

**ВОЛИНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ І МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ЗАГАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ
ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ ІНФОРМАТИКИ**

Лариса Ройко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**Методичні рекомендації до самостійної роботи здобувачів освіти
спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика)
факультету інформаційних технологій і математики**

ЛУЦЬК-2023

УДК 51(072)

Р 65

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Волинського національного університету імені Лесі Українки
(протокол №5 від 18 січня 2023 року)

Рецензенти:

Захарчук Д.А. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри фізики та вищої математики Луцького національного технічного університету

Швай О.Л. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математичного аналізу та статистики Волинського національного університету імені Лесі Українки

Р 65

Ройко Л.Л.

Вища математика: методичні рекомендації до самостійної роботи здобувачів освіти спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика) факультету інформаційних технологій і математики. Луцьк, 2023. 86 с.

Навчально-методичне видання призначене для самостійної роботи здобувачів освіти спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика) з курсу «Вища математика». Підібрані завдання відповідають тематиці силабусу освітнього компонента. Запропоноване видання буде корисним для здобувачів освіти при підготовці до практичних занять, самостійних, контрольних, модульних контрольних робіт.

УДК 51(072)

© Ройко Л.Л.

ПЕРЕДМОВА

Важливим фактором у засвоєнні вищої математики і оволодінні її методами є самостійна робота здобувачів освіти. Система типових розрахунків активізує їх пізнавальну діяльність, рівень самоорганізації та відповідальності, сприяє оволодінню професійними вміннями, навичками та компетентностями.

Згідно навчального плану здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика) в освітньому компоненті «Вища математика» на самостійну роботу відводиться 154 години при загальному обсязі 360 годин.

Метою викладання освітнього компонента є формування системи теоретичних знань і практичних навичок з вищої математики, що необхідні для засвоєння спеціальних дисциплін, котрі визначають фахову підготовку майбутнього вчителя інформатики закладу загальної середньої освіти для базової школи; розвиток умінь застосовувати ці знання на практиці та при побудові траєкторії професійного самовдосконалення.

Предметом вивчення «*Вищої математики*» є математичні поняття та методи таких розділів як: лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія; вступ до математичного аналізу; диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних; інтегральне числення; числові та функціональні ряди; диференціальні рівняння.

Комплекс основних умінь, які формує курс «*Вища математика*»:

– виконання операцій з матрицями, обчислення визначників довільного порядку, розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера, матричним способом та методом Гауса; дослідження систем лінійних рівнянь на сумісність та визначеність;

– виконання лінійних дій з векторами, застосування скалярного, векторного та мішаного добутків векторів;

– задання та знаходження рівнянь ліній і поверхонь першого та другого порядку, характеристика їх взаємного розташування;

- задання функціональних залежностей, класифікація елементарних функцій, побудова їх графіків;
- обчислення границь послідовностей і функцій, дослідження функції на неперервність;
- дослідження функцій на монотонність, локальний і глобальний екстремуми, реалізація схеми повного дослідження функцій;
- подання комплексних чисел в алгебраїчній, тригонометричній і показниковій формах, використання на практиці геометричного змісту комплексних чисел, здійснення операцій з комплексними числами;
- обчислення невизначених інтегралів з використанням властивостей, таблиці інтегралів, правил і прийомів інтегрування, алгоритмів інтегрування основних класів функцій;
- обчислення і застосування визначених і невластних інтегралів, поняття функції багатьох змінних, елементів диференціального числення функцій кількох змінних;
- визначення типу звичайного диференціального рівняння, інтегрування рівнянь і систем;
- дослідження рядів на збіжність та обчислення суми ряду, визначення точок збіжності функціональних (степеневих) рядів.

Самостійна робота здобувачів освіти ставить за мету:

- закріплення та систематизацію теоретичних знань;
- розвиток творчих здібностей та активізацію розумової діяльності;
- формування потреби безперервного самостійного поповнення знань;
- здобуття глибокої системи знань;
- самостійна робота як результат морально-вольових зусиль.

ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 1. Матриці та дії над ними. Визначники та їх основні властивості.

Поняття матриці, види матриць. Дії над матрицями та їх властивості. Визначники другого та третього порядку; їх властивості та основні методи обчислення. Визначники вищих порядків. Мінори та алгебраїчні доповнення. Обернена матриця. Властивості невироджених матриць. Ранг матриці. Метод елементарних перетворень.

Тема 2. Основні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь та її розв'язку. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера, матричним методом (з допомогою оберненої матриці), методом Гауса.

Тема 3. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність та визначеність. Системи лінійних однорідних рівнянь. Фундаментальна система їх розв'язків.

Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність та визначеність. Теорема Кронекера-Капеллі. Загальний, частинний та базисний розв'язки системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з m невідомими. Фундаментальна система розв'язків. Означення однорідної системи лінійних рівнянь. Простір розв'язків однорідної системи, зв'язок його розмірності з рангом матриці. Фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення матриці розмірності $m \times n$.
2. Назвіть основні види матриць.
3. Яка матриця називається одиничною?
4. Які матриці називаються рівними.
5. Що таке розмірність матриці?
6. Як додавати матриці однакової розмірності?
7. Чи комутативна сума двох матриць?
8. Як виконується добуток матриці на число?
9. Чи комутативний добуток двох матриць?
10. Дайте визначення визначника другого і третього порядків.
11. Сформулюйте основні властивості визначників.
12. Дайте визначення понять мінор та алгебраїчне доповнення.
13. Обчислення визначників методом пониження порядку (розкладанням за елементами рядка або стовпця).
14. Дайте визначення оберненої матриці
15. Яка матриця називається виродженою?
16. Сформулюйте алгоритм побудови оберненої матриці.
17. Яка система називається сумісною (несумісною)?

18. Яка система називається визначеною (невизначеною) ?
19. Що означає розв'язати систему лінійних рівнянь?
20. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера.
21. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним способом (з допомогою оберненої матриці).
22. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса.
23. Дайте визначення рангу матриці.
24. Основні методи знаходження рангу матриці.
25. Елементарними перетвореннями матриці є ...
26. Як впливають елементарні перетворення матриці на її ранг?
27. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі (існування розв'язку системи лінійних рівнянь).
28. Сформулюйте критерій визначеності.
29. Сформулюйте алгоритм дослідження системи лінійних рівнянь на сумісність та визначеність.
30. Поняття системи лінійних однорідних рівнянь. Відшукування фундаментальної системи їх розв'язків.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1.1. Дано матриці A, B та C . Знайти:

- 1) а) $(A+C) \times B$; б) $A^T \times B$; в) $(2A + 3C)^T$.
- 2) Довести, що переставний закон добутку двох матриць не виконується, тобто $A \cdot C \neq C \cdot A$.
- 3) визначник C :
 - а) методом безпосереднього обчислення;
 - б) розклавши його за елементами третього стовпця;
 - в) розклавши його за елементами другого рядка.
- 4) C^{-1} (виконати перевірку $C^{-1} \cdot C = E$).

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$
6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$
8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$
9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 9 \\ 8 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$
10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$
11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$
12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$
13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$
14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$
15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

$$16. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 5 & 9 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 6 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Обчислити визначник розклавши його: а) за елементами i -го рядка; б) за елементами j -т стовпця.

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ i=1; j=4$$

$$11. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ i=3; j=2$$

$$2. \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ i=1; j=2$$

$$12. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ i=4; j=4$$

$$3. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ i=4; j=1$$

$$13. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} \\ i=3; j=2$$

$$4. \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ i=3; j=2$$

$$14. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \\ i=2; j=1$$

$$5. \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$i=2; j=2$

$$15. \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$i=3; j=2$

$$6. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$i=2; j=4$

$$16. \begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$i=1; j=2$

$$7. \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$i=4; j=1$

$$17. \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$i=4; j=2$

$$8. \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$i=4; j=3$

$$18. \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$i=3; j=4$

$$9. \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$$

$i=1; j=3$

$$19. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$i=2; j=4$

$$10. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$i=3; j=3$

$$20. \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$i=4; j=3$

1.3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом (з допомогою оберненої матриці);

в) методом Гауса;

г) дослідити систему на сумісність та визначеність.

$$1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -9 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$$

ОСНОВИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 4. Вектори та дії над ними. Скалярний, векторний, мішаний добуток та їх застосування.

Типи векторів та дії над ними. Лінійні дії з векторами в геометричній та координатній формах, властивості операцій та їх геометрична ілюстрація. Довжина вектора її властивості. Скалярний добуток векторів, його властивості та застосування. Кут між векторами. Умова ортогональності векторів. Проекція вектора на вісь. Колінеарні вектори, умова колінеарності. Векторний та мішаний добуток векторів та їх геометрична інтерпретація. Властивості векторного та мішаного добутоків. Їх застосування. Умова компланарності векторів.

Тема 5. Лінійна залежність та незалежність системи векторів. Розклад вектора за базисом.

Означення n -вимірного вектора та n -вимірного векторного (лінійного) простору. Лінійна незалежність векторів. Означення й основні теореми про лінійну залежність та лінійну незалежність елементів лінійного простору. Базис лінійного простору. Основні теореми про базис простору. Координати вектора за даним базисом.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Скалярні та векторні величини. Поняття вектора.
2. Операції над векторами їх властивості.
3. Записати формулу для знаходження координат вектора, заданого точкою початку і точкою кінця. Записати формулу для знаходження довжини вектора, заданого своїми координатами. Записати умову рівності двох векторів заданих своїми координатами.
4. Колінеарні вектори. Умова колінеарності векторів.
5. Проекція вектора на вісь.
6. Скалярний добуток двох векторів та його властивості.
7. Скалярний добуток в координатах. Застосування скалярного добутку.
8. Векторний добуток двох векторів та його властивості. Векторний добуток в координатах.
9. Застосування векторного добутку до обчислення площ.
10. Мішаний добуток трьох векторів та його властивості. Мішаний добуток в координатах.
11. Застосування мішаного добутку до обчислення об'ємів.
12. Умова компланарності трьох векторів.
13. Поняття лінійної комбінації векторів.
14. Поняття лінійної залежності та незалежності системи векторів. Навести приклади.
15. Поняття базису на прямій, площині, просторі.
16. Теорема про розклад вектора по базису.
17. Координати вектора у заданому базисі.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1.1. Задані вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$. Знайти:

2) скалярний добуток векторів $(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

3) косинус кута між векторами \vec{a} та \vec{b} ;

4) векторний добуток векторів $\vec{a} \times \vec{b}$;

5) площу паралелограма S_1 та площу трикутника S_2 , побудованих на векторах \vec{a} та \vec{b} :

6) мішаний добуток векторів $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;

7) об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2 , побудованих на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;

8) чи колінеарні вектори \vec{a} та \vec{b} ;

9) чи компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

1. $\vec{a}(1; 2; 3), \vec{b}(-1; 3; 2), \vec{c}(7; -3; 5)$.

2. $\vec{a}(4; 7; 8), \vec{b}(9; 1; 3), \vec{c}(2; -4; 1)$.

3. $\vec{a}(8; 2; 3), \vec{b}(4; 7; 10), \vec{c}(3; -2; 1)$.

4. $\vec{a}(10; 3; 1), \vec{b}(1; 4; 2), \vec{c}(3; 9; 2)$.

5. $\vec{a}(2; 7; 3), \vec{b}(3; 1; 8), \vec{c}(2; -7; 4)$.

6. $\vec{a}(7; 2; 1), \vec{b}(4; 3; 5), \vec{c}(3; 4; -2)$.

7. $\vec{a}(-9; 4; -5), \vec{b}(1; -2; 4), \vec{c}(5; 1; -2)$.

8. $\vec{a}(-1; 2; -4), \vec{b}(1; -4; 2), \vec{c}(3; 1; 2)$.

9. $\vec{a}(3; 2; 3), \vec{b}(2; 3; 2), \vec{c}(1; -3; 1)$.

10. $\vec{a}(1; 4; 2), \vec{b}(4; 1; 3), \vec{c}(2; 1; 1)$.

11. $\vec{a}(-2; 2; 4), \vec{b}(4; 2; 8), \vec{c}(-1; 2; 1)$.

12. $\vec{a}(10; 6; 2), \vec{b}(5; 3; 1), \vec{c}(-3; 1; 2)$.

13. $\vec{a}(2; 6; -3), \vec{b}(3; 1; 2), \vec{c}(2; -3; 1)$.

14. $\vec{a}(2; 2; 1), \vec{b}(1; -3; 5), \vec{c}(1; 1; -2)$.

15. $\vec{a}(-9; 6; -12), \vec{b}(3; -2; 4), \vec{c}(4; 1; -2)$.

16. $\vec{a}(-5; 3; -1), \vec{b}(10; -6; 2), \vec{c}(2; 1; 2)$.

17. $\vec{a}(-6; -3; 1), \vec{b}(3; 6; -2), \vec{c}(3; -1; 2)$.

$$18. \bar{a}(-4; 2; -2), \bar{b}(3; -2; 2), \bar{c}(4; 1; 4).$$

$$19. \bar{a}(5; 2; -2), \bar{b}(-1; -3; 3), \bar{c}(1; -2; 1).$$

$$20. \bar{a}(3; 6; 3), \bar{b}(1; 2; 1), \bar{c}(2; 3; 1).$$

1.2. Задані координати точок A_1, A_2, A_3, A_4 . Знайти:

1) довжину ребра A_1A_2 ;

2) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;

3) проекцію вектора $\overline{A_1A_2}$ на вектор $\overline{A_1A_4}$;

4) площу грані $A_1A_2A_3$;

5) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ та її висоту опущену з вершини A_4 на площину основи $A_1A_2A_3$.

$$1. A_1(1; 2; 3); \quad A_2(2; 0; 0); \quad A_3(2; 2; 5); \quad A_4(4; 1; 0).$$

$$2. A_1(3; 0; 6); \quad A_2(1; -3; 2); \quad A_3(-3; 2; 5); \quad A_4(2; 2; 5).$$

$$3. A_1(-2; 0; -1); \quad A_2(0; 0; 4); \quad A_3(1; 2; 3); \quad A_4(3; 2; 7).$$

$$4. A_1(1; -2; 1); \quad A_2(1; 0; 2); \quad A_3(1; 4; 2); \quad A_4(2; 0; 0).$$

$$5. A_1(-2; 1; 0); \quad A_2(3; 2; 7); \quad A_3(2; 2; 7); \quad A_4(6; 1; 5).$$

$$6. A_1(-1; 3; 0); \quad A_2(2; 0; 0); \quad A_3(4; -2; 1); \quad A_4(3; 2; 4).$$

$$7. A_1(6; 1; 5); \quad A_2(5; 1; 0); \quad A_3(-4; 1; -2); \quad A_4(-1; 0; 5).$$

$$8. A_1(1; -1; 6); \quad A_2(-2; 0; 2); \quad A_3(4; 0; 1); \quad A_4(2; 2; 5).$$

$$9. A_1(1; 2; 3); \quad A_2(-1; 2; 3); \quad A_3(7; -3; 5); \quad A_4(4; 1; 1).$$

$$10. A_1(4; 7; 8); \quad A_2(9; 1; 3); \quad A_3(2; -4; 1); \quad A_4(1; -1; -1).$$

$$11. A_1(8; 2; 3); \quad A_2(4; 6; 10); \quad A_3(3; 2; 5); \quad A_4(3; -2; 1).$$

$$12. A_1(2; 4; 1); \quad A_2(1; 3; 6); \quad A_3(5; 3; 1); \quad A_4(4; 0; 6).$$

$$13. A_1(1; 7; 3); \quad A_2(3; 4; 2); \quad A_3(4; 8; 5); \quad A_4(7; 2; 4).$$

$$14. A_1(1; -2; 3); \quad A_2(4; 7; 2); \quad A_3(6; 4; 2); \quad A_4(4; 8; 6).$$

$$15. A_1(2; 7; 3); \quad A_2(3; 1; 8); \quad A_3(2; -7; 4); \quad A_4(6; 4; 7).$$

$$16. A_1(4; 2; 5); \quad A_2(4; 1; 2); \quad A_3(2; -4; 2); \quad A_4(1; 0; 6).$$

$$17. A_1(4; 8; 5); \quad A_2(-1; 2; 3); \quad A_3(5; 5; 2); \quad A_4(1; 7; 3).$$

$$18. A_1(1; 0; 2); \quad A_2(-2; 0; -1); \quad A_3(3; 4; 2); \quad A_4(4; 3; 1).$$

$$19. A_1(3; 2; 7); \quad A_2(7; 2; 4); \quad A_3(-5; -1; 0); \quad A_4(4; 4; 6).$$

$$20. A_1(1; -2; 1); \quad A_2(4; 0; 2); \quad A_3(1; -4; 2); \quad A_4(0; 6; 5).$$

1.3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах \bar{a} і \bar{b} , як на сторонах:

$$1. \bar{a} = \bar{p} + 2\bar{q}; \bar{b} = 3\bar{p} - \bar{q}; |\bar{p}| = 1; |\bar{q}| = 2; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{6}.$$

$$2. \bar{a} = 3\bar{p} + \bar{q}; \bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}; |\bar{p}| = 4; |\bar{q}| = 1; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$3. \bar{a} = \bar{p} - 3\bar{q}; \bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}; |\bar{p}| = \frac{1}{5}; |\bar{q}| = 1; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{2}.$$

$$4. \bar{a} = 3\bar{p} - 2\bar{q}; \bar{b} = \bar{p} + 5\bar{q}; |\bar{p}| = 4; |\bar{q}| = \frac{1}{2}; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{5\pi}{6}.$$

$$5. \bar{a} = \bar{p} - 2\bar{q}; \bar{b} = 2\bar{p} + \bar{q}; |\bar{p}| = 2; |\bar{q}| = 3; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{3\pi}{3}.$$

$$6. \bar{a} = \bar{p} + 3\bar{q}; \bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}; |\bar{p}| = 2; |\bar{q}| = 3; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$7. \bar{a} = 2\bar{p} - \bar{q}; \bar{b} = \bar{p} + 3\bar{q}; |\bar{p}| = 3; |\bar{q}| = 2; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{2}.$$

$$8. \bar{a} = 4\bar{p} + 2\bar{q}; \bar{b} = 3\bar{p} - \bar{q}; |\bar{p}| = 7; |\bar{q}| = 2; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$9. \bar{a} = \bar{p} - 4\bar{q}; \bar{b} = 3\bar{p} + \bar{q}; |\bar{p}| = 1; |\bar{q}| = 2; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{6}.$$

$$10. \bar{a} = \bar{p} + 4\bar{q}; \bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}; |\bar{p}| = 7; |\bar{q}| = 2; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$11. \bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q}; \bar{b} = \bar{p} - \bar{q}; |\bar{p}| = 10; |\bar{q}| = 2; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{2}.$$

$$12. \bar{a} = 4\bar{p} - \bar{q}; \bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}; |\bar{p}| = 5; |\bar{q}| = 4; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$13. \bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{q}; \bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}; |\bar{p}| = 6; |\bar{q}| = 7; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$14. \bar{a} = 3\bar{p} - \bar{q}; \bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}; |\bar{p}| = 3; |\bar{q}| = 4; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$15. \bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{q}; \bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}; |\bar{p}| = 2; |\bar{q}| = 3; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$16. \bar{a} = 2\bar{p} - 3\bar{q}; \bar{b} = 3\bar{p} + \bar{q}; |\bar{p}| = 4; |\bar{q}| = 1; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{6}.$$

$$17. \bar{a} = 5\bar{p} + \bar{q}; \bar{b} = \bar{p} - 3\bar{q}; |\bar{p}| = 1; |\bar{q}| = 2; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$18. \bar{a} = 7\bar{p} - 2\bar{q}; \bar{b} = \bar{p} + 3\bar{q}; |\bar{p}| = \frac{1}{2}; |\bar{q}| = 2; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{2}.$$

$$19. \bar{a} = 6\bar{p} - \bar{q}; \bar{b} = \bar{p} + \bar{q}; |\bar{p}| = 3; |\bar{q}| = 4; (\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$20. \bar{a} = 2\bar{p} - 3\bar{q}; \bar{b} = 5\bar{p} + \bar{q}; |\bar{p}| = 2; |\bar{q}| = 3; \widehat{(\bar{p}, \bar{q})} = \frac{\pi}{2}.$$

1.4. Дано чотири вектори $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\bar{c}(c_1; c_2; c_3)$, $\bar{d}(d_1; d_2; d_3)$ у деякому базисі. Показати, що вектори $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\bar{c}(c_1; c_2; c_3)$ утворюють базис і знайти координати вектора \bar{d} у цьому базисі:

1. $\bar{a}(3; 4; 2)$, $\bar{b}(0; -3; -4)$, $\bar{c}(2; 1; 4)$, $\bar{d}(-3; 1; 6)$.
2. $\bar{a}(3; 6; 1)$, $\bar{b}(4; -2; -1)$, $\bar{c}(5; 1; 1)$, $\bar{d}(6; 4; 3)$.
3. $\bar{a}(-4; 2; 5)$, $\bar{b}(5; -2; 3)$, $\bar{c}(3; 1; 1)$, $\bar{d}(1; 4; -1)$.
4. $\bar{a}(0; 1; 3)$, $\bar{b}(1; -1; 5)$, $\bar{c}(-1; 1; 6)$, $\bar{d}(-3; 3; 7)$.
5. $\bar{a}(1; 3; 0)$, $\bar{b}(0; 6; 1)$, $\bar{c}(-1; 5; 2)$, $\bar{d}(-2; 4; 3)$.
6. $\bar{a}(3; 1; 0)$, $\bar{b}(5; 0; 1)$, $\bar{c}(-3; -1; 3)$, $\bar{d}(-11; -2; 5)$.
7. $\bar{a}(9; 3; 5)$, $\bar{b}(9; 2; 4)$, $\bar{c}(1; -2; 1)$, $\bar{d}(-7; -6; -2)$.
8. $\bar{a}(3; 4; 5)$, $\bar{b}(-3; -5; -6)$, $\bar{c}(2; 2; 4)$, $\bar{d}(2; 1; 3)$.
9. $\bar{a}(1; 2; 1)$, $\bar{b}(-2; -1; -1)$, $\bar{c}(1; -1; 2)$, $\bar{d}(1; 2; 3)$.
10. $\bar{a}(3; -1; 2)$, $\bar{b}(-2; 2; -3)$, $\bar{c}(1; -5; 1)$, $\bar{d}(1; 1; -1)$.
11. $\bar{a}(1; 2; 4)$, $\bar{b}(1; -1; 1)$, $\bar{c}(2; 2; 4)$, $\bar{d}(-1; -4; -2)$.
12. $\bar{a}(3; 2; 2)$, $\bar{b}(2; 3; 1)$, $\bar{c}(1; 1; 3)$, $\bar{d}(5; 1; 11)$.
13. $\bar{a}(-2; -3; 2)$, $\bar{b}(2; 3; -1)$, $\bar{c}(1; 3; -5)$, $\bar{d}(1; 1; 1)$.
14. $\bar{a}(1; 3; 5)$, $\bar{b}(2; 4; 1)$, $\bar{c}(-1; 1; -3)$, $\bar{d}(-3; 1; -2)$.
15. $\bar{a}(2; 1; 0)$, $\bar{b}(3; 4; 1)$, $\bar{c}(1; -3; 4)$, $\bar{d}(2; -5; 3)$.
16. $\bar{a}(1; 2; 1)$, $\bar{b}(0; -1; -2)$, $\bar{c}(1; 5; -3)$, $\bar{d}(2; 8; 0)$.
17. $\bar{a}(1; 2; 3)$, $\bar{b}(2; 3; 1)$, $\bar{c}(3; -1; -4)$, $\bar{d}(7; 6; 3)$.
18. $\bar{a}(2; 2; -1)$, $\bar{b}(0; 1; 3)$, $\bar{c}(1; 0; -5)$, $\bar{d}(1; 2; 4)$.
19. $\bar{a}(1; 3; 2)$, $\bar{b}(2; -5; 7)$, $\bar{c}(1; 3; -1)$, $\bar{d}(4; 1; 8)$.
20. $\bar{a}(1; 4; 7)$, $\bar{b}(-2; 2; -1)$, $\bar{c}(3; -3; 2)$, $\bar{d}(-5; 0; -9)$.

ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Тема 6. Системи координат на площині. Найпростіші задачі аналітичної геометрії.

Прямокутна система координат на площині. Перетворення координат. Відстань між двома точками. Ділення відрізка у даному співвідношенні. Площа трикутника. Полярна система координат.

Тема 7. Пряма на площині. Різні рівняння прямої.

Канонічне рівняння прямої. Параметричне рівняння прямої. Рівняння пучка прямих. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої через дві точки. Рівняння прямої у відрізках на осях. Рівняння прямої через точку перпендикулярно до вектора. Загальне рівняння прямої та його дослідження. Нормальне рівняння прямої. Зведення загального рівняння прямої до нормального виду. Кут між двома прямими. Відхилення і відстань точки від прямої.

Тема 8. Лінії другого порядку. Дослідження загального рівняння лінії другого порядку.

Криві другого порядку, їхня форма і рівняння: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Спільне означення та спільне рівняння кривих другого порядку.

Тема 9. Пряма та площина у просторі.

Рівняння площини, що проходить через точку перпендикулярно до вектора. Загальне рівняння площини та його дослідження. Рівняння площини у відрізках на осях. Нормальне рівняння площини. Зведення загального рівняння площини до нормального виду. Рівняння площини, заданої початковою точкою і напрямними векторами. Параметричне рівняння площини. Кут між площинами. Відхилення і відстань точки від площини.

Канонічне та параметричне рівняння прямої у просторі. Пряма лінія як перетин двох площин. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Умова перетину двох прямих у просторі. Перетин прямої з площиною. Кут між прямою і площиною.

Тема 10. Поверхні другого порядку.

Рівняння поверхні в просторі. Циліндричні поверхні. Сфера. Конуси. Еліпсоїд. Гіперболоїди. Параболоїди. Геометричні властивості цих поверхонь.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ:

1. Формула відстані між двома точками.
2. Формула площі трикутника.
3. Що називається системою координат?
4. Що називається полярними координатами точки?
5. У яких межах змінюються полярні координати?
6. Формули, що встановлюють зв'язок між полярними координатами точки і її прямокутними координатами.
7. Рівняння прямої, що проходить через задану точку паралельно даному вектору (канонічне рівняння прямої).
8. Параметричне рівняння прямої

9. Рівняння прямої, що проходить через задану точку, або рівняння пучка прямих.
10. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
11. Рівняння прямої, що проходить через дві точки.
12. Рівняння прямої у відрізках на осях.
13. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.
14. Нормальне рівняння прямої.
15. Загальне рівняння прямої.
16. Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду.
17. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.
18. Відхилення та відстань точки до прямої.
19. Рівняння площини, що проходить через точку перпендикулярно до вектора.
20. Загальне рівняння площини та його дослідження.
21. Рівняння площини у відрізках на осях.
22. Нормальне рівняння площини.
23. Зведення загального рівняння площини до нормального виду.
24. Рівняння площини, заданої початковою точкою і напрямними векторами.
25. Параметричне рівняння площини.
26. Кут між площинами.
27. Відхилення і відстань точки від площини.
28. Канонічне та параметричне рівняння прямої.
29. Пряма, як перетин двох площин.
30. Перетин прямої з площиною.
31. Перетин двох прямих у просторі.
32. Умова перпендикулярності і паралельності прямої і площини.
33. Дати визначення еліпса. Навести формулу його канонічного рівняння.
34. Як визначаються фокальні радіуси еліпса?
35. Сформулювати властивості еліпса.
36. Що називається ексцентриситетом еліпса?
37. Дати визначення директрис еліпса?
38. Сформулювати оптичну властивість еліпса.
39. Дати визначення гіперболи. Навести формулу її канонічного рівняння.
40. Навести властивості гіперболи.
41. Які прямі називаються асимптотами гіперболи?
42. Що називається ексцентриситетом гіперболи? Як він характеризує гіперболу?
43. Дати визначення директрис гіперболи? Як вони розташовані?
44. Дати визначення параболи.
45. Навести канонічне рівняння параболи.
46. Сформулювати властивості параболи.
47. Дати визначення кола. Записати канонічне рівняння.

48. Дослідження загального рівняння кривої другого порядку.

49. Поверхні другого порядку їх канонічні рівняння.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1.1. Побудувати чотирикутник, обмежений лініями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $x = a$ і $y = b$. Для виконання побудов загальні рівняння прямих перетворити до вигляду рівняння прямої у відрізках на осях. Отриману фігуру заштрихувати. Знайти координати вершин утвореного чотирикутника.

1. $7x + 3y + 21 = 0$, $x + 3y - 3 = 0$, $x = 0$, $y = -2$.

2. $x - y + 4 = 0$, $4x + y - 4 = 0$, $x = -2$, $y = 0$.

3. $5x + 3y + 15 = 0$, $2x - y - 2 = 0$, $x = 0$, $y = 1$.

4. $5x - 4y - 20 = 0$, $x + y + 2 = 0$, $x = 2$, $y = 0$.

5. $3x + y + 3 = 0$, $5x - 3y - 15 = 0$, $x = 0$, $y = -1$.

6. $2x + 3y - 6 = 0$, $6x - 5y + 30 = 0$, $x = 0$, $y = -7$.

7. $x - y + 6 = 0$, $5x + y - 5 = 0$, $x = -2$, $y = 0$.

8. $4x - 5y - 20 = 0$, $x + y + 1 = 0$, $x = 3$, $y = 0$.

9. $x + 3y + 9 = 0$, $3x - 2y - 6 = 0$, $x = 0$, $y = 2$.

10. $7x + 2y + 14 = 0$, $5x - 4y + 20 = 0$, $x = -1$, $y = 0$.

11. $5x + 4y + 20 = 0$, $x + 4y - 4 = 0$, $x = 0$, $y = -2$

12. $4x - 3y - 12 = 0$, $x + y + 4 = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

13. $5x + 2y + 10 = 0$, $2x + 2y - 4 = 0$, $x = 0$, $y = -3$

14. $8x + 3y + 24 = 0$, $x + 5y - 5 = 0$, $x = 0$, $y = -2$.

15. $x - y - 1 = 0$, $3x + y + 24 = 0$, $x = -3$, $y = 0$.

16. $2x + y + 2 = 0$, $2x - y - 8 = 0$, $x = 0$, $y = 4$.

17. $4x + 3y + 12 = 0$, $-3x + 2y + 6 = 0$, $x = 0$, $y = 2$.

18. $5x - 3y - 15 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

19. $x - y + 5 = 0$, $4x + y - 3 = 0$, $x = -3$, $y = 0$.

20. $6x + 3y + 18 = 0$, $x + 5y - 5 = 0$, $x = 0$, $y = -1$.

1.2. Задані вершини $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ трикутника. Знайти:

- 1) рівняння та довжину сторони BC ;**
- 2) рівняння та довжину висоти AD . Записати рівняння висоти у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом та у відрізках на осях;**
- 3) рівняння та довжину медіани CE ;**
- 4) величину кута BCE ;**
- 5) площу трикутника ABC .**

1. $A(2; 5)$, $B(-3; 4)$, $C(1; -2)$.
2. $A(3; -1)$, $B(-5; 5)$, $C(-4; 0)$.
3. $A(10; -1)$, $B(2; 5)$, $C(3; 0)$.
4. $A(9; 1)$, $B(1; 7)$, $C(-2; -2)$.
5. $A(4; -2)$, $B(-4; 4)$, $C(2; 3)$.
6. $A(5; 1)$, $B(-3; 7)$, $C(-2; 2)$.
7. $A(1; 3)$, $B(-2; -3)$, $C(-6; 4)$.
8. $A(4; -2)$, $B(-4; 4)$, $C(2; 3)$.
9. $A(2; 1)$, $B(-6; -3)$, $C(0; -4)$.
10. $A(3; 4)$, $B(6; 0)$, $C(2; 5)$.
11. $A(1; 4)$, $B(-2; 3)$, $C(1; -1)$.
12. $A(2; -2)$, $B(-1; 4)$, $C(-3; 0)$.
13. $A(2; 3)$, $B(0; 7)$, $C(-2; -1)$.
14. $A(7; -1)$, $B(1; 3)$, $C(2; 1)$.
15. $A(3; -3)$, $B(-2; 4)$, $C(3; 1)$.
16. $A(4; 2)$, $B(-3; 5)$, $C(2; -3)$.
17. $A(2; 5)$, $B(-1; -3)$, $C(-3; 2)$.
18. $A(1; 9)$, $B(-3; 8)$, $C(1; -3)$.
19. $A(1; 0)$, $B(-3; -3)$, $C(0; 4)$.
20. $A(2; 6)$, $B(5; 0)$, $C(-1; -5)$.

1.3. Дано координати вершин трикутної піраміди $ABCD$. Знайти:

- 1) Загальне рівняння площини ABC та координати її нормального вектора.**
- 2) Рівняння площини ABC у відрізках на осях.**

- 3) Канонічне та параметричне рівняння прямої AB .
- 4) Кут між площинами ABC та ABD .
- 5) Відстань від точки D до грані ABC .
- 6) Кут між прямими AB і AC .
- 7) Канонічне рівняння висоти DO піраміди $ABCD$.
- 8) Координати точки перетину висоти DO з гранню ABC .
- 9) Кут між ребром AD і гранню ABC .

1. $A(0; -3; 2), \quad B(4; -2; 3), \quad C(1; -5; 2), \quad D(3; -4; 4).$
2. $A(-5; 2; 0), \quad B(3; -4; 0), \quad C(6; 2; 3), \quad D(2; 1; -4).$
3. $A(-5; 2; -3), \quad B(-4; 4; -5), \quad C(6; -2; -1), \quad D(3; 1; 3).$
4. $A(-1; -4; -1), \quad B(0; -2; -3), \quad C(2; -3; 1), \quad D(7; 3; 4).$
5. $A(0; -2; 1), \quad B(1; 0; -1), \quad C(2; 8; 3), \quad D(8; 6; 5).$
6. $A(0; -3; 2), \quad B(4; -2; 3), \quad C(1; -5; 2), \quad D(3; -4; 4).$
7. $A(-2; -1; 8), \quad B(-4; 0; 6), \quad C(0; 1; -2), \quad D(0; -2; 1).$
8. $A(-2; 1; 0), \quad B(3; -6; 0), \quad C(4; 3; 2), \quad D(2; 5; -3).$
9. $A(1; 6; -1), \quad B(0; 3; 1), \quad C(2; 3; 4), \quad D(6; 2; 0).$
10. $A(0; -2; 1), \quad B(2; -3; 1), \quad C(4; -5; 2), \quad D(2; -4; 3).$
11. $A(-4; 4; -5), \quad B(0; -2; 1), \quad C(6; -1; 7), \quad D(4; 1; -2).$
12. $A(1; 6; -1), \quad B(0; 3; 1), \quad C(2; 1; 4), \quad D(6; 2; 0).$
13. $A(2; -3; 1), \quad B(-2; -1; 8), \quad C(2; -3; 1), \quad D(-1; 2; 5).$
14. $A(4; 2; -3), \quad B(4; -2; 5), \quad C(-5; 2; 1), \quad D(3; 1; 3).$
15. $A(-5; 2; -3), \quad B(-4; 4; -5), \quad C(6; -2; -1), \quad D(-1; 2; 0).$
16. $A(2; -3; 1), \quad B(-2; -1; 8), \quad C(2; -3; 1), \quad D(-1; 2; 5).$
17. $A(-3; 1; 0), \quad B(4; -5; 0), \quad C(5; 3; 3), \quad D(2; 4; -4).$
18. $A(3; 2; -4), \quad B(5; -4; 3), \quad C(-6; 3; -1), \quad D(4; 2; 3).$
19. $A(3; 3; 4), \quad B(2; 0; -9), \quad C(5; 2; 1), \quad D(1; 6; 2).$
20. $A(3; 2; -4), \quad B(4; -4; 5), \quad C(-7; 2; 2), \quad D(2; 1; 3).$

1.4. Побудувати лінію. Знайти довжини осей, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис (для еліпса), рівняння асимптот (для гіперболи).

1. $36x^2 + 24y^2 - 864 = 0$

11. $16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$

2. $25x^2 - 16y^2 - 400 = 0$

12. $25x^2 + 36y^2 - 900 = 0$

$$3. 26x^2 + 25y^2 - 650 = 0$$

$$4. 9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$$

$$5. 16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$$

$$6. x^2 + 36y^2 - 36 = 0$$

$$7. 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$$

$$8. 49x^2 - 16y^2 - 784 = 0$$

$$9. 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$$

$$10. 16x^2 + 64y^2 - 1024 = 0$$

$$13. x^2 - 9y^2 - 9 = 0$$

$$14. 4x^2 + 16y^2 - 64 = 0$$

$$15. 4y^2 - 9x^2 - 36 = 0$$

$$16. 9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

$$17. 36x^2 + 16y^2 - 576 = 0$$

$$18. 25x^2 + 49y^2 - 1225 = 0$$

$$19. 36x^2 - 25y^2 - 900 = 0$$

$$20. 64x^2 + 36y^2 - 2304 = 0$$

1.5. Визначити тип кривої, що задана рівнянням.

$$1. x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0.$$

$$2. 5x^2 + 9y^2 + 10x - 36y - 4 = 0.$$

$$3. 9x^2 - 2y^2 + 18x + 8y + 4 = 0.$$

$$4. y^2 - 6x - 4y + 4 = 0.$$

$$5. x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$$

$$6. 7x^2 + 8y^2 - 28x + 48y + 44 = 0.$$

$$7. 4x^2 - 7y^2 - 16x - 42y - 75 = 0.$$

$$8. y^2 - 4x - 6y + 9 = 0.$$

$$9. x^2 + y^2 + 6x - 16y = 0$$

$$10. 4x^2 + 3y^2 + 24x - 24y + 72 = 0.$$

$$11. 8x^2 - 3y^2 + 48x + 24y = 0.$$

$$12. y^2 - 10x + 8y + 16 = 0.$$

$$13. x^2 + y^2 - 8x + 10y + 5 = 0.$$

$$14. 7x^2 + 6y^2 - 56x + 60y + 220 = 0.$$

$$15. 6x^2 - 5y^2 - 48x - 50y - 59 = 0.$$

$$16. y^2 - 18x + 16y + 64 = 0.$$

$$17. x^2 + y^2 - 8x + 12y + 36 = 0.$$

$$18. 6x^2 + 5y^2 - 12x + 30y + 21 = 0.$$

$$19. 7x^2 - 6y^2 - 14x - 36y - 89 = 0.$$

20. $y^2 - 14x - 12y + 36 = 0$.

1.6. Знайти координати центра і радіус кола. Побудувати його.

1. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$

2. $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$

3. $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$

4. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

5. $x^2 + y^2 + 4y = 0$

6. $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 2 = 0$

7. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

8. $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$

9. $x^2 + y^2 - 12x = 0$

10. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

11. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

12. $x^2 + y^2 - 2y + 8x + 1 = 0$

13. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

14. $x^2 + y^2 - 2y + 12x + 1 = 0$

15. $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 15 = 0$

16. $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 3 = 0$

17. $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 1 = 0$

18. $x^2 + y^2 - 16x + 6y - 8 = 0$

19. $x^2 + y^2 + 10x - 11 = 0$

20. $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 1. Поняття комплексного числа.

Застосування комплексних чисел. Комплексні числа в алгебраїчній формі та дії над ними. Комплексні числа в тригонометричній формі та дії над ними. Комплексні числа в показниковій формі та дії над ними. Піднесення комплексного числа до натурального степеня. Добування кореня з комплексного числа.

Тема 2. Основні числові системи. Границя числової послідовності.

Поняття множини, операції над множинами. Множина дійсних чисел. Модуль дійсного числа. Межі числових множин. Послідовності. Границя числової послідовності. Властивості збіжних послідовностей. Нескінченно малі та великі числові послідовності, зв'язок між ними. Властивості нескінченно малих послідовностей. Еквівалентність. Монотонні послідовності. Теорема про дії над збіжними послідовностями.

Тема 3. Границя функції в точці. Неперервність функції.

Означення Коші та Гейне границі функції в точці, їх геометрична інтерпретація. Правостороння і лівостороння границя функції в точці.

Неперервність функції. Класифікація точок розриву. Теорема про дії над неперервними функціями. Властивості неперервної функції, заданої на відрізку.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ:

1. Поняття про комплексні числа та їх властивості. Геометрична інтерпретація комплексного числа.
2. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі.
3. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами, заданими у тригонометричній формі.
4. Показникова форма комплексного числа. Дії над комплексними числами, заданими у показниковій формі.
5. Правило перетворення однієї форми комплексного числа в іншу.
6. Зображення множини комплексних чисел з модулем $r \neq 0$ на комплексній площині
7. Поняття множини, операції над множинами.
8. Множина дійсних чисел. Модуль дійсного числа.
9. Межі числових множин.
10. Співвідношення між постійними та змінними величинами. Нескінченно малі величини та їх властивості.
11. Основні теореми про нескінченно малі величини.
12. Сформулюйте означення границі числової послідовності та її геометричний зміст.
13. Арифметичні операції над послідовностями та їх границями.

14. Сформулюйте означення границі функції у точці за Коші. Геометрична інтерпретація.

15. Сформулюйте означення границі функції у точці за Гейне. Геометрична інтерпретація.

16. Сформулюйте означення границі функції на нескінченності.

17. Розкриття невизначених виразів типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty - \infty]$ для алгебраїчних функцій.

18. Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ для ірраціональних функцій.

19. Дайте означення односторонніх границь функції у точці.

20. Дайте означення нескінченно малої функції в точці. Наведіть приклад.

21. Які нескінченно малі функції називаються функціями одного порядку?

Як це записують?

22. Які нескінченно малі функції називаються еквівалентними функціями?

Як це записують?

23. Як визначається еквівалентність двох нескінченно великих функцій?

24. Сформулюйте теореми про еквівалентні нескінченно малі функції.

25. Перерахуйте основні еквівалентності.

26. Означення неперервності функції.

27. Точки розриву та їх класифікація. Геометрична інтерпретація.

28. Теорема про дії над неперервними функціями.

29. Властивості неперервної функції, заданої на відрізку.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1.1. Виконати дії над комплексними числами z_1 та z_2 : а) $z_1 + z_2$;

б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$; д) z_1^3 .

1. $z_1 = 1 - 2i$; $z_2 = 3 + i$.

2. $z_1 = 4 + 5i$; $z_2 = -3 - 7i$.

3. $z_1 = 4 - 3i$; $z_2 = 2 + i$.

4. $z_1 = -1 + 3i$; $z_2 = 4 - i$.

5. $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 1 - 3i$.

6. $z_1 = 4 - 3i$; $z_2 = 2 + 2i$.

7. $z_1 = -2 - 3i$; $z_2 = 1 + 3i$.

8. $z_1 = 4 + i$; $z_2 = 3 + 2i$.

9. $z_1 = 3 + 5i$; $z_2 = 4 + 3i$.

10. $z_1 = -1 + i$; $z_2 = -3 - i$.
11. $z_1 = 4 + 5i$; $z_2 = 3 - i$.
12. $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -1 - i$.
13. $z_1 = 5 + 4i$; $z_2 = 2 + 3i$.
14. $z_1 = -3 + 5i$; $z_2 = 4 + i$.
15. $z_1 = -4 + i$; $z_2 = -3 - i$.
16. $z_1 = 4 - 5i$; $z_2 = 2 + 3i$.
17. $z_1 = 3 + 5i$; $z_2 = 5 - 2i$.
18. $z_1 = 4 - 3i$; $z_2 = 2 + 7i$.
19. $z_1 = -2 + 3i$; $z_2 = -2 - 3i$.
20. $z_1 = 5 + 3i$; $z_2 = -4 - 3i$.

1.2. Записати комплексне число z в:

а) алгебраїчній формі; б) тригонометричній формі; в) показниковій формі. Знайти z^5 та \sqrt{z} .

$$1. z = \frac{2}{1 - \sqrt{3}i}$$

$$2. z_1 = \frac{-2}{\sqrt{3} - i}$$

$$3. z_1 = \frac{2\sqrt{2}}{-1 + i}$$

$$4. z_1 = \frac{4}{\sqrt{3} + i}$$

$$5. z_1 = \frac{-3}{1 + \sqrt{3}i}$$

$$6. z_1 = \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$$

$$7. z = \frac{1}{-1 - i}$$

$$8. z = -\frac{2}{-1 + \sqrt{3}i}$$

$$11. z = \frac{2}{1 + i}$$

$$12. z_1 = \frac{8}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$$

$$13. z = \frac{10}{1 + \sqrt{3}i}$$

$$14. z = \frac{12}{\sqrt{3} + i}$$

$$15. z = \frac{-9}{3 + 3i}$$

$$16. z = -\frac{5}{-1 - \sqrt{3}i}$$

$$17. z = \frac{8}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$$

$$18. z = \frac{8}{2 + 2i}$$

$$9. z = \frac{4}{-1 - \sqrt{3}i}$$

$$10. z = \frac{8}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$$

$$19. z = \frac{2}{-\sqrt{3} + i}$$

$$20. z = \frac{6}{1 - \sqrt{3}i}$$

1.3. За допомогою означення довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$:

1. $a_n = \frac{n-2}{2n-1}; \quad a = \frac{1}{2}$
2. $a_n = \frac{3n-4}{2n+1}; \quad a = \frac{3}{2}$
3. $a_n = \frac{3n-2}{2n-1}; \quad a = \frac{3}{2}$
4. $a_n = \frac{7n-4}{n+1}; \quad a = 7$
5. $a_n = \frac{1-3n}{n+2}; \quad a = -3$
6. $a_n = \frac{1+2n}{n-3}; \quad a = 2$
7. $a_n = \frac{4n-5}{3n+1}; \quad a = \frac{4}{5}$
8. $a_n = \frac{2-5n}{n-1}; \quad a = -5$
9. $a_n = \frac{2-5n}{n-1}; \quad a = -5$
10. $a_n = \frac{2-3n}{n-2}; \quad a = -3$
11. $a_n = \frac{7n+4}{n-3}; \quad a = 7$
12. $a_n = \frac{6-5n}{2-n}; \quad a = 5$
13. $a_n = \frac{5n-3}{2n+1}; \quad a = \frac{5}{2}$

$$14. a_n = \frac{6n - 7}{2n - 3}; \quad a = 3$$

$$15. a_n = \frac{n + 1}{1 - 3n}; \quad a = -\frac{1}{3}$$

$$16. a_n = \frac{3n - 2}{3n - 5}; \quad a = \frac{3}{2}$$

$$17. a_n = \frac{8n - 3}{5n + 4}; \quad a = \frac{3}{8}$$

$$18. a_n = \frac{3n + 2}{1 - 4n}; \quad a = -\frac{3}{4}$$

$$19. a_n = \frac{10 - 9n}{2n}; \quad a = -\frac{9}{2}$$

$$20. a_n = \frac{5n + 7}{8n}; \quad a = \frac{5}{8}$$

1.4. Знайти границі послідовностей:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - n)^2 + (3 + n)^2}{(3 - n)^2 - (3 + n)^2}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - n)^4 + (2 - n)^4}{(1 - n)^4 - (1 + n)^4}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - n)^4 - (2 - n)^4}{(1 - n)^3 - (1 + n)^3}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - n)^4 + (2 - n)^4}{(1 - n)^3 - (1 + n)^3}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6 - n)^2 - (6 + n)^4}{(6 + n)^2 - (1 - n)^2}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^3 - (n + 1)^2}{(n - 1)^3 - (n + 1)^3}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 2n)^3 - 8n^3}{(1 + 2n)^2 + 4n^2}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - 4n)^2}{(n - 3)^3 - (n + 3)^3}$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^3 - (n - 1)^3}{n^3 + 1}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^3 + (n - 1)^2}{n^3 - 3n}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n - 1)^3}{(n + 1)^4 - n^4}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)^3 + (n - 2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n + 1)^4 - (n - 1)^4}$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 6)^3 - (n + 1)^3}{(2n + 3)^2 + (n + 4)^2}$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - 3)^3 - (n + 5)^3}{(3n - 1)^3 + (2n + 3)^3}$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 10)^2 + (3n + 1)^2}{(n + 6)^3 - (n + 1)^3}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n-2)^2}{(n+3)^2}$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3}$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3}$$

1.5. Знайти границі послідовностей:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[5]{n^5+1}}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2} - n}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^8+6} - \sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6} + \sqrt{n-6}}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3} + \sqrt[4]{n^3+1}}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2} - \sqrt[5]{n^5+2}}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4-n+1}}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7+5} - \sqrt{n-5}}{\sqrt{n^7+5} + \sqrt{n-5}}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n+1}}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[5]{n^6+n^3+1} - 5n}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4} - \sqrt[5]{n^5+5}}$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-7} + \sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5} + \sqrt{n}}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6+4} + \sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6} - \sqrt{n-6}}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{n^5+n}}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+3} - \sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3} + \sqrt{n-3}}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8+1}}$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[4]{n^5+1} + \sqrt[3]{3n^3+3}}$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n-1}}$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n-1} + \sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[3]{n} - n}$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1} - n}$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1}}$$

1.6. Знайти границі послідовностей:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3})$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{n^3-5})n\sqrt{n}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)} - \sqrt{n^4-9})$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-3n+2} - n)$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{4-n^3})$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2-2n+3})$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{(n+3)(n-1)})$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt{n(n^4-1)} - \sqrt{n^5-8})$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n)$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[3]{5+n^3} - \sqrt[3]{(n-3)^2})$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-3n+2} - \sqrt[3]{(n-3)^2})$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4+3} - \sqrt{n^4-2})$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4})$
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+12)})$
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n(n-1)})$
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)} - \sqrt{(n^2-1)(n^2-2)})$
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3+8}(\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3-1})$
19. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3})$

1.7. Знайти границі послідовностей:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-7}\right)^{n+1}$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-2}{5n+1} \right)^{3n+2}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^4}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2}$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1} \right)^{-n+1}$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1} \right)^{\frac{n}{2}}$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{n+1} \right)^{3n+1}$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7} \right)^{2n+5}$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+2} \right)^n$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-4} \right)^{2n-1}$
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-1} \right)^{2n-n^3}$
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n-3}{3n-1} \right)^{2n}$
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{-n^2}$
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15} \right)^{n+2}$
19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2} \right)^{2n^2}$
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-5}{n+1} \right)^{\frac{n}{n+1}}$

1.8. Знайти границі функцій:

1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+2x^3-3x}{2-x^2+8x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+4x+3}{2x^2+9x+9}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+6}-\sqrt{8-x}}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} (tg4xctg2x)$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^{x-4}$.
2. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6+x^4-7}{7x^6-3x^2+x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2-14x+6}{x^2-4x+3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x-1}{xtg2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+2}{4x-3} \right)^{-2x+3}$.
3. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+2x^3-4}{2x^4+5x+3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 5x};$
 $\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{x+4}.$

4. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{4 - x^4 + 2x^3};$
 $\text{б)} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 5x - 12}{2x^2 + 6x - 8};$
 $\text{B)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - x};$

$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{2 \sin^2 x};$
 $\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x-2}{-x+4} \right)^{4x+4}.$

5. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^2 + 4x - 2};$
 $\text{б)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 - x - 2};$
 $\text{B)} \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-9} - 1}{x^2 - 9x - 10};$

$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 5x};$
 $\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-7} \right)^{x+3}.$

6. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1};$
 $\text{б)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 5x - 2};$
 $\text{B)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}};$

$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \operatorname{tg} 5x};$
 $\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5+2x}{2x-3} \right)^{x+5}.$

7. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^2 + 3x + 5};$
 $\text{б)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2};$
 $\text{B)} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{-2-x}}{x+4};$

$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\sin^2 4x};$
 $\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5+x}{x-3} \right)^{3x-2}.$

8. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+4}{4x^4 + 2x^2 + 3};$
 $\text{б)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 5x + 2};$
 $\text{B)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$

$\text{B)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x \operatorname{tg} x};$
 $\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3} \right)^{x^2 + 4}.$

9. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - 3}{x - 4x^3};$
 $\text{б)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2};$
 $\text{B)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{9 - x^2};$

$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{\operatorname{tg}^2 5x};$
 $\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{3x+2}.$

10. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 1}{3x^4 + x^3 + 5};$
 $\text{б)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{11x^2 + 9x - 2};$
 $\text{B)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}};$

$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 2x};$
 $\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-1} \right)^{2x-7}.$

11. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x + 1}{8x^2 + 3x + 2};$
 $\text{б)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$
 $\text{B)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{8-x}}{x-5};$

$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}^2 3x}{\operatorname{ctg}^2 6x};$
 $\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4+x}{x-2} \right)^{3x+4}.$

12. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x + 1}{4 + 3x^2 + 2x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 + 5x + 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg^2 2x}{\sin^2 5x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+2}{2x-3} \right)^{5x+3}$.
13. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x^3 - x}{3 + 3x^2 + 4x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{10 + 3x - x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+4}{4x+3} \right)^{4x+5}$.
14. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{5 - x^2 + 2x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$; в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{\sqrt{x+8} - \sqrt{-x}}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{1 - \cos 6x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x-4} \right)^{5-2x}$.
15. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 7}{2 - 4x + 3x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{2x^2 - 9x + 9}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ctg 2x}{ctg 8x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+5}{5x-3} \right)^{x+3}$.
16. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 6x^2 + 5}{4 - x + 3x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - x - 14}{x^2 + 8x + 12}$; в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{-2-x}}{x+4}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx - \sin x}{x^3}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4} \right)^{4x-1}$.
17. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 6x^3 - 7}{5x^3 - 3x^5 + 3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{7x - 3x^2 - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x}}{2x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 5x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-2}{7x-1} \right)^{4-3x}$.
18. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x}{1 - 4x^2 + 6x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 72}{x^2 - 7x + 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0} tg 2x ctg 6x$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-x}{5-x} \right)^{x+2}$.
19. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 6x^3 - 7}{5x^3 - 3x^5 + 3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 7x - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{\cos 2x - 1}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-2}{7x-1} \right)^{4-3x}$.
20. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 12x^3}{3x^3 - x^5 + 7x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{20 + x - x^2}{3x^2 - 11x - 20}$; в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{-1-x}}{2+x}$;

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}; \quad \Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+4}{6x-3} \right)^{5x-2}.$$

1.9. Дослідити функцію на неперервність вияснити характер точок розриву, побудувати графік:

$$1. f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{якщо } x < -1, \\ x^2 + 2, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1, \\ 2x, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < 0, \\ -(x-1)^2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2, \\ x-3, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x^2+1, & \text{якщо } -1 < x \leq 1, \\ x-x, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2+1, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ x, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{якщо } x \leq 1, \\ 2x, & \text{якщо } 1 < x \leq 3, \\ 2+x, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{якщо } x \leq 0, \\ 0, & \text{якщо } 0 < x \leq 2, \\ x-2, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{якщо } x < -1, \\ -x^2, & \text{якщо } -1 \leq x < 1, \\ x, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} -3x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } 0 < x \leq 4, \\ x+3, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ -x+3, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x < -2, \\ -x+1, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 1, \\ x^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 < x \leq 2, \\ -x + 3, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} -4, & \text{якщо } x \leq -2; \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 2; \\ 2x - 7, & \text{якщо } 2 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{якщо } x \leq 0; \\ 4 - x^2, & \text{якщо } 0 < x < 2; \\ x - 2, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1; \\ 4 - 2x, & \text{якщо } 1 < x < 2,5; \\ 2x - 7, & \text{якщо } 2,5 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{якщо } x < -1, \\ x^2 + 2, & \text{якщо } -1 \leq x < 1, \\ 2x, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1; \\ 2, & \text{якщо } 1 < x < 3; \\ x, & \text{якщо } 3 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} -3, & \text{якщо } x < -2, \\ -x^2 + 1, & \text{якщо } -2 \leq x < 2, \\ 3, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 < x \leq 2, \\ x + 1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{якщо } x < 0; \\ (x - 1)^2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2; \\ 4 - x, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

1.10. Дослідити функції на неперервність вияснити характер точок розриву:

$$1. a) y = \frac{-6x}{(x+3)^2};$$

$$б) y = e^{\frac{x}{x+2}}.$$

$$2. a) y = \frac{3-x}{(x+1)^3};$$

$$б) y = 2^{\frac{2x}{3-x}}.$$

$$3. a) y = \frac{5+2x}{(x-2)^4};$$

$$б) y = 3^{\frac{1}{2x+1}}.$$

$$4. a) y = \frac{-2x+1}{(x-1)^2};$$

$$б) y = e^{\frac{x+1}{x-2}}.$$

$$5. a) y = \frac{4-3x}{(x-3)^3};$$

$$б) y = 4^{\frac{2x}{x-1}}.$$

$$6. a) y = \frac{-3+x}{(x+5)^3};$$

$$б) y = 5^{\frac{2x+1}{x-3}}.$$

$$7. a) y = \frac{1-2x}{(x+1)^5};$$

$$б) y = 2^{\frac{1}{2x+2}}.$$

$$8. a) y = \frac{-5x+4}{(x-5)^2};$$

$$б) y = 3^{\frac{2x}{2x-1}}.$$

$$9. a) y = \frac{-2+x}{(x+4)^3};$$

$$б) y = e^{\frac{4+x}{3-x}}.$$

$$10. a) y = \frac{3-3x}{(x-4)^5};$$

$$б) y = 6^{\frac{4+x}{3-x}}.$$

$$11. a) y = \frac{-1+2x}{(x-4)^2};$$

$$б) y = 2^{\frac{1}{4-2x}}.$$

$$12. a) y = \frac{-7+x}{(x+2)^3};$$

$$б) y = 5^{\frac{1+2x}{1-x}}.$$

$$13. a) y = \frac{4-x}{(2x-3)^6};$$

$$б) y = 4^{\frac{1}{2x-1}}.$$

$$14. a) y = \frac{9+3x}{(x+2)^2};$$

$$б) y = 3^{\frac{3x}{2-x}}.$$

$$15. a) y = \frac{-4+x}{(x+8)^2};$$

$$б) y = e^{\frac{1+2x}{3-x}}.$$

$$16. a) y = \frac{3x}{(x-4)^3};$$

$$б) y = 2^{\frac{1+x}{3-x}}.$$

$$17. a) y = \frac{2-3x}{(x+1)^5};$$

$$б) y = 7^{\frac{3-x}{x-2}}.$$

$$18. a) y = \frac{-3x}{(x-4)^2};$$

$$б) y = 9^{\frac{1+2x}{1-x}}.$$

19. а) $y = \frac{-x+5}{(x-1)^3}$;

б) $y = e^{\frac{1}{8-4x}}$.

20. а) $y = \frac{5+2x}{(x+2)^5}$;

б) $y = 4^{\frac{1}{2x+2}}$.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Тема 4. Похідна першого та вищих порядків. Диференціал.

Поняття функція. Область її визначення та способи задання. Основні елементарні функції, їх властивості та графіки.

Задачі, які приводять до поняття похідної. Геометричний та механічний зміст похідної. Основні правила диференціювання. Похідна складної функції. Похідні вищих порядків. Диференціал функції, його властивості та застосування до наближених обчислень. Диференціали вищих порядків. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Коші. Теорема Лагранжа.

Тема 5. Застосування похідної до дослідження функцій.

Теореми про середнє значення диференціального числення. Розкриття невизначеностей з допомогою правил Лопітала. Формула Тейлора. Проміжки монотонності та точки екстремуму. Опуклість і вгнутість кривих, Точки перегину. Асимптоти графіка функцій Поняття функцій багатьох змінних, дослідження їх на екстремум. Найбільше і найменше значення функції багатьох змінних на проміжку.

Тема 6. Функції багатьох змінних. Екстремуми функції багатьох змінних.

Функції багатьох змінних. Частинні похідні. Диференційованість функції. Похідна за напрямом. Градієнт функції. Дотична площина та нормаль до поверхні. Локальний екстремум функції. Неявні функції. Найбільше та найменше значення функції. Екстремуми функції багатьох змінних. Екстремуми функцій кількох змінних. Умовний екстремум. Необхідна умова екстремуму. Достатні умови.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ:

1. Задачі, які приводять до поняття похідної.
2. Сформулюйте означення похідної.
3. Геометричний та механічний зміст похідної.
4. Запишіть рівняння дотичної і нормалі до графіка функції.
5. Похідні від основних елементарних функцій.
6. Основні правила диференціювання.
7. Похідна складеної функції, неявної, параметричної та степеневопоказникової.
8. Похідні вищих порядків.
9. Сформулюйте означення диференціалу функції.

10. Властивості диференціалу та застосування до наближених обчислень.
11. Диференціали вищих порядків.
12. Теореми про середнє значення диференціального числення.
13. Розкриття невизначеностей за допомогою правил Лопіталя.
14. Проміжки монотонності та точки екстремуму функції.
15. Сформулювати необхідні та достатні умови зростання та спадання функції.
16. Які точки називають точками екстремуму?
17. Які точки називають критичними?
18. Сформулювати достатні умови екстремуму.
19. Сформулюйте означення опуклості, вгнутості і точки перегину графіка функції.
20. Як знаходяться проміжки опуклості, вгнутості і точки перегину графіка функції.
21. Сформулювати достатні умови опуклості графіка функції.
22. Сформулюйте означення асимптоти графіка функції. Назвіть види асимптот. Запишіть їх рівняння.
23. Наведіть загальну схему дослідження функцій і побудови графіків.
24. Дати означення функції багатьох змінних, двох змінних.
25. Алгоритм дослідження функції двох змінних на екстремум, умовний екстремум.
26. Відшукування найбільшого та найменшого значення функції двох змінних у замкнутій області.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1.1. Розв'язати наступні задачі на складання рівнянь дотичної і нормалі.

1. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 7x + 3$ у точці з абсцисою $x = 1$.
2. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 4x + 3$, яка проходить через точку $M(3; -1)$.
3. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^2 - 16x + 7$ у точці з абсцисою $x = 1$.
4. Записати рівняння дотичної до кривої $y = \sqrt{x - 4}$ у точці з абсцисою $x = 8$.
5. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt{x + 4}$ у точці з абсцисою $x = -3$.
6. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ у точці з абсцисою $x = 2$.
7. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^2 - 4x + 3$, яка проходить через точку $M(3; -1)$.

8. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ у точці з абсцисою $x = 1$.

9. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 6x + 2$ у точці з абсцисою $x = 2$.

10. Записати рівняння дотичної до кривої $y = -2x^2 + 7x - 8$ у точці з абсцисою $x = 3$.

11. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 3tg(2x) + 1$ у точці з абсцисою $x = \frac{\pi}{2}$.

12. Записати рівняння дотичної до кривої $y = 4tg(3x)$ у точці з абсцисою $x = \frac{\pi}{9}$.

13. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 6tg(5x)$ у точці з абсцисою у точці з $x = \frac{\pi}{20}$.

14. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 2x^2 + 1$ у точці з абсцисою $x = 2$.

15. Записати рівняння нормалі до гіперболи $y = \frac{2}{x}$ у точці $M(2; 1)$.

16. У якій точці дотична до параболи $y = -x^2 + 4$ перпендикулярна до прямої $x - 2y + 2 = 0$.

17. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \sqrt[3]{x^2}$ у точці з абсцисою $x = -1$.

18. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3$ у точці з абсцисою $x = -1$.

19. Записати рівняння нормалі до кривої $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ у точці з абсцисою $x = 0$.

20. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 2x + 5$ у точці з абсцисою $x = 1$.

1.2. Знайти похідну заданих функцій:

1. а) $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$;

б) $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x^2}}$;

в) $x \sin y - y \cos x = 0$;

г) $y = x^{\frac{2}{x}}$.

2. а) $y = \frac{3x}{\sqrt[3]{2+x}} - 6\sqrt[3]{2+x}$;

б) $y = \sin^3 \sqrt{2x+1}$;

в) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$;

г) $y = (\arccos x)^x$.

3. а) $y = x \arccos x + \sqrt[3]{5 - x^2}$;

б) $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;

в) $y \sin x + \cos(x - y) = 6$;

г) $y = x^{\arcsin x}$.

4. а) $y = \sqrt[3]{x^4 + 5x} - \sqrt[4]{(5x - 1)^3}$;

б) $y = \frac{1+tgx}{1-tgx}$;

- б) $\cos(x - y) - 2x + 4y = 0$;
 5. а) $y = x + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$;
 б) $x e^y + y e^x = xy$;
 6. а) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{5}{\sqrt[4]{(x^3+2)^3}}$;
 б) $\cos(xy) = \frac{y}{x}$;
 7. а) $y = x^3 \sqrt{\frac{2}{1+x}}$;
 б) $xy + \ln y - 2 \ln x = 0$;
 8. а) $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$;
 б) $e^{x+y} = \sin \frac{y}{x}$;
 9. а) $y = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$;
 б) $y^2 - \operatorname{tg} xy = 5 + x^7$;
 10. а) $y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$;
 б) $y \ln x - x \ln y = x + y$;
 11. а) $y = \ln^3 \sqrt{\left(\frac{3x-4}{3x+1}\right)^4}$;
 б) $(x + y)^2 = (x - 2y)^3$;
 12. а) $y = \ln \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x}}{1-x} + x^2$;
 б) $y^5 + x^7 - \sqrt{xy} = 3$;
 13. а) $y = \ln^5 \sqrt{\left(\frac{1-5x}{1+5x}\right)^3}$;
 б) $3x^2 + 2y^5 = \operatorname{ctg} xy$;
 14. а) $y = \ln \operatorname{arccos} \frac{1}{\sqrt{2x}} + \sqrt[3]{x^2}$;
 б) $\sqrt[5]{yx^2} = \frac{x}{y} + \operatorname{tg} y$;
 15. а) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} + 4x^3$;
 б) $y = x^{\cos^2 x}$;
 б) $y = \sin \sqrt{x^2 + x}$;
 г) $y = x^{\frac{1}{x^2}}$;
 б) $y = (e^{\sin x} - x)^2$;
 г) $y = 2x^{\sqrt{x}}$;
 б) $y = (3x^8 + 5\sqrt[5]{x^2} - 3)^5$;
 г) $y = (\ln x)^x$;
 б) $y = 7^{\operatorname{arctg} 2x} + x \cdot \ln 2x$;
 г) $y = (\sin x)^{\cos x}$;
 б) $y = x \operatorname{arcsin} \frac{2x+1}{3}$;
 г) $y = (\arccos x)^{\operatorname{arcsin} \frac{1}{x}}$;
 б) $y = e^{-x^2} \cos^3(2x + 3)$;
 г) $y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}$;
 б) $y = \frac{1 + \sin 3x}{1 - \sin 3x}$;
 г) $y = x^{\cos \frac{1}{x}}$;
 б) $y = 4^{\cos 2x} - x \cdot \sin 2x$;
 г) $y = x^{\lg x}$;
 б) $y = \left(3x^4 - \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}} + 2\right)^5$;
 г) $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin 3x}$;
 б) $y = 3^{\operatorname{ctg} 5x} + x \cdot \sin 5x$;
 г) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$;
 б) $y = \ln \sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^3}$

$$\text{в) } 7^{\frac{x}{y}} + 3^{xy} = 2 + \sin x;$$

$$16. \text{ а) } y = \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - x \cdot \cos^2 x;$$

$$\text{в) } \ln(x+y) = y^3 + \sin x;$$

$$17. \text{ а) } y = \ln \sqrt[4]{\left(\frac{2x^3-3}{2x^3+3}\right)^3};$$

$$\text{в) } 7 + \operatorname{arctg} xy = x + \ln y;$$

$$18. \text{ а) } y = \left(\frac{3x^8}{8} - 6x \cdot \sqrt[3]{x} - 6\right)^7;$$

$$\text{в) } \frac{y}{x-3} + \cos y = \ln x;$$

$$19. \text{ а) } y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{7x-4}{x^7-2}\right)};$$

$$\text{в) } 5^{tgy} = y^2 + \sqrt{xy};$$

$$20. \text{ а) } y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{2x^2+4}{2x^2-4}\right)^5};$$

$$\text{в) } 7x^7 - 5y^5 = \cos \frac{x}{y};$$

1.3. Найдите $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$1. \begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 + t + 1 \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4t \\ y = \frac{1}{4}t^4 + 8t - 1 \end{cases};$$

$$3. \begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} \end{cases};$$

$$4. \begin{cases} x = t + \frac{1}{2} \sin 2t \\ y = \cos^3 t \end{cases};$$

$$5. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \sqrt{2t-1} \\ y = \sqrt{2t-1} \end{cases};$$

$$\text{г) } y = x^{\sin x}$$

$$\text{б) } y = \sqrt{1 + \ln^2 x};$$

$$\text{г) } y = x^{\operatorname{arcsin} \frac{1}{x}}.$$

$$\text{б) } y = 4^{tg \frac{x}{2}} + x \cdot ctg \frac{x}{3};$$

$$\text{г) } y = (2-x)^{\operatorname{arccos} \frac{1}{x}}.$$

$$\text{б) } y = xtg 3x + 2^{x-2};$$

$$\text{г) } y = (\operatorname{arctg} x)^x.$$

$$\text{б) } y = 4^{\cos^2 2x} - x \cdot \sin 2x;$$

$$\text{г) } y = (tg x)^{ctg x}.$$

$$\text{б) } y = \left(3x^7 - \frac{2}{3x \cdot \sqrt{x}} + 1\right)^7;$$

$$\text{г) } y = x^{\cos \frac{1}{x}}.$$

$$11. \begin{cases} x = \ln \cos^2 t \\ y = \ln \sin^2 t \end{cases};$$

$$12. \begin{cases} x = 2 \cos^3 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases};$$

$$13. \begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1} \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases};$$

$$14. \begin{cases} x = \sqrt{\cos t} \\ y = \sqrt{\sin t} \end{cases};$$

$$15. \begin{cases} x = \frac{2-t}{2+t^2} \\ y = \frac{t^2}{2+t^2} \end{cases};$$

$$6. \begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1); \\ y = \arccos(2t) \end{cases};$$

$$7. \begin{cases} x = 2t - \sin 2t; \\ y = \sin^3 t \end{cases};$$

$$8. \begin{cases} x = ctgt \\ y = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases};$$

$$9. \begin{cases} x = \frac{1}{\sin^2 t}; \\ y = tgt \end{cases};$$

$$10. \begin{cases} x = 3t - \sin 3t \\ y = t - \frac{1}{3}\sin 3t \end{cases};$$

$$16. \begin{cases} x = e^t \sin t; \\ y = e^t \cos t; \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = \sin t \cos t; \\ y = \sin^2 t \end{cases};$$

$$18. \begin{cases} x = t + \ln \cos t; \\ y = t - \ln \sin t; \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x = \ln(2t) \\ y = \ln(t^2 - 1) \end{cases};$$

$$20. \begin{cases} x = ctg \frac{t}{3} \\ y = tg \frac{t}{3} \end{cases}.$$

1.4. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на відріжку $[a, b]$:

$$1. y = x^4 - 2x^2 + 3, [-1; 3];$$

$$2. y = \frac{10x}{1+x^2}, [0; 3];$$

$$3. y = \frac{x-3}{x^2+16}, [-5; 5];$$

$$4. y = \frac{x+6}{x^2+13}, [-5; 5];$$

$$5. y = \frac{4-x^2}{4+x^2}, [-1; 3];$$

$$6. y = 4 - x - \frac{4}{x^2}, [1; 4];$$

$$7. y = \frac{8x+4}{x^2-15}, \left[\frac{1}{2}; 2\right];$$

$$8. y = \frac{1}{2}x - \sin x, \left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right];$$

$$9. y = \frac{1}{2}x + \cos x, \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right];$$

$$10. y = \frac{1}{2}x + \cos x, \left[-2\pi; -\frac{3}{2}\pi\right];$$

$$11. y = 2\sqrt{x} - x, [0; 4];$$

$$12. y = x - 4\sqrt{x} + 5, [1; 9];$$

$$13. y = x - 2 \ln x, [1; e];$$

$$14. y = \ln(x^2 - 2x + 2), [0; 3];$$

$$15. y = 4 - e^{-x}, [0; 1];$$

$$16. y = \frac{e^{2x}+1}{e^x}, [-1; 2];$$

$$17. y = e^{4x-x^2}, [1; 3];$$

$$18. y = \frac{\ln x}{x}, [1; 4];$$

$$19. y = \sqrt{x - x^3}, [0; 1];$$

$$20. y = x^3 e^{x+1}, [-4; 0].$$

1.5. Дослідити методами диференціального числення функцію та побудувати її графік:

$$1. y = \frac{x^3-4}{4x^2};$$

$$2. y = \frac{2x^3+1}{x^2};$$

$$3. y = \frac{x^2-11}{4x-3};$$

$$11. y = \frac{x}{x^2+x-2};$$

$$12. y = \frac{x^2-6x+4}{3x-2};$$

$$13. y = \frac{x^2-x+1}{x-1};$$

4. $y = \frac{x^2}{x^2-1};$

5. $y = \frac{x-1}{x^2-4};$

6. $y = \frac{3-x^2}{x+2};$

7. $y = \frac{x^3+16}{x};$

8. $y = \frac{x^3}{3-x^2};$

9. $y = \frac{12x}{9+x^2};$

10. $y = \frac{1}{x^2-9};$

14. $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2;$

15. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2};$

16. $y = \frac{3-x^2}{x^2};$

17. $y = \frac{x^2}{2x+2};$

18. $y = \frac{2x^2+8}{x};$

19. $y = \frac{3-x^2}{x+2};$

20. $y = \frac{x^2+1}{x-1}.$

1.6. Знайти частинні похідні 1-го і 2-го порядку функції $z = f(x, y)$:

1. $z = e^x y - x^4 y + y^2 + x - 3y - 2;$

2. $z = 4x^3 \cos y - 3xy + 2y^2 - 7x + y + 4;$

3. $z = x^5 y - x^2 y + 2 \cos y + 3x + y - 7;$

4. $z = 5x^3 - 3xy + y^2 + 2 \operatorname{tg} y - 4x + y - 1;$

5. $z = 3e^x - 2x^3 y^2 - y^2 + x - 2y + 2;$

6. $z = 2y \sin x - x^3 y + 2y^3 - 7x + y - 5;$

7. $z = 3xe^y + x^2 y + 2 \cos y + x - 3y - 2;$

8. $z = 2x^2 \cos y + 3x^5 y^4 + 2y^2 - 7x + y + 4;$

9. $z = x^3 y - y^2 \cos x + 2y^3 - 5y + 7;$

10. $z = 5e^x y^3 - 2xy^3 + 2y^2 + x - 5y + 2;$

11. $z = xy^4 - x^3 y + 2 \sin y - x + 3;$

12. $z = 4x^2 - yx^3 + 3 \ln y - e^x + 2;$

13. $z = 2x^2 y - \ln x + 3y^2 + \frac{4}{x};$

14. $z = x^3 y^2 - 3x^2 \cos y + 3y + 9;$

15. $z = x^2 y + 3 \ln y + 2 \ln x - 4x + 1;$

16. $z = x^4 - 3x^3 y^2 + \operatorname{tg} x - 4x + 2y - 2;$

17. $z = 5x^3y^2 - 3x + y^2 + \frac{2x}{y^3} - 3;$
18. $z = x^2 \sin y - 2xy^2 + \frac{y}{x} + y + 1;$
19. $z = 3e^x y^2 - x^2 + y^3 + 2e^y - 4;$
20. $z = e^x y^2 - 3xy^2 + \ln x - 7y + x^3 - 3.$

1.7. Знайти диференціал функції $z = f(x, y)$:

1. $z = \cos(x^3 - 3y);$
2. $z = \frac{3x+2y}{3x-2y};$
3. $z = \sqrt{x^4 + 2y^3};$
4. $z = x \ln \frac{x^2}{y};$
5. $z = \frac{xy+1}{x+y};$
6. $z = e^{\sqrt{x^2+xy+y^2}};$
7. $z = e^{3xy-y^2};$
8. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$
9. $z = x \ln(x^3 y);$
10. $z = \ln(x^2 + xy + y^2);$
11. $z = 4e^{\sqrt{x}+\sqrt{y}};$
12. $z = \sin(5x^2 + y);$
13. $z = \ln(x^3 + y^3);$
14. $z = \frac{x^2+3y^2}{x+y};$
15. $z = \cos \sqrt{(x+y)};$
16. $z = \frac{xy}{x+y+1};$
17. $z = \operatorname{arcsin}(x + 3y);$
18. $z = y \ln \frac{2y}{x^3};$
19. $z = \frac{y}{y^2-9x^2};$

$$20. z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

1.8. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

1. $z = -2x^2 + xy - 2y^2 + 5x - 5y - 8;$
2. $z = x^2 + xy + y^2 + 6x - 9y + 9;$
3. $z = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 10x + 8y + 7;$
4. $z = x - y(3 - x - y) + 5;$
5. $z = x^2 + 6xy + 2y^2 - 4x + 2y + 5;$
6. $z = x(x + y - 3) + y(-6 + y);$
7. $z = 3x^2 - 2xy + 4y^2 - 8x + 10y - 3;$
8. $z = 2x^2 - y^2 - 8x - 12y - 7;$
9. $z = -3x^2 + 4xy - 2y^2 + 10x - 8y + 2;$
10. $z = (x + y)^2 - xy + x - y + 1;$
11. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 2;$
12. $z = -(x + y)^2 + xy + 3x;$
13. $z = x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 5y + 3;$
14. $z = -x^2 - xy - y^2 + 3x + 6y + 5;$
15. $z = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 6y + 5;$
16. $z = x^3 + y^3 - 3xy;$
17. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 5;$
18. $z = x^2y(4 - x - y);$
19. $z = 2x^2 + 3xy + y^2 + 7x + 5y - 7;$
20. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$

1.9. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в області D , що обмежена лініями:

1. $z = 3x + y - xy,$ $D: y = x, \quad y = 4, \quad x = 0.$
2. $z = xy - x - 2y,$ $D: x = 3, \quad y = x, \quad y = 0.$
3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y,$ $D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2.$

4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.
5. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.
6. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$.
7. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.
8. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$.
9. $z = x^2 + 2xy - 10$, $D: y = 0, y = x^2 - 4$.
10. $z = xy - 2x - y$, $D: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$.
11. $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$, $D: y = 8, y = 2x^2$.
12. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.
13. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$, $D: x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0$.
14. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $D: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0$.
15. $z = xy - 3x - 2y$, $D: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$.
16. $z = x^3 - 3xy + y^3$, $D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$.
17. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x = 3, y = 0, y = x + 1$.
18. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, $D: x = -1, x = -1, y = -1, y = 1$.
19. $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$, $D: x = 0, y = 0, x + y = 6$.
20. $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $D: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$.

1.10. Знайти екстремум функції $z = f(x, y)$ за умови, що змінні x і y задовольняють рівняння $\varphi(x, y) = 0$:

1. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.
2. $z = 4y^3 + 3x^2y - 2x^2 - 108x - 3$ за умови $3y - x - 4 = 0$.
3. $z = 5x^3 + 7xy^2 - 3y^2 - 15x - 4$ за умови $2x + 4y + 1 = 0$.
4. $z = 6y^3 + 10x^2y + 2x^2 - 2y + 9$ за умови $3x - y + 5 = 0$.
5. $z = x^3 + 2xy^2 + y^2 - 6x + 7$ за умови $5x + y - 3 = 0$.
6. $z = 5y^3 + 7x^2y - 3x^2 - 15y + 2$ за умови $2y - 2x - 3 = 0$.
7. $z = 6x^3 + 10xy^2 + 2y^2 - 2x + 7$ за умови $x + 2y - 2 = 0$.
8. $z = 2y^3 + 5x^2y + 8x^2 - 24y + 8$ за умови $2y + 4x - 3 = 0$.

9. $z = 2x^3 + 5xy^2 + 8y^2 - 24x - 10$ за умови $-3x + 2y + 2 = 0$.
10. $z = y^3 + 4x^2y + 5x^2 - 48y + 7$ за умови $x + 2y - 1 = 0$.
11. $z = 4x^3 + 3xy^2 - 2y^2 - 108x - 6$ за умови $-4x + 2y + 3 = 0$.
12. $z = 8y^3 + 2y^3 + 5x^2y - 24y + 3$ за умови $x + 4y - 4 = 0$.
13. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.
14. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$ за умови $3x + 2y - 4 = 0$.
15. $z = y^3 + y^2 - 6xy - 39y + 18x + 5$ за умови $x - 2y + 4 = 0$.
16. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$ за умови $x + 2y - 3 = 0$.
17. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.
18. $z = 3x^3 + 2xy^2 - 49x + 4$ за умови $-6x + 2y - 3 = 0$.
19. $z = x^3 + 6y^2 - 4x + 5$ за умови $4x - 3y + 5 = 0$.
20. $z = x^2 + y^3 + 5y^2 + 48x + 2$ за умови $2x - 4y + 3 = 0$.

ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Тема 7. Первісна функції та невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування невизначених інтегралів.

Поняття первісної. Теорема про структуру первісних. Невизначений інтеграл та його властивості. Таблиця основних інтегралів. Основні методи інтегрування (метод безпосереднього інтегрування, метод підстановки, інтегрування частинами).

Тема 8. Інтегрування раціональних та ірраціональних функцій.

Інтегрування простих алгебраїчних дробів. Допоміжні теореми при інтегруванні раціональних функцій. Алгоритм інтегрування раціональних функцій. Основні методи інтегрування ірраціональних функцій.

Тема 9. Інтегрування тригонометричних функцій.

Універсальна підстановка та інші методи інтегрування тригонометричних функцій.

Тема 10. Визначений інтеграл та його застосування.

Задачі, які приводять до поняття визначеного інтегралу. Визначений інтеграл. Теорема існування. Властивості визначеного інтегралу. Похідна від визначеного інтегралу по змінній верхній межі. Формула Ньютона-Лейбніца. Основні методи інтегрування визначеного інтегралу.

Тема 11. Невласні інтеграли.

Невласні інтеграли, дослідження їх на збіжність.

Тема 12. Інтегрування функцій кількох змінних.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ:

1. Поняття первісної. Теорема про структуру первісних.
2. Невизначений інтеграл та його властивості.
3. Таблиця основних інтегралів.
4. Основні методи інтегрування (метод безпосереднього інтегрування, метод підстановки, інтегрування частинами).
5. Інтегрування простих алгебраїчних дробів.
6. Допоміжні теореми при інтегруванні раціональних функцій.
7. Алгоритм інтегрування раціональних функцій.
8. Основні методи інтегрування ірраціональних функцій.
9. Інтеграл від біномного диференціалу.
10. Підстановки Ейлера.
11. Універсальна підстановка та інші методи інтегрування тригонометричних функцій.
12. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтегралу. Визначений інтеграл. Теорема існування.
13. Властивості визначеного інтегралу.
14. Похідна від визначеного інтегралу по змінній верхній межі. Формула Ньютона-Лейбніца.
15. Основні методи інтегрування визначеного інтегралу.
16. Невласні інтеграли, дослідження їх на збіжність.
17. Яка функція називається раціональною?
18. Дати означення цілої та дробової раціональних функцій, правильного та неправильного раціонального дробу.
19. Які дробі називаються елементарними?
20. Сформулювати теорему про розклад многочлена з дійсними коефіцієнтами на множники.
21. Сформулювати теорему про розклад правильного раціонального дробу на елементарні.
22. Яку підстановку слід робити в інтегралах типу
23. Які умови повинні задовольняти $u(x)$ та $v(x)$ у формулі інтегрування частинами?
24. Типи інтегралів, при інтегруванні яких застосовують метод інтегрування частинами.
25. Якою підстановкою інтеграли типу $\int R(\sin x, \cos x) dx$ у загальному випадку зводяться до інтегрування раціональних функцій?
26. Яку підстановку слід робити, якщо виконується рівність $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$?
27. Яку підстановку слід робити, якщо виконується рівність $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$?
28. Яку підстановку слід робити, якщо виконується рівність $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$?
29. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтегралу.
30. Поняття визначеного інтегралу, його геометричний зміст та властивості.

31. Поняття визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування, формула Ньютона-Лейбніца.

32. Суть методу підстановки у визначеному інтегралі.

33. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1.1. Методом безпосереднього інтегрування знайти інтеграли:

1. $\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)dx.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}.$

2. $\int \frac{2x-x\sqrt{x}+7x^3}{\sqrt{x}} dx.$

12. $\int \frac{dx}{3x^2-25}.$

3. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x^5}} dx.$

13. $\int \frac{x^2}{x^2+4} dx.$

4. $\int \frac{\sqrt{x^3}-5x}{3\sqrt[3]{x}} dx.$

14. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}.$

5. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx.$

15. $\int \frac{x^2 dx}{(9+4x^3)^4}.$

6. $\int (x^2 + 1)(x - 3)dx.$

16. $\int (1 + e^{3x})^2 \cdot e^{3x} dx.$

7. $\int (\sqrt{x} - x + 1)(1 + \sqrt{x})dx.$

17. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx.$

8. $\int \frac{\sqrt{x}-x^2 e^x+x^5}{x^2} dx.$

18. $\int \sqrt[3]{(5x-7)^2} dx.$

9. $\int \frac{1}{(5x+2)^2} dx.$

19. $\int tg^2 x dx.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}}.$

20. $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx.$

1.2. Методом інтегрування частинами знайти інтеграли:

1. $\int x \cdot \sin x dx.$

11. $\int 3x \cos x dx.$

2. $\int (x^2 - 2x) \cdot \cos 2x dx.$

12. $\int x^2 \cos x dx.$

3. $\int x \cdot e^{-x} dx.$

13. $\int x \ln x dx.$

4. $\int x \cdot 5^x dx.$

14. $\int e^{2x} \cdot \cos 2x dx.$

5. $\int x^2 \cdot e^{3x} dx.$

6. $\int \operatorname{arctg} x dx.$

7. $\int (x - 3) \cdot \operatorname{arcsin} x dx.$

8. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$

9. $\int e^{2x} \cdot \cos x dx.$

10. $\int \ln x dx.$

15. $\int e^{3x} \cdot \sin 3 x dx.$

16. $\int (x + 2)^2 \cdot e^{-3x} dx.$

17. $\int (2x - 1)^2 \operatorname{arcsin} 3 x dx.$

18. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$

19. $\int x \cdot \ln(x^2 + 1) dx.$

20. $\int e^{-2x} \cdot \cos \frac{x}{2} dx.$

1.3. Методом заміни змінних знайти інтеграли:

1. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx.$

2. $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

3. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$

4. $\int (3 + 7x^2)^5 x dx.$

5. $\int \frac{e^{2x} dx}{(e^{2x} + 1)^2}.$

6. $\int \frac{3x^6 dx}{\sqrt[6]{(1-x^7)^2}}.$

7. $\int x^2 \cdot 3^{x^3} dx.$

8. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

9. $\int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}.$

10. $\int \frac{1+\cos x}{\sqrt{x+\sin x}} dx.$

11. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx.$

12. $\int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsin} x}{1-x^2}} dx.$

13. $\int \frac{x^2 dx}{(4x^3+9)^4}.$

14. $\int \frac{dx}{x \ln^4 x}.$

15. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$

16. $\int e^{\cos 5x} \cdot \sin 5 x dx.$

17. $\int x^2 \cdot \sqrt{2x^3 + 8} dx.$

18. $\int \frac{5^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx.$

19. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{4x^2+1} dx.$

20. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 5x}{\cos^2 5x} dx.$

1.4. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

1. $\int \frac{dx}{(x^2-4)(x+3)}.$

2. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$

11. $\int \frac{dx}{(x^2+1)x}.$

12. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}.$

$$3. \int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}.$$

$$4. \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx.$$

$$5. \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - 1} dx$$

$$6. \int \frac{x}{x^4 - 3x^2 + 2} dx.$$

$$7. \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x-4)(x+3)} dx$$

$$8. \int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} dx.$$

$$9. \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx.$$

$$10. \int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} dx.$$

$$13. \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$$

$$14. \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx.$$

$$15. \int \frac{3 - 4x}{(x-1) \cdot (x^2 - 3x + 2)} dx.$$

$$16. \int \frac{3x^3 - 2x^2 + x + 1}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$17. \int \frac{x^3 + 7x - 15}{(x-2)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$18. \int \frac{3x^3 + 10x^2 + 14x + 5}{(x+1)^2(x^2 + 3x + 4)} dx.$$

$$19. \int \frac{4x^3 - 12x^2 + 12x - 36}{(x-1)^2(x^2 + 7)} dx.$$

$$20. \int \frac{3x^3 - 2x^2 + 6x - 7}{(x^2 - x + 4)(2x^2 - x + 1)} dx.$$

1.5. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

$$1. \int \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x}}{x(\sqrt[4]{x} + 1)} dx.$$

$$2. \int \frac{x}{1 + \sqrt{2x+1}} dx.$$

$$3. \int \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{3x+1}} dx.$$

$$4. \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1} - 1}.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 10)^3}}.$$

$$7. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$8. \int x^5 \sqrt{(1 + x^3)^2} dx.$$

$$11. \int \frac{(x^2 - 1)dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}.$$

$$12. \int \frac{(x^2 + 1)dx}{(x^2 - 1)\sqrt{x^4 + 1}}.$$

$$13. \int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x} dx.$$

$$14. \int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} - 1} dx.$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2} - \sqrt{5x+1}}.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+3x} - \sqrt{2+3x}}.$$

$$18. \int \frac{1 + \sqrt[4]{5-2x}}{\sqrt{5-2x}} dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}.$$

$$10. \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}.$$

$$19. \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2-4}\sqrt{x}}.$$

$$20. \int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx.$$

1.6. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

$$1. \int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx.$$

$$2. \int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx.$$

$$3. \int \cos^5 x dx.$$

$$4. \int \sin^5 x dx.$$

$$5. \int \operatorname{tg}^5 x dx.$$

$$6. \int (1 - \sin 2x)^2 dx.$$

$$7. \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

$$9. \int \sin 5x \cdot \sin 6x dx.$$

$$10. \int \cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx.$$

$$11. \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$$

$$12. \int \frac{\sin x dx}{(1-3 \cdot \cos x)^2}.$$

$$13. \int \frac{dx}{4+\cos x}.$$

$$14. \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx.$$

$$15. \int \frac{dx}{5+3 \cdot \cos x + \sin x}.$$

$$16. \int \frac{1+\sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$17. \int \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\sin 2x} dx.$$

$$18. \int (1 + \cos 3x)^3 dx.$$

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x}.$$

$$20. \int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

1.7. Обчислити означений інтеграл:

$$1. \int_{-1}^2 (x^3 - 6x^2 + x) dx.$$

$$2. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx.$$

$$3. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 4x dx.$$

$$11. \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx.$$

$$12. \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

$$13. \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \cos x dx.$$

$$4. \int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$5. \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4}.$$

$$6. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$$

$$7. \int_{-1}^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx.$$

$$8. \int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx.$$

$$9. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2+1}.$$

$$10. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \cdot \sin x dx.$$

$$14. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \sin 7x dx.$$

$$15. \int_1^3 \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx.$$

$$16. \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

$$17. \int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cdot \cos 2x dx.$$

$$18. \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

$$19. \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{x^4+1} dx.$$

$$20. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^3 x} \cdot \sin x dx.$$

1.8. Обчислити невластний інтеграл, або довести його розбіжність:

$$1. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

$$2. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x}.$$

$$3. \int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}.$$

$$4. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}.$$

$$11. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}.$$

$$12. \int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

$$13. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)} dx.$$

$$14. \int_{-\infty}^{-3} \frac{x dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$5. \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx.$$

$$6. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1}.$$

$$7. \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

$$8. \int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}.$$

$$9. \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}.$$

$$10. \int_0^{+\infty} x \cdot \sin x dx.$$

$$15. \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

$$16. \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx.$$

$$17. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$$

$$18. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

$$19. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} dx.$$

$$20. \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}.$$

1.9. За допомогою визначеного інтегралу обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (зробити рисунок):

$$2. y = -(x+1)^2 + 1, \quad x = -y.$$

$$3. y = -x^2 + 2x + 3, \quad y = 0, \quad y = \frac{2}{3}x, \quad x \geq 0.$$

$$4. y = -x^2 + 4, \quad y = 2x + 4, \quad y = 0.$$

$$5. xy = 4, \quad x + y - 5 = 0, \quad x = 0, \quad x = 4, \quad y = 0.$$

$$6. y = x^2, \quad y = (x-6)^2 - 4, \quad y = 0.$$

$$7. y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 3x - \frac{1}{2}x^2, \quad y = 0.$$

$$8. y = \sqrt{x}, \quad y = -x + 2, \quad y = 0,$$

$$9. y = -x^2 + 4, \quad y = -(x+3)^2 + 9, \quad y = 0.$$

$$10. \quad y = 12 + 6x - x^2, \quad y = x^2 - 2x + 2,$$

$$11. x^2 - 6x - 4y + 9 = 0, \quad x - 2y + 9 = 0.$$

$$12. x^2 - 4x - 2y + 4 = 0, \quad x - y + 10 = 0.$$

$$13. x^2 - 6x - 2y + 9 = 0, \quad 3x - y - 9 = 0,$$

$$14. x^2 - 2x - 4y + 5 = 0,$$

$$15. x^2 - 6x - 3y + 12 = 0,$$

$$16. x^2 - 2x + y - 9 = 0,$$

$$17. x^2 - 3x - y + 4 = 0,$$

$$18. x^2 - 2x + y + 1 = 0,$$

$$19. x^2 - 8x - 2y + 18 = 0,$$

$$20. x^2 - 4x - 4y + 8 = 0,$$

$$21. x^2 - 8x - 2y + 14 = 0,$$

$$x - 2y + 13 = 0.$$

$$2x - y - 5 = 0.$$

$$x + y - 5 = 0.$$

$$5x + y - 7 = 0.$$

$$x - y - 3 = 0.$$

$$x - y + 9 = 0.$$

$$x - 2y + 12 = 0.$$

$$x - y + 7 = 0.$$

ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Тема 1. Числові ряди. Ознаки порівняння, Даламбера, Коші, інтегральна ознака Коші-Маклорена. Ряди з членами різних знаків.

Поняття числового ряду та його суми. Збіжні числові ряди та їх властивості. Необхідна умова збіжності числового ряду. Ряди з додатними членами. Ознака порівняння, Даламбера, Коші, інтегральна ознака Коші, ознака порівняння в граничній формі.

Тема 2. Абсолютна та умовна збіжність. Ряди, члени яких чергуються. Теорема Лейбніца.

Поняття знакозмінного ряду. Абсолютна та умовна збіжність. Ознаки збіжності знакозмінних рядів. Властивості абсолютно та умовно збіжних рядів. Теорема Лейбніца.

Тема 3. Функціональні ряди. Радіус та область збіжності.

Основні поняття. Радіус та інтервал збіжності. Ряди Тейлора й Маклорена. Ряди Фур'є.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ:

1. Розкрийте зміст поняття «числовий ряд».
2. За яких умов ряд називають збіжним; розбіжним?
3. Наведіть приклади збіжних та розбіжних рядів.
4. Охарактеризуйте властивості числових рядів.
5. У чому полягає необхідна ознака збіжності числового ряду? Як її, зазвичай, застосовують?
6. Що означає поняття «знакододатні ряди»?
7. Які достатні ознаки збіжності знакододатних рядів вам відомі?
8. У чому полягає сутність ознаки порівняння? Які різновиди ознаки порівняння ви знаєте?
9. Наведіть ознаку Даламбера, радикальну ознаку Коші, інтегральну ознаку Коші.
10. Наведіть приклади загальних членів ряду до кожної достатньої ознаки.
11. Що означає поняття «знакозмінний ряд»?
12. Розкрийте зміст ознаки Лейбніца.
13. Наведіть визначення абсолютної й умовної збіжності рядів.
14. Наведіть приклади абсолютно збіжних рядів.
15. Наведіть приклади умовно збіжних рядів.
16. Визначте поняття «функціональний ряд», «степеневий ряд».
17. Розкрийте зміст теореми Абеля.
18. Що таке «інтервал» й «область збіжності степеневого ряду»?
19. Які формули для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду вам відомі?
20. Як дослідити степеневий ряд на межі області збіжності?

21. Якими є особливості розкладу в ряд Маклорена основних елементарних функцій?

22. У чому полягає сутність необхідної та достатньої умови розвинення функції в ряд Тейлора?

23. Що називають рядом Фур'є?

24. Який вигляд мають коефіцієнти Фур'є?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1.1. Довести збіжність числового ряду та знайти його суму

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+4)}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{21^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+3)}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

1.2. Дослідити збіжність числових рядів:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + 2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 4}{5n^4 + 3n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{5n+7}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{2+5n} \right)^n$

$$\begin{array}{l}
2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n^3+4}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^2+2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(2n+1)!}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+4}{3+2n^2} \right)^{n^3} \\
3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n^2+5n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+4}{3n+7}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+2)!}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{3+8n} \right)^n \\
4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^{n^2}+3}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{2n^3+3}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+4}{2n+5} \right)^{n^2} \\
5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n+2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{2n+4}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{2n+5}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{7^n}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{7+n} \right)^n \\
6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{7^n+3}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n^3+4}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+4}{2n^2+7}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+2)!}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+2}{n^2+5} \right)^{n^2} \\
7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ln(n+2)}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4+5}{n^6+4n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+4}{5n+7}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{3^n}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right)^n \\
8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{n^3}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n+5}}{2n+4}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+7}{2n^2+7}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{2n+2}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{3+4n} \right)^n \\
9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^{n^2}+4}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{4n^3+5}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{4n+2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{4^{n+2}}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{n^2} \\
10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{7^n+2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{5n^2+5}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+7}{4n^3+1}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n+5}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+2}{n+4} \right)^{n^3}
\end{array}$$

1.3. Дослідити на збіжність ряди:

а) гранична ознака порівняння;

б) ознака д'Аламбера;

в) радикальна ознака Коші;

г) інтегральна ознака Коші.

$$1. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n+8}; \quad \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n \cdot (n+4)}; \quad \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n}{2n^2+6} \right)^n; \quad \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n}{n^2+8}.$$

$$\begin{array}{l}
2. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{7n^3-1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n}{(n+9)!}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n+7}{3n+2}\right)^n; \quad \text{Г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}. \\
3. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+9}{8n^2-1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2) \cdot 5^n}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3+7}{n^3+n}\right)^n; \quad \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n}. \\
4. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{9n^2+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot (n+1)!}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{4n+3}\right)^n; \quad \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n^2+16}. \\
5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{3n^4-1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot 6^n}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{5}{\pi n}; \quad \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4}. \\
6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{4n^5-3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n}{(n+1) \cdot 5^n}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{7n+8}\right)^n; \quad \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+5}. \\
7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n^2+3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n \cdot 7^n}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n^2+1}{2n^2-1}\right)^n; \quad \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^2+9}. \\
8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{9n^4+3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(2n+5) \cdot 3^n}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^3+4}\right)^n; \quad \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}. \\
9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{7n^3-1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(4n-1)!}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+3}{n^4+1}\right)^n; \quad \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3 n}. \\
10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{n^2+4}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n \cdot 6^n}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^3+7}\right)^n; \quad \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{3n-1}. \\
11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{n^3+9}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{n \cdot 7^n}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3}{2n^4-1}\right)^n; \quad \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n-8}. \\
12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{4n^4-1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+1}{(3n-1) \cdot 4^n}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{6n^2+4}\right)^n; \quad \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n^2+4}. \\
13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+2}{3n^3+3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n+1) \cdot 2^n}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^4+1}\right)^n; \quad \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2+3}. \\
14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+6}{7n^2+8}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n \cdot 8^n}; \quad \text{B) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5n^2+9}\right)^n; \quad \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n^3+4}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
15. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6n^2 + 8}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot (n+3)}{n+2}; & \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+3}{n+2}\right)^n; & \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{n^2+9}. \\
16. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{n^3+9}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{(4n-3)!}; & \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3+8}{n^4+3}\right)^n; & \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n+8}. \\
17. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+8n}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n \cdot 5^n}; & \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^4+8}{5n+1}\right)^n; & \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3n+7}. \\
18. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+7}{2n^2+n}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(5n+1)! \cdot 2^n}; & \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n}{6n+1}\right)^n; & \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2+25}. \\
19. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n+1}{7n^3+4}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{6^n \cdot (n+2)}; & \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n+9}{2n-1}\right)^n; & \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{9n^2+6}. \\
20. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+6}{10n^2-1}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 7^n}{3n+4}; & \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n^2+1}{3n^2+1}\right)^n; & \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n}{n^2+9}.
\end{array}$$

1.4. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність знакопозначені ряди:

$$\begin{array}{ll}
1. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n+1}}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)}{3^{n+1}}. \\
2. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2+2}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{(3n+1)(n+4)}. \\
3. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(4\sin\frac{3\pi}{2}\right)^n}. \\
4. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (5n+1)}{8n+3}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n n}{n^3+n+1}. \\
5. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^3+7}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{2n+3}. \\
6. \text{ a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+3)(n+5)}; & \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n \cdot (\lg 0.1)^n}{7n-5}.
\end{array}$$

$$7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)(n+6)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n \cdot (e^{\ln 2} - 3)^n}{7n - 2}.$$

$$8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+4)(n+5)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}\right)^n}{3n + 5}.$$

$$9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{(n+9)^n}.$$

$$10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+6)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n \cdot \left(\ln \frac{1}{e}\right)^n}{9n + 3}.$$

$$11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n^3 + 8};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arcsin(-1))^n}{n}.$$

$$12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{7n^4 + 1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(5 \sin \frac{3\pi}{2}\right)^n}.$$

$$13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)(n+4)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n \cdot \left(\lg \frac{1}{10}\right)^n}{3n + 2}.$$

$$14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n + 1};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)}{5^n}.$$

$$15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 2n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{(n+2)^n}.$$

$$16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{\pi^n (2n+1)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{3^{n+2}}.$$

$$17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (4n-1)}{3n^2 + 2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{(3n+1)(n+4)}.$$

$$18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (4n - 1)}{\pi^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(4 \sin \frac{3\pi}{2}\right)^n}.$$

$$19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n - 1) \cdot 8^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n n}{n^3 + n + 1}.$$

$$20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (4n + 6)}{8^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{2n + 3}.$$

1.5. Знайти область збіжності степеневого ряду:

$$1. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n + 2)(n + 4)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 3)^n}{5^n}.$$

$$2. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n + 1)^3};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 1)^n}{n \cdot 2^n}.$$

$$3. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{6n - 2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 7)^n}{n^3}.$$

$$4. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 4)^n}{2n - 1}.$$

$$5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n + 1)(n + 2)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \cdot (x - 4)^n.$$

$$6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 6^n \cdot x^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 9)^n}{3n - 1}.$$

$$7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n + 3)^2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 4)^n}{n + 7}.$$

$$8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 3)^n}{\sqrt{n}}.$$

$$9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 9^n \cdot (x+1)^n.$$

$$10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 9^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot (x+1)^n.$$

$$11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)^2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{4^n}.$$

$$12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4n-2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (x+2)^n}{8^n}.$$

$$13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+4)(n+5)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n+2}.$$

$$14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} 6^n \cdot x^n;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^2+4}.$$

$$15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)(n+6)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{5n-1}.$$

$$16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+4)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

$$17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2+3n^2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{8^n}.$$

$$18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+5)^2};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+10)^n}{n+3}.$$

$$19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 8^n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+9)^n}{6n+1}.$$

$$20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)(n+5)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{9n^2+3}.$$

1.6. Обчислити суму ряду із заданою похибкою α :

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n-1}}{(n+1)!}, \alpha = 0,01.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n!}, \alpha = 0,01.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n+1)}{(2n+1)!}, \alpha = 0,01.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot (2n)!}, \alpha = 0,001.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}, \alpha = 0,01.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)}{(2n-1)!}, \alpha = 0,001.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1) \cdot n!}, \alpha = 0,001.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{n \cdot 6^{n+1}}, \alpha = 0,0001.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+3)}{n \cdot 2^{n+3}}, \alpha = 0,01.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{n \cdot 3^n}, \alpha = 0,01.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n^n}, \alpha = 0,01.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{(n+1) \cdot 2^n}, \alpha = 0,01.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \cdot 5^{n-1}}, \alpha = 0,01.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3(n+2)}, \alpha = 0,001.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+4)}, \alpha = 0,01.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n-1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)^2}, \alpha = 0,001.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}, \alpha = 0,01.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{4^n}, \alpha = 0,1.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{(1+n^2)^3}, \alpha = 0,001.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n \cdot n!}, \alpha = 0,001.$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Тема 4. Диференціальні рівняння першого порядку

Поняття диференціального рівняння та його розв'язку. Класифікація диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку, що інтегруються у квадратурах: диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними, диференціальні рівняння першого порядку, що зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними: однорідні, узагальнено однорідні. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння 1-го порядку, що зводяться до лінійних. Диференціальні рівняння в повних

диференціалах. Інтегруючий множник. Задача Коші для диференціального рівняння 1-го порядку і теорема про існування і єдиність її розв'язку.

Тема 5. Диференціальні рівняння другого порядку.

Поняття диференціального рівняння другого порядку та його часткового і загального розв'язків. Задача Коші для диференціального рівняння 2-го порядку і теорема про існування і єдиність її розв'язку. Диференціальні рівняння 2-го порядку, що допускають пониження порядку.

Тема 6. Системи лінійних диференціальних рівнянь.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ:

1. Означення диференціального рівняння n -го порядку.
2. Означення диференціального рівняння першого порядку.
3. Поняття загального та частинного розв'язків диференціального рівняння.
4. Задача Коші для диференціального рівняння 1-го порядку, теорема про існування і єдиність її розв'язку.
5. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими змінними та з відокремлюваними змінними.
6. Дати означення і описати інтегрування однорідного рівняння першого порядку.
7. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
8. Яке рівняння називається характеристичним? Як його знаходять?
9. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні, рівні, комплексні?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1.1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

1. а) $2x^2ydy = (3 + y^2)dx$; б) $xy' + y = x + 1$;
в) $y'' - y' = 6x^2 + 3x$.
2. а) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$; б) $y'(1 + x^2) - 2xy = (1 + x^2)^2$;
в) $y'' + 3y' + 2y = 4x - 2$.
3. а) $y(2 + e^x)dy = e^x dx$; б) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$;
в) $y'' - 6y' + 10y = 3e^{-x}$.
4. а) $y \sin x dx + (\cos x - 1)dy = 0$; б) $xy' - 3y = x^4e^x$;
в) $y'' + 4y' = 8e^{-4x}$.
5. а) $dy - 3xdy - \sqrt{y}dx = 0$; б) $y' + y \cos x = \cos x$;

- в) $y'' + 8y' + 20y = 3x + 1$.
6. а) $y(1 + e^x)dy = e^x dx$; б) $y' - \frac{1}{x}y = x \ln x$;
 в) $y'' + 7y' + 10y = 5e^x$.
7. а) $y' \cos x = y \ln y$; б) $y' - \frac{1}{x}y = e^{x^3} x^3$;
 в) $y'' + 3y' + 2y = 3 \cos x$.
8. а) $(x + 1)y' - x = 0$; б) $xy' - 2y = x + 1$;
 в) $y'' + 3y' + 2y = 12x^3 - 39$.
9. а) $(1 + x^2)dy + xydx = 0$; б) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$;
 в) $y'' - 2y' + 5y = 3x + 1$.
10. а) $y' - \frac{4xy}{x^2 - 1} = 0$ б) $y' - y \operatorname{tg} x = \sin 2x$.
 в) $y'' - 6y' + 10y = 5e^{-x}$.
11. а) $y' = \frac{2x - 4}{3y + 5}$; б) $(x + 1)y' - 2y = (x + 1)^4$;
 в) $y'' - 6y' + 9y = 5e^{3x}$.
12. а) $2x dx - 2y dy = x^2 y dy - 2xy^2 dx$; б) $y' = 2x(y + x^2)$;
 в) $y'' + 7y' + 10y = 5e^x$.
13. а) $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$; б) $y' - \frac{y}{x} = x^2$;
 в) $y'' + 3y' + 2y = 1 - x^2$.
14. а) $\sqrt{3 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy$; б) $y' = (x - 4)y + 2 \operatorname{ctg} x$;
 в) $y'' + 3y' + 2y = 2x + 1$.
15. а) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x} dx = 0$; б) $y' = \frac{y}{x - 4} + (x - 4)^2$;
 в) $y'' + 8y' + 20y = 3x + 1$.
16. а) $(1 + e^x)y' = ye^x$; б) $xy' - y = -x$;
 в) $y'' + 3y' + 2y = 12x^3 - 39$.
17. а) $\sqrt{4 - x^2}y' + xy^2 + x = 0$; б) $y' + 3x^2y = \sqrt{x}$;
 в) $y'' - 2y' + 5y = 3x + 1$.
18. а) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x} dx = 0$; б) $y' = \frac{y}{x - 4} + (x - 4)^2$;
 в) $y'' + 8y' + 20y = 3x + 1$.

$$19. \text{ a) } 6x dx - y dy = yx^2 dy - 3xy^2 dx;$$

$$\text{ b) } y'' - 6y' + 10y = 3e^{-x}.$$

$$\text{ б) } y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x};$$

$$20. \text{ a) } x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0;$$

$$\text{ b) } 2y'' + 3y' = 6x^2 + 2x + 1$$

$$\text{ б) } y' + \frac{4y}{x+1} = x - 1;$$

1.2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 2x \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3y + x \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7x \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x - y + e^t \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3y + x \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y + 8x \\ \frac{dy}{dt} = 12x + 16y \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -15y + 5x \\ \frac{dy}{dt} = 15x + 5y \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2y + x \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 12x + e^{-2t} \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 10y + e^t \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + e^t + e^{-t} \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \\ \frac{dy}{dt} - x + y = 0 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 2y \end{cases}$$

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Лінійна алгебра

Дії над матрицями:

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix};$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix};$$

Добутком $A \cdot B$ матриці $A = (a_{ij})$ порядку $m \times n$ на матрицю $B = (b_{ij})$ порядку $n \times k$ називається матриця $C = (c_{ij})$ порядку $m \times k$ елемент якої c_{ij} дорівнює сумі відповідних добутків i -го рядка матриці A та j -го стовпця матриці B :

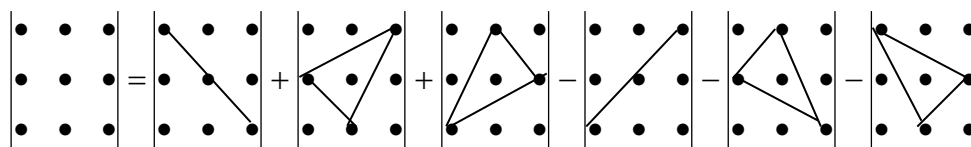
$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k}$$

Обчислення визначника 2-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Обчислення визначника 3-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$



Алгебраїчне доповнення:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Обернена матриця:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Формули Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, i = \overline{1, n}$$

де Δ – визначник основної матриці; Δx_i – визначник, утворений із детермінанта Δ заміною i -го стовпця стовпцем вільних членів b_i системи.

Матричний спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Векторна алгебра

Координати вектора:

$$A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), \overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Довжина вектора: $|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$

Кут між векторами: $\overline{A_1A_2} = (x_1, y_1, z_1), \overline{A_1A_3} = (x_2, y_2, z_2),$

$$\cos \left(\overline{A_1A_2} \wedge \overline{A_1A_3} \right) = \cos \alpha = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3}}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_3}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Множення вектора на число: $\overline{a} = (x, y, z), c \cdot \overline{a} = (cx, cy, cz).$

Додавання двох векторів:

$$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Віднімання двох векторів:

$$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Виразення скалярного добутку через координати співмножників:

$$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Виразення векторного добутку через координати співмножників:

$$\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}, \overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}, [\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Застосування векторного добутку: $|\overline{[AB, AC]}|$ – це площа паралелограма $ABCD$, побудованого на векторах \overline{AB} і \overline{AC} , тобто

$$S = |\overline{[AB, AC]}|.$$

Тоді

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{[AB, AC]}|.$$

Аналітична геометрія на площині

Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Параметричне рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \end{cases}$$

Рівняння пучка прямих:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b$$

Рівняння прямої у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Аналітична геометрія в просторі

Загальне рівняння прямої: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Канонічні рівняння прямої: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, $\vec{s}(m, n, p)$ – напрямний

вектор, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка в просторі.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Кут між двома прямими, що задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2},$$

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Умова перпендикулярності прямих: $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Умова паралельності прямих: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Рівняння площини, яка проходить через три точки $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Комплексні числа

Комплексним числом називається число виду $z = a + bi$, де a, b – дійсні числа, $i^2 = -1$. Число a називається *дійсною частиною*, bi – *уявною частиною*, i – *уявною одиницею*. Множина комплексних чисел позначається C .

Дійсну і уявну частини комплексного числа $z = a + bi$ позначають $Re z$ і $Im z$ відповідно:

$$a = Re z, \quad b = Im z.$$

Комплексні числа виду $a + bi$ і $a - bi$ називаються *спряженими*. Комплексні числа виду $a + bi$ і $-a - bi$ називаються *протилежними*. Спряжене до комплексного числа z позначається \bar{z}

Два комплексних числа $a + bi$ і $a_1 + b_1i$ вважаються *рівними* в тому і тільки в тому випадку, якщо $a = a_1$ і $b = b_1$.

Додавання: $(a + bi) + (a_1 + b_1i) = (a + a_1) + (b + b_1)i$.

Віднімання: $(a + bi) - (a_1 + b_1i) = (a - a_1) + (b - b_1)i$.

Множення:

$$(a + bi)(a_1 + b_1i) = aa_1 + ab_1i + a_1bi + bb_1i^2 = (aa_1 - bb_1) + (ab_1 + a_1b)i$$

Ділення:

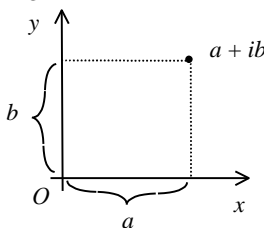
$$\begin{aligned} \frac{a + bi}{a_1 + b_1i} &= \frac{(a + bi)(a_1 - b_1i)}{(a_1 + b_1i)(a_1 - b_1i)} = \frac{aa_1 + bb_1 + (a_1b - ab_1)i}{a_1^2 - (b_1i)^2} \\ &= \frac{aa_1 + bb_1}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2 + b_1^2}i. \end{aligned}$$

Множення на дійсне число: $C(a + bi) = Ca + Cbi$.

Будь-яке комплексне число $a + bi$ можна зобразити геометрично.

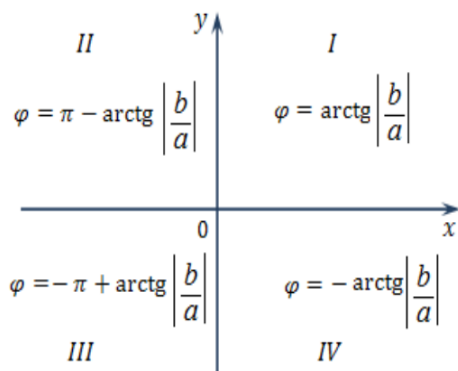
Візьмемо в площині прямокутну систему координат i , вибравши одиницю довжини, зображатимемо дійсні числа на осі абсцис, а уявні – на осі ординат. Відповідно до цього вісь абсцис називається *дійсною віссю*, а вісь ординат – *уявною*.

Число $a + bi$ зображатимемо точкою площини, абсциса якої чисельно дорівнює a , а ордината дорівнює b



Зображення комплексних чисел за допомогою точок на площині дає змогу подати число $a + bi$ в іншому вигляді, а саме — у *тригонометричній формі*:

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Визначення чверті, в якій знаходиться аргумент.

I чверть: $a > 0; b > 0$.

III чверть: $a < 0; b < 0$.

II чверть: $a < 0; b > 0$.

IV чверть: $a > 0; b < 0$.

Якщо брати абсолютне значення (по модулю)

$$\operatorname{arctg} |b/a| > 0$$

Величина аргументів на осях

Коли $a = 0$ та $b > 0$, аргумент $\varphi = \pi/2$ або $\varphi = \pi/2 + 2\pi k$;

Коли $a = 0$ та $b < 0$, аргумент $\varphi = -\pi/2$ або $\varphi = -\pi/2 + 2\pi k$;

Коли $b = 0$ та $a > 0$, аргумент $\varphi = 0$ або $\varphi = 2\pi k$;

Коли $b = 0$ та $a < 0$, аргумент $\varphi = \pm\pi$ або $\varphi = \pi + 2\pi k = \pi(2k+1)$.

Дії над комплексними числами, заданими у тригонометричній формі:

Множення: $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Ділення:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Піднесення до n -го степеня, де n – ціле число (формула Муавра):

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n \varphi + i \sin n \varphi), n \in \mathbb{Z}.$$

Коренем n -го степеня з комплексного числа z називається таке комплексне число w , n -й степінь якого дорівнює z : $w^n = z$.

$$w = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \text{ де } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Показникова форма комплексного числа $z = r e^{i\varphi}$.

Формула Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Показникова форма запису комплексного числа:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}, \text{ де } \varphi - \text{аргумент, } r - \text{модуль.}$$

Дії над комплексними числами, заданими у показниковій формі:

$$\text{Множення: } r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Ділення:

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Піднесення до степеня: $(r e^{i\varphi})^n = r^n \cdot r e^{in\varphi}$.

Добування кореня цілого додатного степеня:

$$\sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \text{ де } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Диференціальне числення
Таблиця похідних

1. $(const)' = 0.$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}.$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(e^x)' = e^x.$
6. $(a^x)' = a^x \ln a.$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$
8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$
9. $(\sin x)' = \cos x.$
10. $(\cos x)' = -\sin x.$
11. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$
16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

Якщо $u(x)$ та $v(x)$ – диференційовані функції, то

1. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$
2. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
3. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
4. $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

Похідна складної функції

Похідна складної функції $y = f(u(x))$ дорівнює добутку похідної цієї функції за проміжною змінною u на похідну проміжної змінної u за змінною x . Тобто,

$$y' = f'(u) \cdot u'(x)$$

Інтегральне числення
Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int 1 \cdot dx = x + C$	10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
2. $\int 0 \cdot dx = C$	11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
3. $\int x^\alpha \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$)	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$	13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
5. $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
6. $\int e^x \cdot dx = e^x + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$
7. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
8. $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	17. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} + a^2 \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right \right) + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	18. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} \right) + C$

Властивості: $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$.

- 1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$;
- 2) $d \int f(x)dx = f(x)dx$;
- 3) $\int dF(x) = F(x) + c$;
- 4) $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$;
- 5) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Формула інтегрування частинами: $\int u dv = uv - \int v du$.

Формула Ньютона-Лейбніца для обчислення визначених інтегралів:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ряди. Дослідження їх на збіжність

Числовим рядом (або просто **рядом**) називають вираз

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (1)$$

Необхідна ознака збіжності. Якщо ряд (1) збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Наслідок (достатня ознака розбіжності ряду). Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0,$$

або ця границя не існує, то ряд (1) розбігається.

Узагальнено-гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

збігається за умови $\alpha > 1$ і розбігається, якщо $\alpha < 1$; при $\alpha = 1$ отримується гармонічний (гармонійний) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

який є розбіжний.

Перша ознака порівняння

Розглянемо два ряди з невід'ємними членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2)$$

та

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (3)$$

Якщо для усіх n , починаючи з деякого номера n_0 , виконується нерівність $a_n \leq b_n$, то зі збіжності ряду (3) випливає збіжність ряду (2), а з розбіжності ряду (2) випливає розбіжність ряду (3).

Друга ознака порівняння (гранична)

Розглянемо ряди (2), (3) і припустимо, що $b_n > 0$, $n \geq n_0$. Якщо виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k,$$

де $0 < k < \infty$, то ряди (2) і (3) одночасно збіжні або розбіжні.

Ознака д'Аламбера

Якщо для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

де $a_n > 0$, існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

то при $l < 1$ даний ряд збіжний, а при $l > 1$ – розбіжний. Якщо ж $l = 1$, то потрібно застосувати іншу ознаку.

Ознака Коші

Якщо для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

з невід'ємними членами існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

то при $l < 1$ даний ряд збіжний, а при $l > 1$ – розбіжний. Якщо ж $l = 1$, то потрібно застосувати іншу ознаку.

Інтегральна ознака Коші-Маклорена

Нехай для членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

виконуються умови:

- $a_n > 0$;
- $a_1 \geq a_2 \geq \dots$.

Припустимо, що на проміжку $[1; +\infty)$ визначена додатна незростаюча функція $f(x)$ така, що $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$. Тоді невластний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

та ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

збігаються або розбігаються одночасно.

Нехай ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів.

Якщо ряд складений з модулів членів даного ряду, збіжний, то даний ряд також збіжний. Це достатня ознака збіжності знакозмінного ряду.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

називається **абсолютно збіжним**, якщо ряд з модулів збіжний.

У випадку, коли ряд

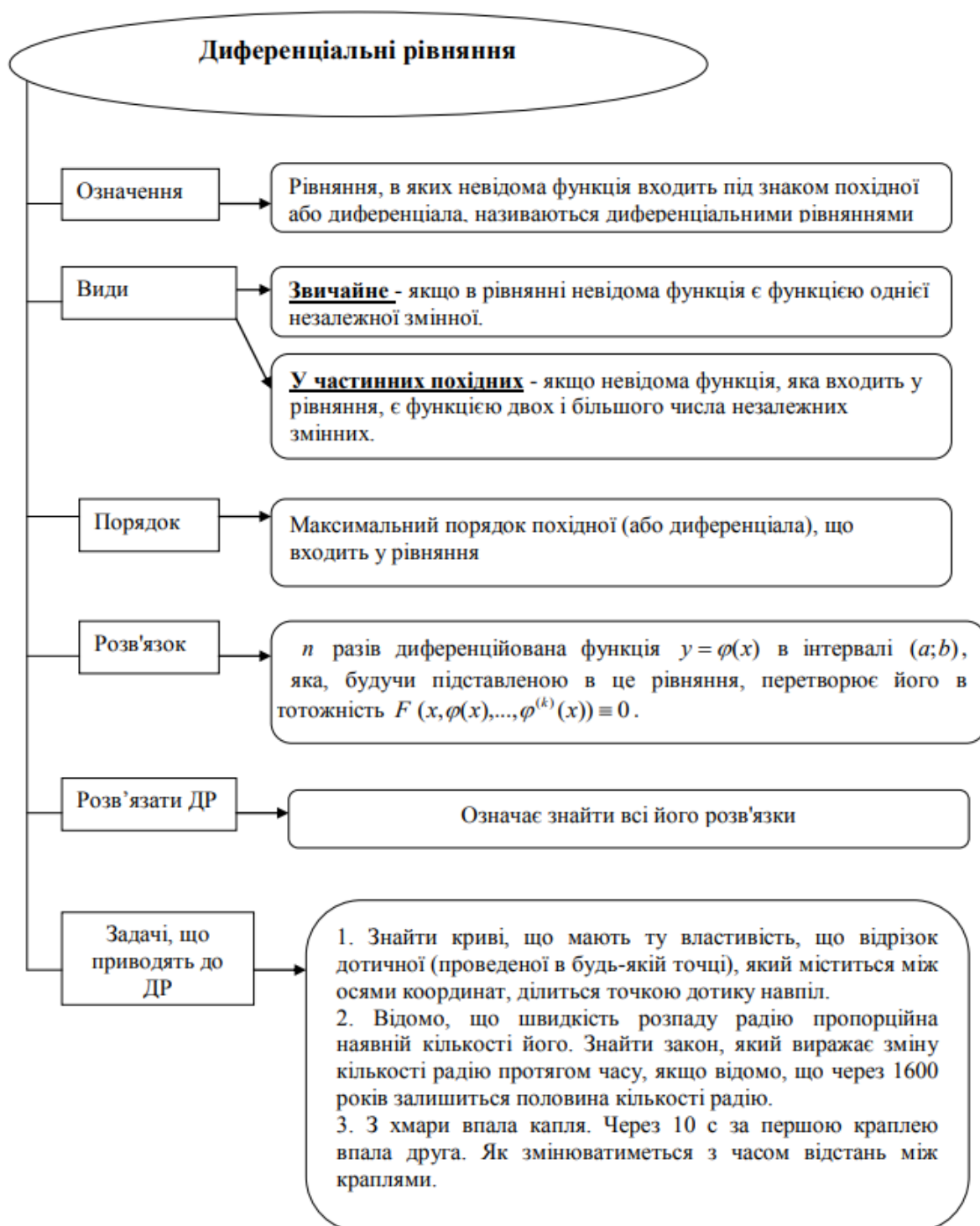
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

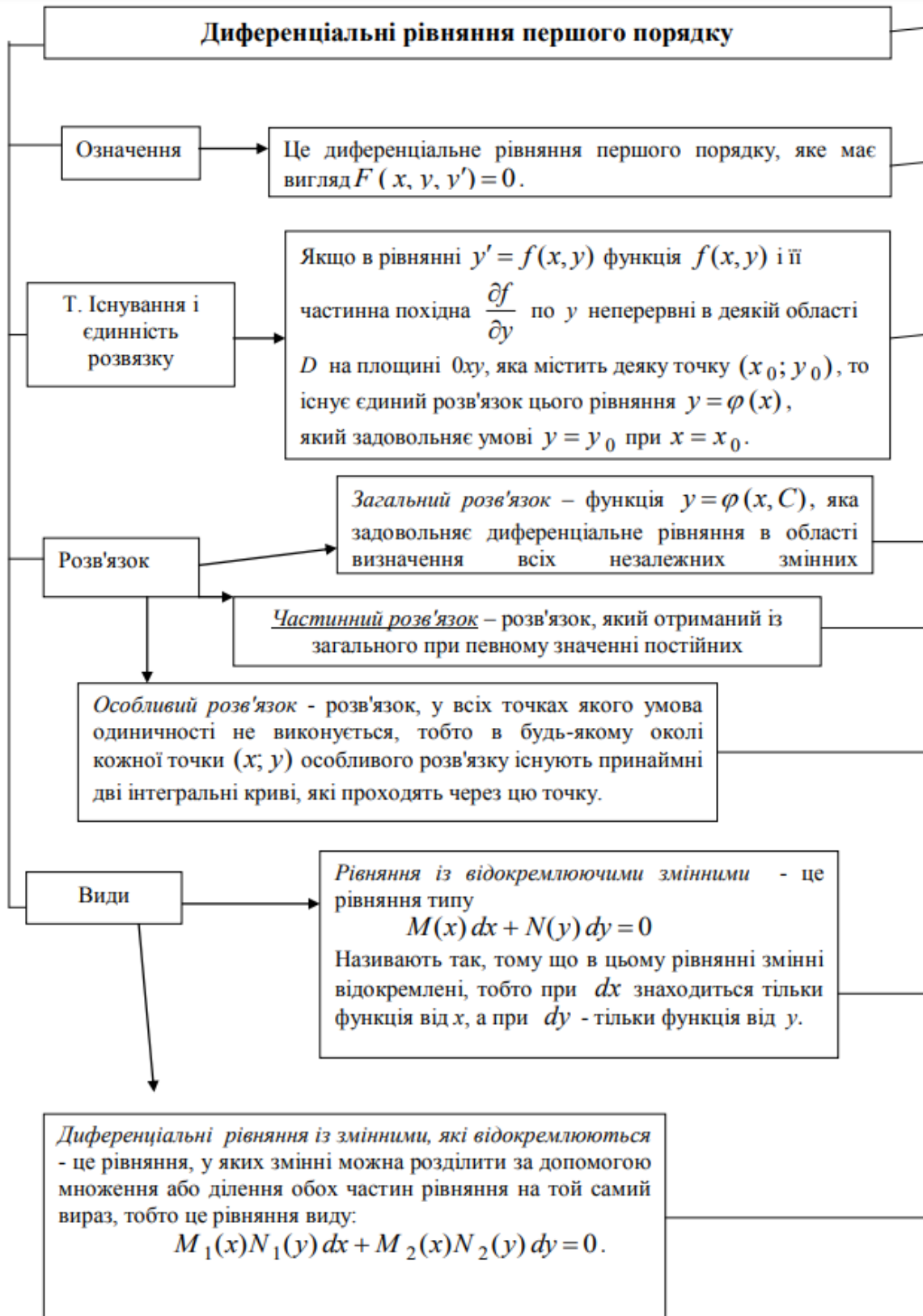
збіжний, а ряд з модулів розбіжний, ряд

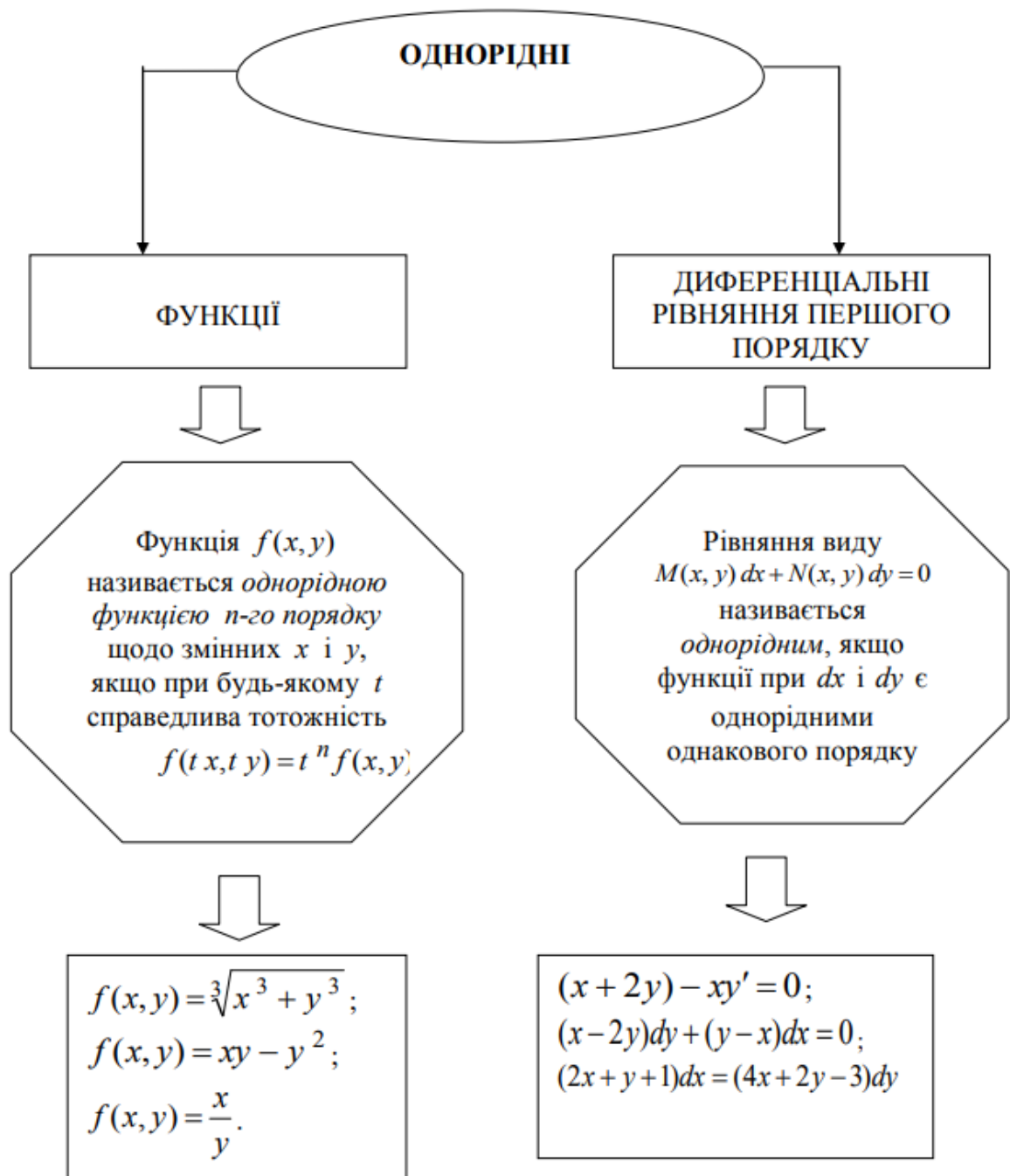
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

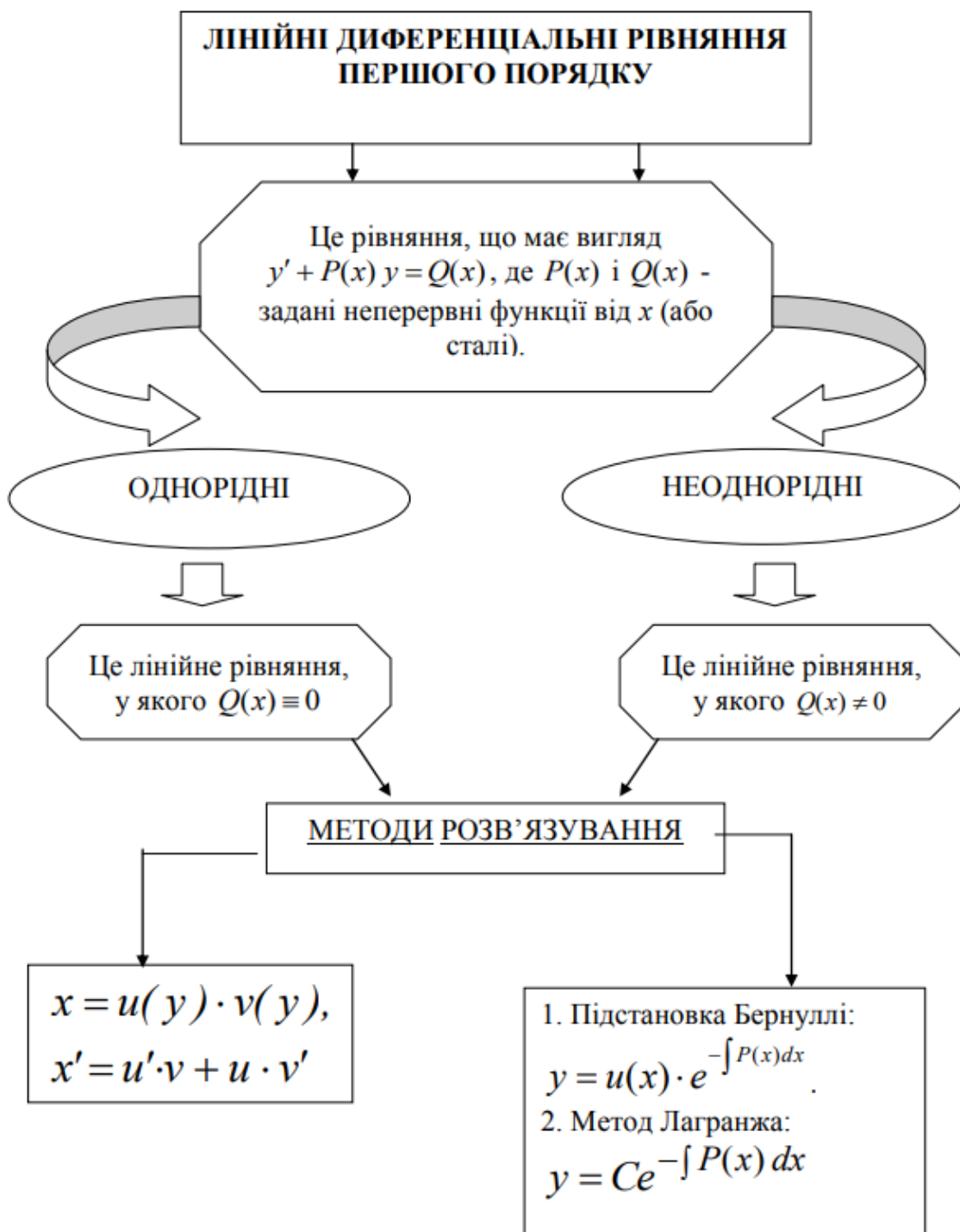
називається **умовно збіжним**.

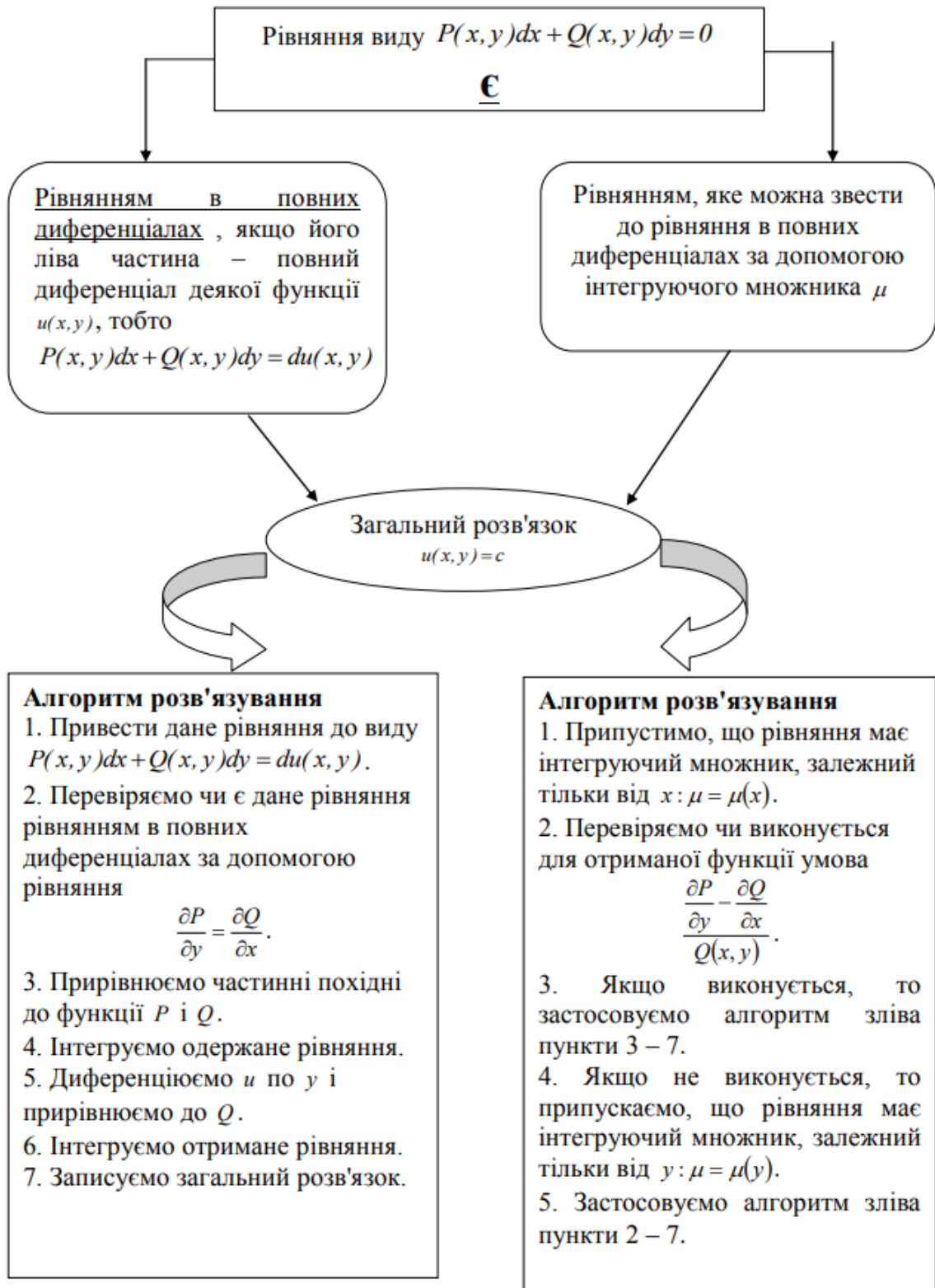
Диференціальні рівняння











РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Дьоміна Н., Назарова О. Вища математика. Ч.1. Елементи лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії: навчально-методичний посібник для самостійної роботи. Мелітополь : ФОП Силаєва О. В., 2021. 124 с.
2. Кирилащук С. А., Бондаренко З. В., Клочко В. І. Вища математика. Ч. 1. Індивідуальні завдання : навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2020. 98 с.
3. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах. В-во: Центр навчальної літератури, 2020. 596 с.
4. Лиман Ф., Власенко В., Петренко С. Вища математика : навч. посіб у 2-х частинах. Київ : «Університетська книга», 2018. 614 с.
5. Литвин І. І., Конопчук О. М., Желізняк Г. О. Вища математика. Київ: Вид-во Центр навчальної літератури, 2019. 368 с.
6. Пасічник Я. А. Вища математика : підручник. Острог : Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2021. 432 с.
7. Ройко Л. Л., Мамчич Т. І., Мамчич І. Я. Навчання методам прикладної математики за підтримки програми Р. *Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво*. 2019. №35. С. 37-41
8. Ройко Л. Л., Мамчич Т. І., Мамчич І. Я. Розвиток технологій проведення опитування з математичних дисциплін в контексті дистанційного навчання. *Інформаційні технології в освіті, науці і техніці* : тези доп. V міжнар. наук.-практ. конф. (м.Черкаси, 21-23 травня 2020 р. (ІТОНТ-2020)). Черкаси, 2020. С. 163–164 ISBN 978-966-9730-55-8 7.
9. Ройко Л. Л., Мамчич Т. І., Миронюк Л. П., Микитюк І. О. Особливості викладання математичних дисциплін засобами дистанційного навчання. *Математика. Інформаційні технології. Освіта* : тези доп. ІХ міжн. наук.-практ. конф. (м. Луцьк, 1-3 червн. 2020 р.). Луцьк, 2020. С. 78–82.
10. Ройко Л. Л., Миронюк Л. П. Wolfram|alpha як засіб оптимізації процесу навчання курсу «Вища математика». *Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво*. 2020. №40. С.58-64.
11. Ройко Л. Л., Миронюк Л. П. Вища математика: Елементи теорії рядів: методичні рекомендації до самостійної та індивідуальної робіт. Луцьк: ПП Іванюк, 2021. 52 с.
12. Ройко Л. Л., Миронюк Л. П. Досвід використання інформаційно-комунікаційних технологій при викладанні математичних дисциплін в умовах дистанційного навчання. *Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво*. 2020. №39. С. 70-77
13. Ройко Л. Л. Вища математика: методичні рекомендації до модульних контрольних робіт. Луцьк: ПП Іванюк, 2021. 76 с.
14. Турчанінова Л. І., Доля О. В. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. Київ : Вид-во «Ліра-К», 2018. 348 с.
15. Хом'юк І. В., Хом'юк В. В. Вища математика. Ч. 3. Функції багатьох змінних : практикум Вінниця : ВНТУ, 2020. 70 с.

16. Рибалко А. П., Степанова К. В. Вища математика [Електронний ресурс]: методичні рекомендації до самостійної роботи за темою «Ряди» для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня. Харків : ХНЕУ імені С. Кузнеця, 2019. 64 с. URL:

<http://repository.hneu.edu.ua/bitstream/123456789/22151/1/2019-Рибалко%20А%20П%20Степанова%20К%20В.pdf>

17. Солдатенко С. С. Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів з дисципліни «Вища математика» з теми «Комплексні числа» для студентів технічних спеціальностей. Харків.: ХМК, 2017. 35с. URL:

https://learn.zhatk.zt.ua/pluginfile.php/8499/mod_resource/content/1/Вища%20математика.%20Комплексні%20числа%20.pdf

