{2} \\ \beta - 1 = \dfrac{3}{2}, \beta = \dfrac{5}{2} \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)}{5!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1\cdot3}{2^2}\sqrt{\pi}}{5!} = \frac{3\pi}{2^6\cdot2\cdot4} = \frac{3\pi}{512}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$.

Розв'язання. Маємо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx = \begin{vmatrix} \alpha - 1 = \frac{1}{4}, \alpha = \frac{5}{4} \\ \alpha + \beta = 2, \beta = \frac{3}{4} \end{vmatrix} = B\left(\frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{1} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

Розв'язання. Зробивши заміну змінної, одержимо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \begin{vmatrix} x^3 = t \\ x = t^{\frac{1}{3}} \\ dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}dt}{1+t} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha - 1 = -\frac{2}{3} \ , \alpha = \frac{1}{3} \\ \alpha + \beta = 1 \ , \beta = \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$.

Розв'язання. Маємо:

$$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \begin{vmatrix} \alpha - 1 = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{3}{2} \\ \beta - 1 = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2} \end{vmatrix} = B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)\right)^2}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx, \ \ a > 0$.

Розв'язання. Зробивши заміну змінної, матимемо:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^a x^2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left| \begin{matrix} t=\dfrac{x^2}{a^2}, \qquad x=a\sqrt{t}, \\ dx=\dfrac{a\cdot dt}{2\sqrt{t}} \\ x=0\Rightarrow t=0, x=a\Rightarrow t=1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^1 a^2t(a^2-a^2t)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{a\cdot dt}{2\sqrt{t}} = \frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt = \left| \begin{matrix} \alpha-1=\dfrac{1}{2}, \alpha=\dfrac{3}{2} \\ \beta-1=\dfrac{1}{2}, \beta=\dfrac{3}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right) = \frac{a^4}{2}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{a^4\pi}{16}.$$

Приклад 6. Виразити через Ейлерові інтеграли і з'ясувати область існування інтеграла $\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\,dx$.

Розв'язання. Маємо:

$$\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x^2=t, \qquad x=\sqrt{t} \\ dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \end{matrix} \right| = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \left|\alpha-1=n-\frac{1}{2}, \alpha=n+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Якщо $n\in\mathbb{N}$, то

$$\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2^n}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}\cdot\sqrt{\pi}.$$

Область існування інтеграла: $n+\frac{1}{2}>0$, тобто $n>-\frac{1}{2}$.

Приклад 7. Виразити через Ейлерові інтеграли і з'ясувати область існування інтеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx, \qquad n > 0.$$

Розв’язання. Виконаємо заміну $x = t^{\frac{1}{n}}, t > 0$, одержимо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m-1}{n}}}{1+t} \cdot t^{\frac{1}{n}-1}dt = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t} = \frac{1}{n}B\left(\frac{m}{n}, 1-\frac{m}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi m}{n}}.$$

Цей результат виконується для $0 < m < n$.

Приклад 8. Виразити через Ейлерові інтеграли і з’ясувати область існування інтеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p}, \qquad a > 0, b > 0, n > 0.$$

Розв’язання. Маємо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{1}{a^p}\int_0^{+\infty} \frac{x^m\,dx}{\left(1+\frac{b}{a}x^n\right)^p} = \left| \begin{array}{c} x = \left(\frac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{n}}, t > 0 \\ dx = \frac{a}{nb}\left(\frac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{n}-1} dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}}{na^p}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^p}dt = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \frac{1}{na^p} B\left(\frac{m+1}{n}, p-\frac{m+1}{n}\right).$$

Отже, даний інтеграл збігається при умові $0 < \frac{m+1}{n} < p$.

Приклад 9. Виразити через Ейлерові інтеграли і з’ясувати область існування інтеграла $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$.

Розв’язання. Застосовуючи заміну $\ln\frac{1}{x} = t$, отримаємо:

$$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx = \left|\begin{matrix} \ln\frac{1}{x} = t, \;\; x = e^{-t} \\ dx = -e^{-t} \\ x = 0 \Rightarrow t = +\infty \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{matrix}\right| = \int_0^{+\infty} t^p\, e^{-t} dt = \Gamma(p+1), \;\; p > -1.$$

Приклад 10. Довести рівність

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Розв'язання. Маємо, що

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^4}} = \left|\begin{matrix} x^4 = t, \; x = t^{\frac{1}{4}} \\ dx = \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} \end{matrix}\right| = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{3}{4}} dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}} \cdot t^{-\frac{3}{4}} dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 t^{-1+\frac{1}{4}} \cdot (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \cdot \frac{1}{4}\int_0^1 t^{\frac{3}{4}-1} \cdot (1-t)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{16} B\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cdot B\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{4\pi}{16} = \frac{\pi}{4}.$$

Що й потрібно було довести.

Приклад 11. Довести рівність

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \cdot \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

Розв'язання.

Маємо:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \cdot \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \left|\begin{matrix} x^4 = t, \;\; x = t^{\frac{1}{4}} \\ dx = \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}}\, dt \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{1}{4\sqrt[4]{t^3}}\, dt \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{1}{4\sqrt[4]{t^3}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{\frac{1}{4}-1}\, dt \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{3}{4}-1}\, dt = \frac{1}{16} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

Що й потрібно було довести.

11. Формула Стірлінга

Як відомо $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. При великих n обчислити $n!$ не можливо. Разом з тим в багатьох практичних і теоретичних дослідженнях використовують значення $n!$ при великих n.

У зв'язку з цим виникає необхідність отримати асимптотичне значення для $n!$ Однією з таких формул є формула Стірлінга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + \alpha_n), \qquad (1)$$

де $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Доведемо формулу (1). Відомо, що

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^{n+1-1} e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} x^n\, e^{-x} dx. \qquad (2)$$

Розглянемо функцію $f(x) = x^n e^{-x}$.

Знайдемо $f'(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1} e^{-x}(n - x)$.

Якщо $x \in [0; n]$, то $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ зростає.

Якщо $x \in [n; +\infty)$, то $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$ спадає.

Знайдемо $f(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Функція $f(x)$ на сегменті $[0; n]$ зростає від 0 до $\left(\frac{n}{e}\right)^n$, а на проміжку $[n; +\infty)$ спадає від $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ до 0.

Перепишемо формулу (2) у вигляді:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{n-x} dx. \qquad (3)$$

В останньому інтегралі підінтегральна функція на проміжку $[0; n]$ зростає від 0 до 1, а на проміжку $[n; +\infty)$ спадає від 1 до 0.

Зробимо в (3) заміну:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x} = e^{-t^2}. \qquad (4)$$

Значенням x з проміжку $[0; n]$ будуть відповідати значення t з $(-\infty\,; 0]$, а проміжок $[n; +\infty)$ відобразиться в $[0; +\infty)$.

Щоб провести заміну (4), потрібно знайти dx. Продиференціюємо обидві частини формули (4). Маємо:

$$\left(n\left(\frac{x}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{n-x} - \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}\right) dx = -2te^{-t^2}\, dt,$$

$$\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x} \left(\frac{n}{x} - 1\right) dx = -2te^{-t^2} dt, \qquad \left(1 - \frac{n}{x}\right) dx = 2t\, dt,$$

$$dx = \frac{2tx}{x-n} dt. \qquad (5)$$

Прологарифмуємо рівність (4):

$$n \ln\frac{x}{n} + n - x = -t^2,$$

$$t^2 = x - n - n \ln\frac{x}{n}. \qquad (6)$$

Маємо:

$$\ln\frac{x}{n} = \ln\left(\frac{x}{n} - 1 + 1\right) = \ln\left(\frac{x-n}{n} + 1\right). \qquad (7)$$

Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(z) = \ln(z+1)$.

Запишемо для цієї функції формулу Тейлора із залишковим членом у формулі Лагранжа

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} z + \frac{\varphi''(\theta z)}{2!} \cdot z^2, \qquad \theta \in (0,1).$$

Знайдемо

$$\varphi(0) = \ln 1 = 0\,,\ \varphi'(z) = \frac{1}{z+1},\ \varphi'(0) = 1,\ \varphi''(z) = -\frac{1}{(z+1)^2},$$

$$\ln(z+1) = z - \frac{z^2}{2(\theta z+1)^2}.$$

Тоді

$$\ln\frac{x}{n} = \ln\left(\frac{x-n}{n}+1\right) = \frac{x-n}{n} - \frac{\left(\frac{x-n}{n}\right)^2}{2\left(\theta\cdot\frac{x-n}{n}+1\right)^2}.$$

Підставляючи одержане значення логарифма у формулулу (6) одержимо:

$$t^2 = x - n - n\left(\frac{x-n}{n} - \frac{\left(\frac{x-n}{n}\right)^2}{2\left(\theta\cdot\frac{x-n}{n}+1\right)^2}\right) = \frac{n}{2}\cdot\frac{\left(\frac{x-n}{n}\right)^2}{\left(\theta\cdot\frac{x-n}{n}+1\right)^2},$$

$$t = \sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\frac{x-n}{n}}{\theta\cdot\frac{x-n}{n}+1}\ . \tag{8}$$

Знайдемо з (8) знаменник:

$$\theta\cdot\frac{x-n}{n}+1 = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x-n}{n}.$$

Обидві частини останньої рівності поділимо на $\frac{x-n}{n}$:

$$\theta + \frac{n}{x-n} = t\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Додамо 1 до обох частин рівності:

$$\theta + \frac{x}{x-n} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}} + 1, \qquad \frac{x}{x-n} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}} + 1 - \theta.$$

Знайдене значення підставимо у (5):

$$dx = 2t\left(\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}} + 1 - \theta\right)dt = \left(2\sqrt{\frac{n}{2}} + 2t(1-\theta)\right)dt.$$

Проведемо заміну (4) в інтегралі (3):

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{n-x} dx = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cdot \left(2\sqrt{\frac{n}{2}} + 2t(1-\theta)\right) dt =$$

$$= \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(2\sqrt{\frac{n}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt + 2\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}(1-\theta)dt\right).$$

Розглянемо окремо кожен з інтегралів:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Другий інтеграл позначимо через β_n. Маємо

$$|\beta_n| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}(1-\theta)dt\right| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|\, e^{-t^2}(1-\theta)dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2}(1-\theta)dt = 2(1-\theta)\int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2}\, dt =$$

$$= -(1-\theta)\int\limits_{\circ}^{+\infty} d(e^{-t^2}) = -(1-\theta)e^{-t^2}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= -(1-\theta)(0-1) = 1-\theta < 1.$$

Позначимо через $\alpha_n = \frac{2\beta_n}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{\sqrt{2}\beta_n}{\sqrt{\pi n}}$.

Очевидно, що

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\beta_n}{\sqrt{\pi n}} = 0.$$

Звідси матимемо:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+\alpha_n), \qquad \text{де } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Рівність (1) доведена.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати означення власного інтеграла, що залежить від параметра.

2. Навести теореми про неперервність по параметру власного інтеграла, залежного від параметра.

3. Довести теореми про диференціювання по параметру власного інтеграла, що залежить від параметра. Формули Лейбніца.

4. Довести теорему про інтегрування по параметру власного інтеграла, залежного від параметра.

5. Сформулювати теорему про граничний перехід під знаком власного інтеграла, що залежить від параметра (означення рівномірної збіжності функції $f(x;y)$ до функції $g(x)$).

6. Навести означення невласного інтеграла, залежного від параметра.

7. Сформулювати означення рівномірної збіжності невласного інтеграла, залежного від параметра.

8. Навести критерій Коші рівномірної збіжності невласного інтеграла, що залежить від параметра.

9. Довести ознаку Вейєрштрасса рівномірної збіжності невласного інтеграла, залежного від параметра.

10. Довести ознаку Абеля рівномірної збіжності невласного інтеграла, що залежить від параметра.

11. Сформулювати ознаку Діріхле рівномірної збіжності невласного інтеграла, залежного від параметра.

12. Сформулювати теорему про неперервність по параметру невласного інтеграла, залежного від параметра.

13. Довести теорему про інтегрування по параметру невласного інтеграла, що залежить від параметра.

14. Довести теорему про диференціювання по параметру невласного інтеграла, залежного від параметра.

15. Обчислити інтеграл $I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos\beta x \, dx \, , \alpha > 0$.

16. Обчислити інтеграл Діріхле.

17. Довести теорему про інтегрування по параметру невласного інтеграла, що залежить від параметра, по нескінченному проміжку.

18. Вивести формулу інтеграла Пуассона, наслідок.

19. Навести теорему про граничний перехід під знаком невласного інтеграла, залежного від параметра.

20. Сформулювати означення інтеграла Ейлера I роду.

21. Навести властивості інтеграла Ейлера I роду.

22. Сформулювати означення інтеграла Ейлера II роду.

23. Довести основні властивості інтеграла Ейлера II роду.

24. Навести основну теорему про $\Gamma -$ функцію (означення логарифмічної опуклості).

25. Встановити зв'язок між інтегралами Ейлера.

26. Довести формулу Стірлінга.

Індивідуальні завдання до теми “Інтеграли, що залежать від параметра”

Варіант 1.

1. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{xe^{x^2}} dx,\ \alpha > -1.$
2. Дослідити на рівномірну збіжність $\int_1^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} x dx,$

$\alpha \in [1; +\infty).$

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4} dx.$
4. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch} \beta x\ dx,\ \alpha > 0.$

Варіант 2.

1. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2} \sin \beta x\, dx,\ \alpha > 0.$
2. Дослідити на рівномірну збіжність $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha x^3}{x} dx, \alpha \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$
3. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi\, x\, dx.$
4. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x\ dx.$

Варіант 3.

1. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx.$
2. Дослідити на рівномірну збіжність $\int_0^1 \alpha \cos \frac{1}{x^2} dx, \alpha \in \mathbb{R}.$
3. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx.$
4. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x} dx,\ \alpha > -1.$

Варіант 4.

1. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}(1-\cos \alpha x)}{x}$.

2. Дослідити на рівномірну збіжність $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$,

$\alpha \in [a; b]$, $ab < 0$.

3. Дослідити на неперервність функцію $F(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi - x)^{\alpha}} dx$ на множині $(0; 2)$.

4. Обчислити інтеграл $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x)^3(2-x)}} dx$.

Варіант 5.

1. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{(\cos \beta x - \cos \gamma x)}{x}$.

2. Дослідити на рівномірну збіжність $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{e^{\alpha x} + x^2} dx$, $\alpha \in [0; +\infty)$.

3. Дослідити на неперервність функцію $F(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^{\alpha} x}$ на множині $[0; 1)$.

4. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}^{\alpha} x}{(\cos x + \sin x)^2} dx$, $\alpha \in (0; 1)$.

Варіант 6.

1. Обчислити інтеграл. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}(\alpha x)\, \mathrm{arctg}(\beta x)}{x^2} dx$.

2. Дослідити на рівномірну збіжність $\int_0^{+\infty} \sin x^{\alpha}\, dx$,

$\alpha \in [a; +\infty)$, $a > 1$.

3. Дослідити на неперервність функцію $F(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{x}{2 + x^{\alpha}} dx$ на множині $(2; +\infty)$.

4. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4} dx$.

Варіант 7.

1. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x(1+x^2)}$.

2. Дослідити на рівномірну збіжність $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{1+\alpha^2 x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\alpha \in [0; +\infty)$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[m]{1-x^n}}$, $n > 0$.

4. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx$, $a > 0$.

Варіант 8.

1. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos(2\pi n x)\, dx$.

2. Дослідити на рівномірну збіжність $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha} dx$, $\alpha \in [0; +\infty)$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \sqrt[4]{x^3}}{3x} dx$.

4. Обчислити інтеграл $\int_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{(x+c)^{n+m+2}}\, dx$, $b > a > 0$, $c > 0$.

Варіант 9.

1. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4} dx$.

2. Дослідити на рівномірну збіжність $\int_1^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} x dx$, $\alpha \in [1; +\infty)$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-y^{2(1+x^2)}} \sin y\, dx$, $y \in \mathbb{R}$.

4. Дослідити на рівномірну збіжність $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x^4)}{x} dx$, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Варіант 10.

1. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cos 5\alpha x\, dx$.

2. Дослідити на рівномірну збіжність $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$, $\alpha \in [0; +\infty)$.

3. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $\alpha \in [-1; 1]$.

4. Дослідити на неперервність функцію $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin(x^{1+\alpha}) dx$ на множині $(0; +\infty)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч.2. Київ: Вища школа, 2005. 510 с.
2. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч. 2. Київ: Либідь, 1994. 320 с.
3. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч. 2. Київ: Вища школа, 1991. 366 с.
4. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у прикладах та задачах. Ч.1. Київ: Вища школа, 2002. 462 с.
5. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у прикладах та задачах. Ч.2. Київ: Вища школа, 2003. 470 с.

Навчально-методичне видання

Федуник-Яремчук Оксана Володимирівна
Бушев Дмитро Миколайович
Соліч Катерина Василівна

ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА:

методичні вказівки

Друкується в авторській редакції