

Волинський національний університет імені Лесі Українки
Факультет інформаційних технологій і математики
Кафедра загальної математики та методики навчання інформатики

Вікторія ПАСТЕРНАК

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ»

для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика)
першого (бакалаврського) рівня

Луцьк 2023

УДК 519.61(07)

П 19

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Волинського національного університету імені Лесі Українки (протокол № 8 від 26 квітня 2023 року)

Рецензенти:

О.В. Гуда, кандидат технічних наук, доцент кафедри фізики та вищої математики Луцького національного технічного університету;

О.В. Федунік-Яремчук, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математичного аналізу та статистики Волинського національного університету імені Лесі Українки.

Укладач: В.В. Пастернак

П 19 Конспект лекцій з дисципліни «Обчислювальні методи»: методичні вказівки / Вікторія Валентинівна Пастернак. Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2023. 95 с.

Анотація: Методичне видання складене відповідно до діючої програми курсу «Обчислювальні методи» з метою подання основних теоретичних положень та практичних навичок. У конспекті лекцій викладені основні базові поняття, що стосуються обчислювальних (чисельних) методів, обчислювального експерименту, розв'язку нелінійних рівнянь та систем лінійних та нелінійних алгебраїчних рівнянь, інтерполяція та апроксимація табличних залежностей та функцій. А також, чисельного інтегрування функцій. Слід відмітити, що подані основи теоретичного матеріалу з курсу, а також приклади розв'язку задач та практичних розрахунків для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (Інформатика).

УДК 519.61(07)

© Пастернак В.В., 2023

© Волинський національний університет імені Лесі Українки, 2023

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. Лекція 1. Основні поняття про обчислювальні методи.....	8
1.1. Етапи розв'язування задач обчислювальними методами	8
1.2. Оцінка похибки результату при розв'язуванні задач обчислювальними методами.....	17
1.3. Похибка вихідних даних.....	18
2. Лекція 2. Ітераційні методи. Метод Ньютона для розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь.....	20
2.1. Ітераційний метод Ньютона	20
2.2. Послідовність основних дій при розв'язуванні рівняння методом Ньютона .	23
2.3. Інтерполяційний багаточлен Ньютона.....	24
3. Лекція 3. Метод Гауса для розв'язування СЛАР	26
3.1. Точні і наближені методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).....	26
3.2. Розв'язування СЛАР за методом Гауса (метод послідовного виключення невідомих)	26
3.3. Метод Гауса з вибором головного елемента	30
3.4. Приклад розв'язування СЛАР методом Гауса	32
4. Лекція 4. Метод подвійної факторизації для розв'язування СЛАР	35
4.1. Основні етапи методу подвійної факторизації.....	35
4.2. Приклад розв'язування СЛАР методом подвійної факторизації	38
5. Лекція 5. Методи простої ітерації і Зейделя для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).....	42
5.1. Основні властивості методів простої ітерації і методів Зейделя	42
5.2. Основна послідовність дій при розв'язування СЛАР методом Зейделя	43
5.3. Приклад розв'язування СЛАР методом Зейделя	45
6. Лекція 6. Метод Ньютона-Рафсона для розв'язування СЛАР	47
6.1. Основні закономірності методів Ньютона-Рафсона.....	47
6.2. Послідовність дій при розв'язуванні СЛАР методом Ньютона-Рафсона	48
6.3. Приклад розв'язування СЛАР методом Ньютона-Рафсона.....	50
7. Лекція 7. Інтерполяція функцій	54
7.1. Основні властивості інтерполяційних функцій	54
7.2. Наближення функцій. Інтерполяційний багаточлен Лагранжа.....	56
7.3. Приклад інтерполяції функції поліномом Лагранжа.....	58
8. Лекція 8. Числове інтегрування функцій.....	60
8.1. Основна задача та принцип числового інтегрування	60
8.2. Формула трапецій.....	61
8.3. Приклад обчислення інтегралу за формулою трапецій.....	62
8.4. Основні закономірності методу Сімпсона.....	62
8.5. Приклад обчислення інтегралу за формулою Сімпсона	64

9. Лекція 9. Числове диференціювання функцій.....	65
9.1. Постановка задачі та особливості числового диференціювання функцій ...	65
9.2. Закономірності чисельного диференціювання.....	66
9.3. Приклад обчислення похідних функцій.....	67
10. Лекція 10. Числове розв'язування звичайних диференціальних рівнянь	70
10.1. Розв'язування звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР).....	70
10.2. Метод Ейлера для числового розв'язування ЗДР	71
10.3. Приклад розв'язування диференціального рівняння методом Ейлера	72
10.4. Числове розв'язування ЗДР методом Рунге-Кутта четвертого порядку	73
10.5. Приклад розв'язування диференціального рівняння методом Рунге-Кутта четвертого порядку	74
11. Лекція 11. Визначення екстремумів функцій градієнтним методом	76
11.1. Постановка задачі екстремумів функцій градієнтним методом.....	76
11.2. Градієнтний метод	77
11.3. Загальний алгоритм визначення екстремуму функції градієнтним методом	78
11.4. Приклад визначення екстремумів функції градієнтним методом	79
12. Лекція 12. Знаходження власних значень та власних векторів матриці	82
12.1. Власні значення і власні вектори матриці. Основні визначення.....	82
12.2. Метод А.М. Данілевського. Знаходження власних векторів і власних значень матриць.....	85
12.3. Метод скалярних добутків. Знаходження максимального власного значення симетричної матриці.....	89
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	92

ВСТУП

Суспільство вступило у важливий період свого розвитку – еру інформатизації. Використання електронних обчислювальних машин перейшло у сферу безпосереднього виробництва. Для вирішення теоретичних і практичних задач, що виникають при діяльності людини у різних галузях науки, техніки та виробництва з метою звільнення людини від надмірного інтелектуального навантаження великий ефект дає використання обчислювальної техніки при умові достатнього програмного забезпечення й ефективного його використання. Тому освітня компонента ОК «Обчислювальні методи» у підготовці фахівців високої кваліфікації набуває особливо великого значення.

Мета вивчення дисципліни «Обчислювальні методи»:

- надання основних знань з методів обчислень, а також практичних навичок використання методів та засобів сучасних інформаційних технологій у повсякденній практичній діяльності;
- підготувати студентів до ефективного використання сучасних комп'ютерних технологій при розв'язуванні фахових завдань.

Прослухавши курс ОК «Обчислювальні методи», студент повинен вміти обґрунтувати вибір чисельного методу розв'язування математичної задачі, знати особливості його реалізації на ЕОМ, володіти алгоритмом методу, провести необхідні обчислення і аналіз отриманих результатів, а також мати навички практичного використання програмного забезпечення ЕОМ для розв'язання математичних задач.

В результаті вивчення даного курсу студент повинен

Знати:

- етапи розв'язування задач з використанням ЕОМ;
- суть математичного моделювання; схему обчислювального експерименту;
- основні групи методів, які використовуються для розв'язування математичних задач;
 - вимоги до чисельних методів;
 - джерела похибок, їх класифікацію;
 - означення абсолютної і відносної похибок, правильної, сумнівної, значущої цифр наближеного числа;
 - правила округлення;
 - загальні формули для похибок;
 - правила підрахунку цифр;
 - формули подання і способи округлення чисел в ЕОМ;
 - способи зменшення обчислювальних похибок;

- суть методів, особливості їх машинної реалізації, швидкість і умови збіжності;
- суть методу Жордана-Гауса і його модифікацій, особливості їх машинної реалізації;
- методи простих ітерацій і Зейделя, умови збіжності методів;
- особливості методу квадратного кореня і особливості його реалізації;
- особливості розв'язування систем із погано обумовленими матрицями;
- постановку задачі наближення функцій, суть методів наближення (інтерполювання, середньоквадратичне наближення, рівномірне), як оптимально вибрати вузли інтерполювання, найпростіші інтерполяційні методи для розв'язування рівнянь з одним невідомим, особливості реалізації методів на ЕОМ;
- особливості задач чисельного диференціювання та інтегрування, різні підходи до побудови формул чисельного інтегрування, особливості машинної реалізації диференціювання та інтегрування;
- постановку задачі, класифікацію методів і суть методів Рунге-Кутта та Ейлера;
- геометричну інтерпретацію різновидів методу Ейлера;
- підходи до оцінки точності методів;
- методи розв'язування задач про власні значення;
- метод скінчених різниць;
- особливості розв'язування крайових задач;
- метод скінчених елементів;
- чисельні методи розв'язування інтегральних рівнянь.

Вміти:

- будувати математичні моделі найпростіших об'єктів;
- вивести загальну формулу для обчислення похибок (абсолютної, відносної) функції;
- виконувати дії з наближеними числами;
- оцінювати похибки результатів і обґрунтовувати правила підрахунку цифр;
- виконувати обчислення без точного врахування похибок і розв'язувати пряму і обернену задачі теорії похибок;
- оцінювати похибки округлень при виконанні арифметичних операцій на ЕОМ;
- наводити приклади задач, які чутливі до похибок вхідних даних; наводити приклади стійких і нестійких методів;
- обґрунтовувати збіжність методів, давати їм геометричну інтерпретацію;
- записувати алгоритми і програми, застосовувати їх для знаходження із заданою точністю коренів нелінійних рівнянь;
- розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь методами виключення, обчислювати визначники, ранги матриць, обернені матриці,

підрахувати число арифметичних дій, необхідних для розв'язування системи методами виключення, використовувати бібліотечні програми методів типу Жордана-Гаусса;

- обґрунтовувати методи простих ітерацій і Зейделя для розв'язування систем лінійних рівнянь, записувати відповідні алгоритми і програми методів, обґрунтовувати збіжність, оцінювати похибку наближення до розв'язку;

- розв'язувати системи лінійних рівнянь із симетричними матрицями методом квадратного кореня;

- обґрунтовувати існування і єдиність розв'язку задачі інтерполявання;

- виводити формули інтерполяційних многочленів Лагранжа і Ньютона;

- оцінювати похибку інтерполявання;

- будувати інтерполяційні многочлени і кубічні сплайни;

- обчислювати значення функцій за допомогою інтерполяційних многочленів;

- застосувати інтерполяційні многочлени для обчислення значень функцій і розв'язування рівнянь;

- обґрунтувати умову лінійної і квадратичної інтерполяції;

- знаходити найкращу середньоквадратичну апроксимацію функції, що задана на відрізку;

- здійснювати аналіз методом найменших квадратів наближення таблично заданих функцій;

- будувати емпіричні формули, а також виконувати згладжування таблично заданих функцій;

- будувати формули чисельного диференціювання та інтегрування, давати їм геометричну інтерпретацію, оцінювати похибки, обчислювати похідні й означені інтеграли, записувати відповідні алгоритми і програми, використовувати різноманітні додатки програмування;

- обґрунтовувати методи типу Ейлера, Рунге-Кутта;

- розв'язувати задачу Коші (для одного рівняння і системи першого і вищих порядків) за допомогою формули Тейлора, методами типу Ейлера, Рунге-Кутта;

- розв'язувати задачі на власні значення;

- застосовувати різницьві методи та метод скінчених елементів до розв'язування крайових задач;

- розв'язувати інтегральні рівняння чисельними методами;

- записувати відповідні алгоритми і програми;

- використовувати бібліотечні програми.

Слід відмітити, що освітня компонента «Обчислювальні методи» є логічним продовженням курсів «Математичний аналіз», «Лінійна алгебра» та «Інформатика» і змістовно пов'язана з базовими дисциплінами. Засвоєння студентами основних положень цієї дисципліни має і науково-прикладне значення на початковому етапі навчання і формування професійного фахівця загалом.

Навчальним планом передбачається: вивчення дисципліни на лекційних та лабораторних заняттях, самостійна робота студентів; перевірка основних теоретичних знань та практичних умінь студентів за допомогою тестових завдань та контрольної роботи; складання іспиту (заліку).

Основними труднощами при вивченні даної дисципліни є багатоплановість матеріалу, який розглядається, і його великий об'єм. Тому успішне засвоєння курсу не можливе без регулярної самостійної роботи з літературою і творчого відношення до виконання лабораторних робіт.

Слід також зазначити, що під час викладання дисципліни використовуються комп'ютерні навчальні програми, інтернет-програми та додатки, практичні завдання та вправи. А також, усі лабораторні роботи виконуються на ЕОМ.

ЛЕКЦІЯ №1

Тема: ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

1.1. ЕТАПИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИМИ МЕТОДАМИ

Більшість прикладних задач (інженерних, економічних, біологічних і ін.), результат яких повинен представляти числову інформацію, зводяться до математичних підходів, які розв'язуються різними обчислювальними методами.

Процес розв'язання таких задач можна надати у вигляді наступних етапів:

1. Постановка задачі;
2. Побудова математичної моделі задачі;
3. Вибір обчислювального методу;
4. Вивчення (або складання) алгоритму розв'язання задачі;
5. Реалізація алгоритму за допомогою обчислювальних засобів;
6. Аналіз отриманих результатів.

Постановка задачі припускає словесне формулювання задачі, умов, яким вона повинна задовольняти, і вимог, пропонованих до її розв'язання.

Наприклад:

- a) розв'язати квадратне рівняння;
- b) визначити зміну швидкості при падінні тіла, враховуючи опір середовища;
- c) знайти площу заданої ділянки землі;
- d) вибрати найкращий денний раціон відгодівлі худоби.

У процесі формулювання задачі необхідно відповісти на запитання:

- 1) чи зрозуміла термінологія, використовувана у формулюванні задачі?
- 2) що є вихідними даними для розв'язання задачі?
- 3) що потрібно знайти при розв'язанні задачі?
- 4) як визначити розв'язання?
- 5) яких даних не вистачає і чи всі пропоновані дані потрібні?
- 6) які можна зробити допущення?

Математична модель – це математичний опис співвідношень у постановці задачі.

При побудові моделі потрібно звернути увагу на запитання:

- 1) чи розв'язувалися аналогічні задачі?
- 2) які математичні структури найбільше підходять для розв'язання даної задачі?
- 3) які математичні величини визначають вихідні дані?
- 4) які математичні величини визначають результат?
- 5) які математичні співвідношення існують між об'єктами моделі?
- 6) як працювати з обраною моделлю?

Слід відмітити, що в одних випадках запис математичної моделі не має труднощів, а в інших потрібне уточнення постановки задачі, виділення головних факторів, відкидання умов, що мало впливають на результат.

Таким чином, всі поставлені задачі, які виражені в математичних співвідношеннях зведені вже до чисто математичних задач. Складання математичної моделі в прикладній задачі є найбільш складним і відповідальним етапом розв'язання і, як правило, виконується спільно математиком і фахівцем у даній галузі. Що ж стосується математичної задачі, то її модель в основному міститься в самій постановці.

Вибір обчислювального методу. Математична задача абстрагована від конкретної сутності прикладної задачі. Для її розв'язування створюються спеціальні обчислювальні методи, причому по одній і тій же математичній моделі можуть зводитися абсолютно різні прикладні задачі.

Наприклад, задача б) зводиться до розв'язування диференційного рівняння, яке може бути моделлю і для багатьох інших задач (зміна швидкості при пружних лінійних коливаннях, зміна струму в найпростішому електричному колі, зміна швидкості при розмноженні бактерій).

Для розв'язування задачі с) необхідно обчислити певний інтеграл. До обчислення певних інтегралів приходять і при визначенні об'єму тіла або довжини дуги плоскої кривої, визначенні статичного моменту або моменту інерції, розрахунку роботи змінної сили та у багатьох інших фізичних задачах.

Математична модель задачі d) приводить до відшукування розв'язування системи лінійних нерівностей, що задовольняється певній вимозі, що, в остаточному підсумку, зводиться до багаторазового розв'язання систем лінійних рівнянь. Лінійні системи доводиться розв'язувати і у багатьох інших прикладних задачах.

Розв'язування математичної моделі задачі здійснюється обчислювальним методом, причому ту саму задачу можна розв'язувати декількома методами. Вибір методу для даної задачі – важливий елемент процесу розв'язування, що істотно впливає на результат. Методи обчислень поділяються на точні і наближені.

Точні методи – які після кінцевого числа дій приводять до точного результату за умови, що обчислення проводяться без округлення чисел.

Наближені методи дозволяють отримати результат з деякою похибкою. При виборі наближеного методу істотними є обсяг обчислень, швидкість збіжності (як швидко виходить результат) та інші фактори. Вибір методу, зокрема, залежить і від вихідних даних. Крім того, на вибір методу впливають засоби його реалізації (ручний розрахунок, обчислювальна машина, наявність готової програми і т.д.). Так, якщо будуть використані швидкодіюча ЕОМ і готова програма, то обсяг обчислень не повинен бентежити виконавця і бути визначальним фактором при виборі методу. При ручному розрахунку варто віддати перевагу методу, що вимагає певних попередніх досліджень, з меншим числом обчислень.

Наприклад, для розв'язання задачі а) краще використовувати точний метод, тобто формулу:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.1)$$

але можна застосовувати і інші способи, наприклад різні наближені методи.

Диференціальне рівняння задачі б) краще розв'язувати, розділивши змінні, тобто привівши його до наступного вигляду:

$$\frac{m \times dv}{mg - kv} = dt \quad (1.2)$$

Однак його можна розглядати і як лінійне рівняння, або розв'язувати наближеними методами.

При розв'язанні задачі с) варто користуватися методами наближеного обчислення певного інтеграла, причому можна застосувати найбільш простий з них – метод прямокутників, оскільки постановка задачі не вимагає високої точності розв'язування.

Що ж стосується розв'язування систем лінійних рівнянь, то уже зі шкільного курсу математики відомі точні методи: метод підстановки, метод алгебраїчного додавання, метод визначників. Однак для лінійних систем високого порядку вони виявляються неефективними, тому для їхнього розв'язування звичайно використовуються наближені методи.

Алгоритм розв'язання задачі. Алгоритмом називається система правил, що задає строго певну послідовність операцій, які приводять, при заданих початкових даних, до шуканого результату (точного або наближеного).

Виділимо основні властивості алгоритму, що впливають із визначення:

1. *Дискретність алгоритму* – представлення алгоритму у вигляді послідовності окремих кроків, елементарних операцій, виконуваних у строго певному порядку.

2. *Визначеність алгоритму* – кожний крок алгоритму повинен бути описаний за допомогою певної системи правил для того, щоб виконавець його сприймав однозначно, без невизначеностей.

3. *Результативність алгоритму* – через кінцевий час алгоритм повинен привести до результату або до повідомлення про його відсутність.

4. *Масовість алгоритму* – алгоритм, який складений для розв'язування однієї задачі, повинен застосовуватися для розв'язування аналогічних задач при всіх припустимих значеннях вихідних даних.

Способи опису алгоритмів:

- ✓ словесно-формульний опис алгоритму;
- ✓ графічний опис алгоритму у вигляді блок-схеми;

✓ опис алгоритму алгоритмічною мовою.

Словесно-формульний опис алгоритму – це опис алгоритму за допомогою слів і формул, представлений у вигляді перенумерованих кроків, виконуваних один за одним. Якщо необхідно змінити порядок виконання кроків, то варто вказувати на це послідовно.

Блок-схемою алгоритму називається графічне зображення послідовності дій обчислювального процесу.

У блок-схемі кожна дія береться в певний геометричний символ (блок): початок і кінець процесу звичайно зображують овалом; введення даних і висновок результатів – у вигляді паралелограма; обчислювальні операції беруться у прямокутники; операції перевірки умов зображуються у вигляді ромбів; заголовок циклу, у якому задаються границі зміни параметра циклу, зображується у вигляді шестикутника; стандартний процес зображується у вигляді прямокутника з подвійними бічними границями.

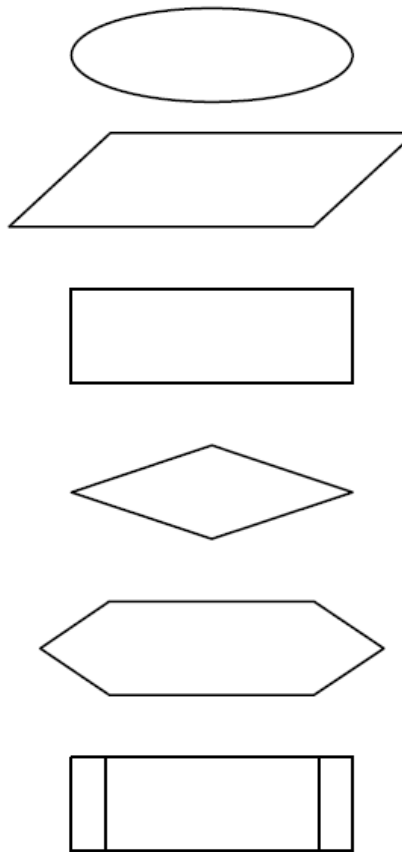


Рис. 1. Блок схема алгоритму

Всередині кожного блоку приводиться короткий (в основному формульний) опис відповідної операції. Блоки з'єднуються лініями або стрілками, що вказують на операцію, до виконання якої потрібно перейти. Рух праворуч і униз береться за замовчуванням і може відзначатися лінією. Рух вліво і нагору повинен обов'язково показуватися стрілкою.

Блоки операцій перевірки умови повинні мати два виходи: «Так» і «Ні». Стрілка або лінія з надписом «Так» вказує на операцію, до виконання якої необхідно перейти, якщо перевіряється виконувана умова. Стрілка або лінія із надписом «Ні» вказує на операцію, до виконання якої потрібно перейти у випадку, якщо перевіряється умова, що не виконується.

З перелічених блоків складають алгоритмічні структури, що дозволяють зобразити певні види дій, які представлені на рис. 2:

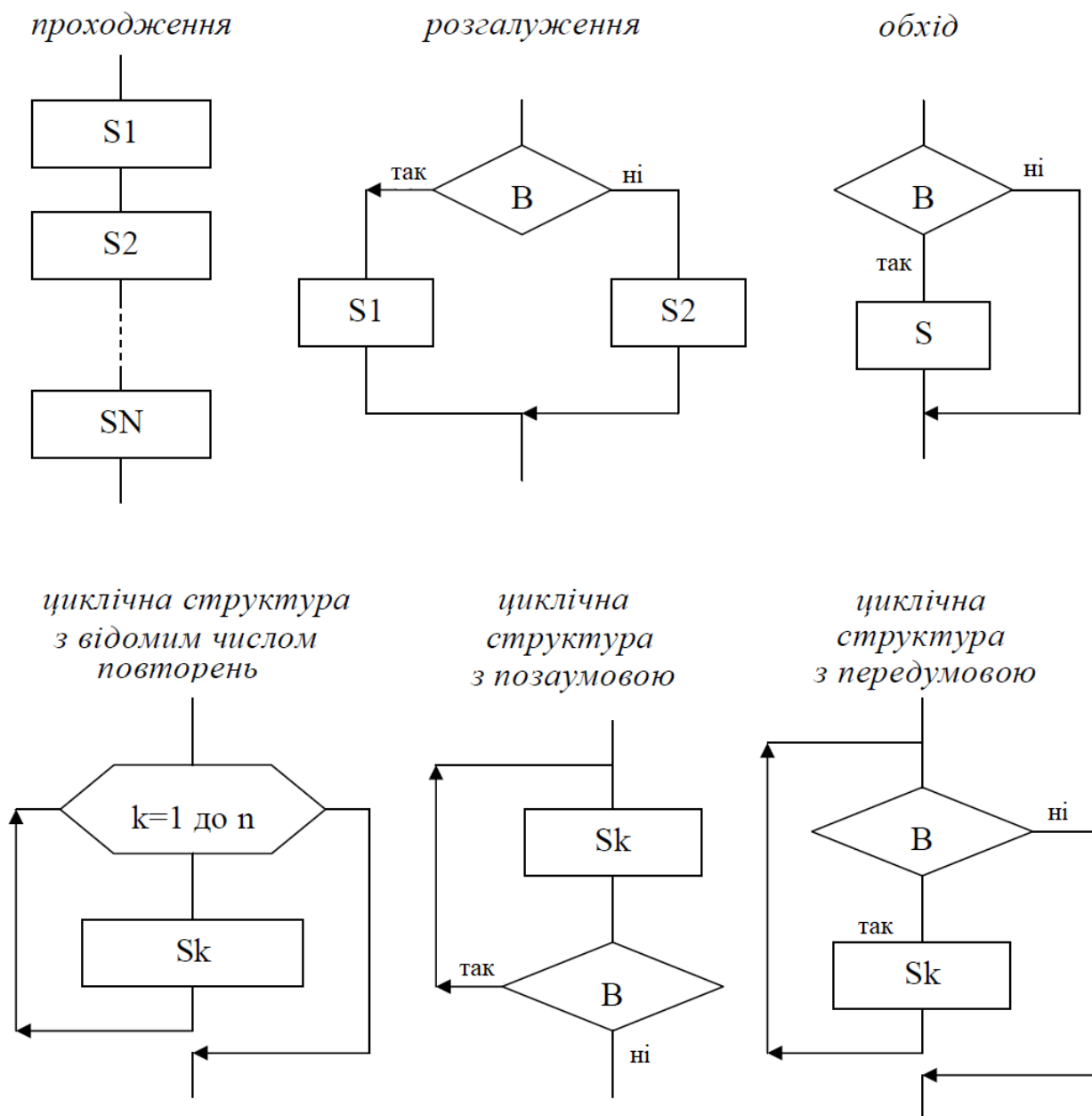


Рис. 2. Приклади дій, які утворюють алгоритмічні структури

У зображених алгоритмічних структурах S1, S2, ..., SN, S – обчислювальні оператори, B – логічний вираз, Sk – тіло циклічної структури, що виконується певне число раз.

Особливістю наведених алгоритмічних структур є те, що кожна з них має тільки один вхід і тільки один вихід.

Блок-схема, складена з наведених алгоритмічних структур, називається структурною. А суттю структурного програмування є процес розробки алгоритму за допомогою структурних блок-схем.

Серед множини різноманітних алгоритмів можна виділити три основні види алгоритмів:

- лінійні;
- розгалужені;
- циклічні.

Розмаїтість алгоритмів визначається тим, що будь-який алгоритм розпадається на частини, фрагменти і кожний фрагмент є алгоритмом одного із зазначених видів.

Лінійним називається алгоритм, у якому усі етапи розв'язування задачі виконуються строго у послідовному порядку. Лінійний алгоритм зображується за допомогою алгоритмічної структури проходження.

Розгалуженим алгоритмом називається алгоритм, у якому вибирається один із двох можливих шляхів обчислювального процесу. Кожний такий шлях називається гілкою алгоритму. Розгалужений алгоритм можна зобразити за допомогою алгоритмічних структур розгалуження або обхід.

Циклічним називається алгоритм, у якому отримання результату забезпечується багаторазовим виконанням тих самих операцій. Циклічний алгоритм зображується за допомогою циклічної структури з відомим числом повторень, циклічної структури з позаумовою або циклічної структури з передумовою. Кожна з перелічених структур вибирається залежно від умов організації циклічного процесу і умов виходу з нього.

Якщо кількість ітерацій (однотипних операцій, повторюваних багато разів) визначається значенням заданої змінної, то використовується циклічна структура з відомим числом повторень. Така структура звичайно застосовується при роботі з елементами масиву, над якими виконуються однотипні операції.

Якщо вихід із циклічного процесу відбувається на деякій ітерації при виконанні умови виходу, що визначає досягнення заданої точності обчислень, то використовуються циклічні структури з позаумовою або передумовою. Вибір структури з умовою залежить від того, де необхідно перевіряти умову виходу: на початку ітерації або наприкінці. Варто звернути увагу на те, що коли використовується структура з позаумовою, то циклічний процес буде виконуватися хоча б один раз. Якщо ж використовується структура з передумовою, то циклічна структура за певних умов може не виконатися жодного разу. Саме цю особливість варто враховувати при виборі циклічної структури з умовою. При розробці складних алгоритмів використовується структурний підхід, основними складовими якого є: спадне покрокове проектування, структурне програмування, модульне програмування, структурний контроль.

Зупинимося більш детально на характеристиці структурного програмування, яке припускає складання алгоритму розв'язання задачі із конструкцій строго певного виду. Будь-який алгоритм може бути представлений комбінацією базових алгоритмічних структур, кожна з яких має тільки один вхід і тільки один вихід. Проілюструємо це на прикладах. На рис. 3 представлено блок-схему алгоритму знаходження коренів квадратного рівняння.

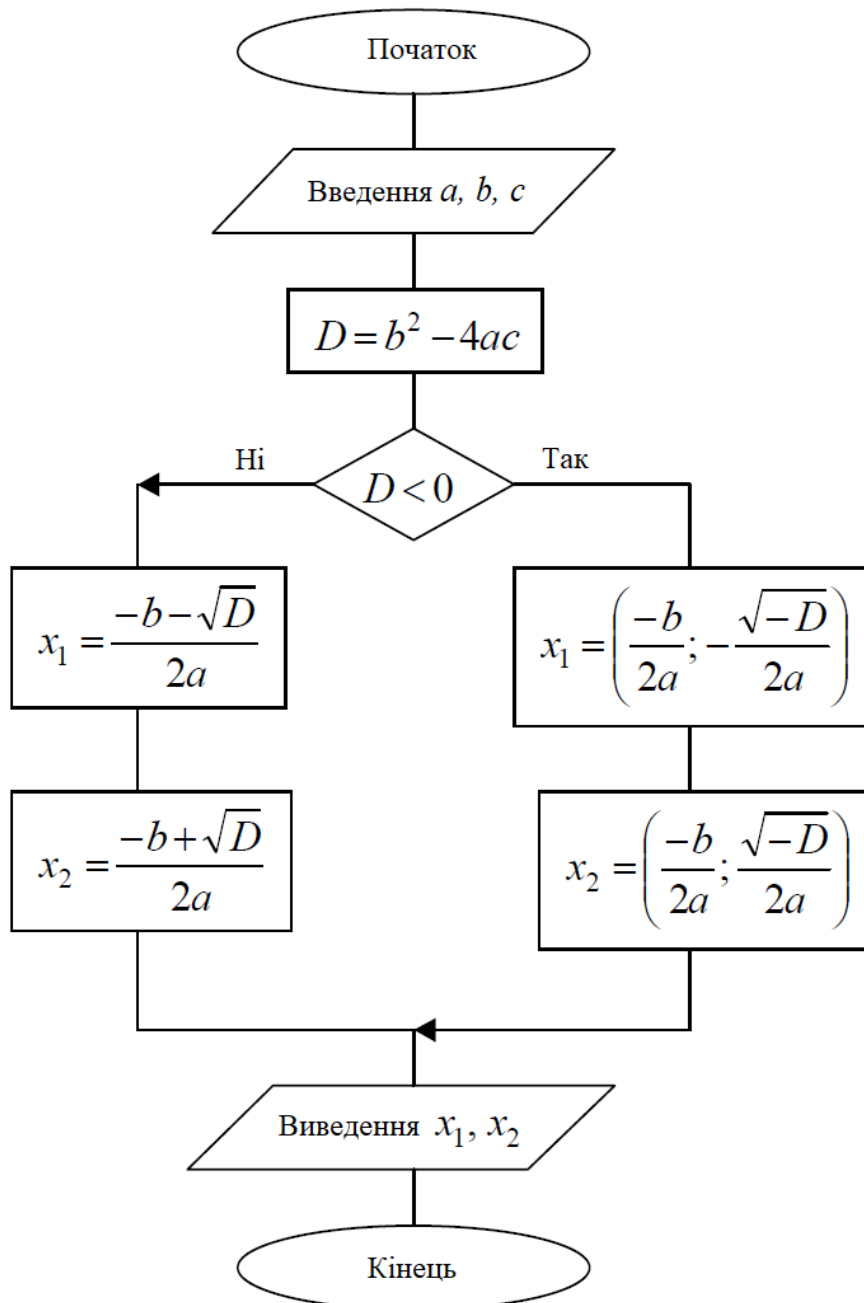


Рис. 3. Блок-схема алгоритму знаходження коренів квадратного рівняння

Слід відмітити, що блок-схема складена на основі алгоритмічної структури розгалуження, що відображає два можливих шляхи розв'язування задачі залежно від значення дискримінанта. Якщо при заданих коефіцієнтах

квадратного рівняння дискримінант набирає негативне значення (ні), то обчислюються комплексні корені, у протилежному випадку (так) обчислюються дійсні корені. Якщо значення дискримінанта буде дорівнювати нулю, то два дійсних корені будуть рівні між собою.

У наступному прикладі представимо блок-схему алгоритму обчислення значення функції $y = \sin x$ із заданою точністю ε , використовуючи розкладання функції в степеневий ряд. Слід відмітити, що математична модель задачі і словесно-формульний алгоритм розв'язування були отримані раніше. На рис. 4 представлено блок-схему алгоритму обчислення значення функції $y = \sin x$ із заданою точністю ε .

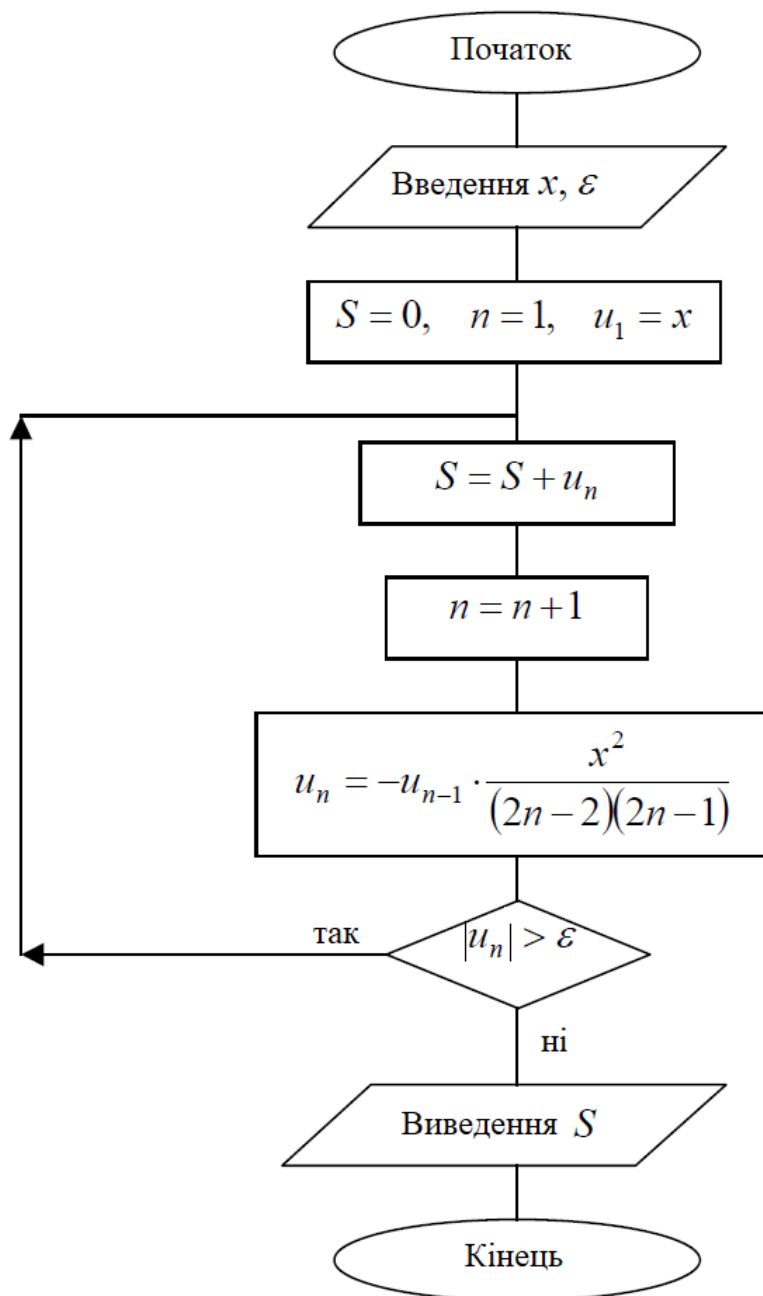


Рис. 4. Блок-схема алгоритму обчислення значення функції $y = \sin x$ із заданою точністю ε

У блок-схемі використовується циклічна структура з позаумовою. Особливістю даної структури є те, що тіло циклу виконується хоча б один раз. Тому, якщо при введенні даних аргумент x виявиться відразу менше ε , проте, він як доданок буде доданий до суми і результат обчислення функції буде дорівнювати x .

Далі наведена блок-схема розв'язання цієї ж задачі, яка використовує циклічну структуру з передумовою, що в описаній вище ситуації залишить суму рівною нулю, тому що тіло циклу не буде виконуватися жодного разу.

У всіх інших випадках, коли $|x| > \varepsilon$, використання обох структур призведе до отримання того самого результату. На рис. 5 представлено блок-схему, яка використовує циклічну структуру з передумовою.

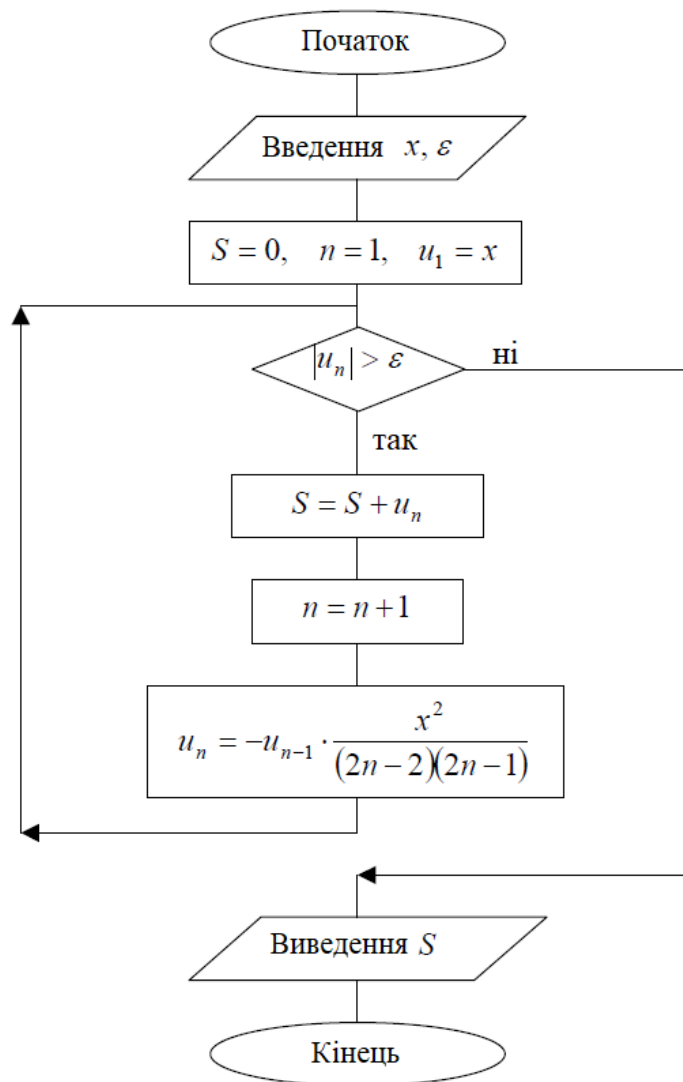


Рис. 5. Блок-схема, яка використовує циклічну структуру з передумовою

Варто зазначити, що принцип покрокового проектування застосований для розв'язування складних задач, передбачає розробку укрупнених блок-схем, що містять певні блоки, які можуть бути винесені окремо для більш детальної деталізації виконуваних дій. Блок-схеми кожного рівня деталізації повинні бути

структурними, тобто складатися з алгоритмічних структур із одним входом і одним виходом. Якщо блок-схема містить тільки елементарні блоки, тобто блоки, які не можуть бути далі деталізовані, то така блок-схема є менш детальною.

Реалізація методу обчислень. Обчислення по алгоритмах здійснюються за допомогою різних обчислювальних засобів. При ручному (безпосередньому) розрахунку звичайно використовуються найпростіші обчислювальні засоби: таблиці, калькулятори, електронні обчислювальні машини без втручання програмного керування і т.д.

Наявність обчислювальної машини із програмним керуванням дозволяє реалізувати обчислення автоматично, під керівництвом програми. При цьому, можливо, що для обраного методу існує готова (стандартна) програма, що вводиться в ЕОМ і на основі чого здійснюється розрахунок. Якщо ж задача не є типовою, а має свої особливості, то по розробленому алгоритму потрібно скласти програму. Програму записують вхідною мовою програмування використовуваної обчислювальної ЕОМ. Слід також зазначити, що усі операції необхідно виконувати у строгій послідовності, а також враховувати дії алгоритму з використанням вихідних даних задачі. Важливим моментом є і те, що останнім етапом розв'язування прикладної задачі є видача конкретних рекомендацій на підставі даних розрахунку.

1.2. ОЦІНКА ПОХИБКИ РЕЗУЛЬТАТУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИМИ МЕТОДАМИ

Розв'язування прикладних і математичних задач, як правило, пов'язане з наближеними значеннями величин, з використанням наближених методів розв'язування і наближених обчислень.

Математична модель задачі – це вже наближене подавання реального об'єкта. Вихідні дані, отримані з експерименту, можна в основному визначити лише приблизно. Навіть точні числа, такі, як $\pi, e, \frac{3}{6}, \sqrt{3}$ т.д., при обчисленнях

заміняють десятковими дробами, залишаючи певне число знаків після коми.

Похибка, яку допускають при переході від постановки задачі до відповідної математичної моделі, і похибка вихідних даних разом утворюють *непереборну похибку*.

Обчислювальні методи в основному також є наближеними і тому утворюють *похибку обчислювальних методів*.

Навіть при використанні найпростішої формули результат, як правило, отримують наближеним, тому що арифметичні дії виконуються над наближеними значеннями. При цьому переважно утворюється *обчислювальна похибка*.

Похибка результату при розв'язанні задачі з використанням чисельних методів складається із суми:

- непереборної похибки;
- похибки обчислювального методу;
- обчислювальної похибки.

Тому, перш ніж приступитися до вивчення обчислювальних методів, варто ознайомитися з різними видами похибок, загальними правилами дій над наближеними числами і оцінкою похибок при обчисленнях.

1.3. ПОХИБКА ВИХІДНИХ ДАНИХ

Абсолютна похибка наближеного числа. Якщо a_0 – деяке число (відоме точно або не точно), a – число, взяте за наближене значення числа a_0 , то число $\Delta a(a) > 0$, що задовольняє наступній нерівності:

$$|a_0 - a| \leq \Delta a(a) \quad (1.3)$$

називається *абсолютною похибкою* (точніше *граничною абсолютною похибкою*) наближеного числа a .

Очевидно, таке визначення абсолютної похибки не є однозначним. Так, якщо $a_0 = \pi$, а за наближене значення взяти $a = 3,14$, то, враховуючі, що $3,140 < \pi < 3,142$ можна записати як:

$$|\pi - a| < 0,002, \quad |\pi - a| < 0,001, \quad |\pi - a| < 0,1 \quad (1.4)$$

Кожне із чисел $0,002, 0,01, 0,1$ буде абсолютною похибкою числа a . Але чим ближче між собою числа $|a_0 - a|$ та Δa , тим точніше абсолютна похибка оцінює фактичну помилку.

Як *абсолютну похибку* (Δa) наближеного числа a беруть по можливості найменше із чисел, що задовольняють наведеній нерівності, що рівносильне подвійній наступній нерівності:

$$a - \Delta(a) \leq a_0 \leq a + \Delta(a) \quad (1.5)$$

котрі умовно записують наступним чином:

$$a_0 = a \pm \Delta(a) \quad (1.6)$$

тобто a_0 приблизно дорівнює a з абсолютною похибкою $\Delta(a)$.

Так, у попередньому прикладі можна записати $\pi = 3,14 \pm 0,002$.

Абсолютна похибка є оцінкою точності числа.

Відносна похибка наближеного числа. Абсолютна похибка $\Delta(a)$ числа a , взятого за наближене значення числа a_0 , не завжди є зручною характеристикою ступеня точності a як наближення a_0 . Похибка в один метр є дуже грубою помилкою при вимірюванні довжини приміщення, але її можна розглядати як малу помилку при вимірюванні відстані між двома вилученими точками поверхні. Отже, крім величини абсолютної похибки, необхідно ще знати її відношення до вимірюваної (або обчислюваної) величини, яке в основному виражається у відсотках.

Відносною похибкою $\delta(a)$ наближеного числа a називається відношення абсолютної похибки $\Delta(a)$ до модуля цього числа. Отже, отримаємо:

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} \quad \text{або у відсотковому співвідношенні} \quad \delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} \cdot 100\% . \quad (1.7)$$

Так, відносна похибка числа $3,14$, взятого за наближене значення числа π , при $\Delta(3,14) = 0,002$ дорівнює:

$$\delta(3,14) = \frac{0,002}{3,14} = 0,00064 \quad \text{або} \quad 0,064\% . \quad (1.8)$$

У технічних розрахунках точність вимірювань характеризують відносною похибкою. Результат вважають гарним, якщо відносна похибка не перевищує $0,1\%$.

З визначення відносної похибки випливає, що

$$\Delta(a) = |a| \cdot \delta(a) . \quad (1.9)$$

Правило округлення чисел. Округлення числа полягає у відкиданні в ньому всіх цифр, що впливають за деяким розрядом. При цьому, якщо округлене число ціле, то відкинуті цифри цілої частини заміняють нулями.

Округлення чисел звичайно виконують за наступним *правилом*:

- ✓ якщо перша цифра, що відкидається, менше п'яти, то остання цифра, що залишається не змінюється.

Приклад:

Округлити число $\pi = 3,14159\dots$ до:

- а) одного; б) трьох; в) чотирьох десяткових знаків.

Розв'язання:

- а) $3,14159 \approx 3,1$ (округлення до $0,1$);
- б) $3,14159 \approx 3,142$ (округлення до $0,001$);
- в) $3,14159 \approx 3,1426$ (округлення до $0,0001$).

ЛЕКЦІЯ 2

Тема: ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ. МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

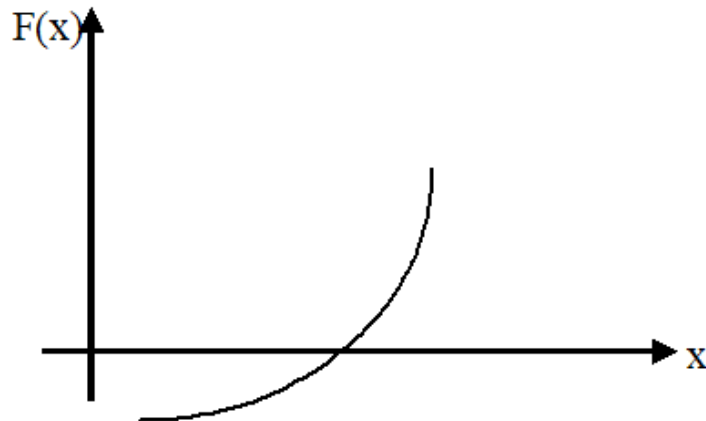
2.1. ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД НЬЮТОНА

У загальному вигляді нелінійне рівняння (алгебраїчне, трансцендентне) можна записати:

$$F(x) = 0 \quad (2.1)$$

Припускаємо, що функція $F(x)$ диференціюється. Коренем рівняння (2.1) називається будь-яке значення $x = x^{(*)}$, при якому функція $F(x)$ наближається до нуля, тобто при якому $F(x^{(*)}) = 0$.

Графічно корінь рівняння відповідає значенню $x = x^{(*)}$, при якому крива $F(x)$ перетинає вісь абсцис:



Розв'язування рівняння полягає у визначенні одного або всіх його коренів на відрізку $[a, b]$. Алгебраїчне рівняння n -го ступеня має не більше n дійсних коренів.

У загальному випадку нелінійні рівняння не мають аналітичних формул для визначення коренів. Тоді для їх розв'язання використовують числові методи, які є наближеними. Вони дозволяють знайти корені рівняння із заданою точністю.

Числові методи знаходження коренів рівняння передбачають визначення початкового наближення значення кореня $x^{(0)}$ і подальше покрокове його уточнення до досягнення заданої точності ε .

Як результат розв'язування рівняння числовим методом приймається чергове наближення кореня $x^{(k)}$, для якого виконується загальна наступна умова:

$$|F(x^{(k)})| \leq \varepsilon, \quad (2.2)$$

де $F(x^{(k)})$ - нев'язка рівняння при поточному наближенні кореня.

Початкове наближення кореня $x^{(0)}$ рівняння (2.1) іноді відоме із фізичної суті задачі. Інакше його часто можна визначити, використовуючи аналіз функції $F(x)$. При цьому підбором треба знайти такі два значення $x = a$ і $x = b$, за яких $F(x)$ має протилежні знаки, тобто:

$$\begin{aligned} F(a) &> 0 \\ F(b) &< 0 \end{aligned}$$

Тоді на відріжку між a і b є не менше однієї точки, де функція $F(x)$ перетинає вісь абсцис, тобто $F(x) = 0$. Як початкове наближення для визначення кореня рівняння $F(x)$ можна взяти значення:

$$x^{(0)} = \frac{1}{2}(a + b) \quad (2.3)$$

Для визначення початкового наближення кореня можна застосувати, також *графічне розв'язання* рівняння. Для цього треба побудувати графік функції $y = F(x)$. Значення параметру x у точках перетину функцією вісі абсцис приймаються як початкові наближення коренів.

Числовий метод, у якому відбувається послідовне, крок за кроком, уточнення початкового наближення, називається *ітераційним* методом.

Кожний крок уточнення невідомих у такому методі називається *ітерацією*. Якщо при послідовних ітераціях отримуємо значення, які все ближче наближуються до точного значення кореня $x^{(*)}$, то такий метод ітерацій *збігається*.

Одним з ефективних ітераційних методів розв'язання нелінійних рівнянь є *метод Ньютона (метод дотичних)*.

Його суть полягає у заміні кривої $F(x)$ в точці чергового наближення $x = x^{(k)}$ дотичною до неї, перетин якої з віссю x дає наступне наближення невідомого. Тут виконується лінійна апроксимація. Наступне $(k+1)$ -ше наближення невідомого числа у методі Ньютона визначається за наступною формулою:

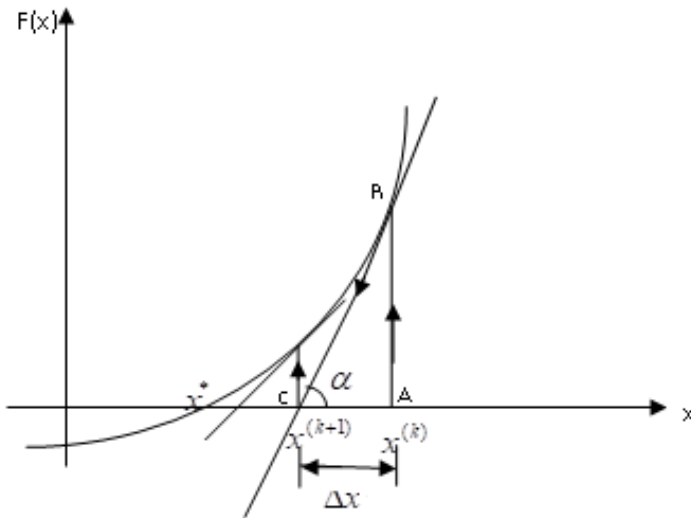
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F(x^{(k)}) / F'(x^{(k)}), \quad (2.4)$$

де $x^{(k)}, x^{(k+1)}$ - чергове k -те і наступне $(k+1)$ -ше наближення невідомого;

$F(x^{(k)})$ - значення функції у точці чергового наближення (нев'язка рівняння). Визначається при підстановці $x^{(k)}$ у функцію (2.1);

$F'(x^{(k)})$ - значення похідної функції в точці чергового наближення.

Графічна ілюстрація метода Ньютона представлена на Рис. 6.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{F(x^{(k)})}{\Delta x^{(k)}} = F'(x^{(k)})$$

$$\Delta x^{(k)} = F(x^{(k)}) / F'(x^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \Delta x^{(k)}$$

Рис. 6. Графічна ілюстрація метода Ньютона

Примітки:

1. Як початкове наближення кореня $x^{(0)}$ можна вибрати також кінець відрізка $[a, b]$, в якому виконується умова:

$$F(x^{(0)}) \cdot F''(x^{(0)}) > 0 \quad (2.5)$$

2. Контроль завершення ітераційного процесу виконується за умови досягнення заданої точності ε :

а) за зміною наближень невідомого на суміжних ітераціях:

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \varepsilon, \quad (2.6)$$

б) по величині нев'язки рівняння (2.1) на черговій ітерації:

$$|F(x^{(k+1)})| \leq \varepsilon \quad (2.7)$$

Нев'язка визначається при підстановці наближення $x^{(k+1)}$ у рівняння.

3. Метод Ньютона збігається набагато швидше, ніж інші ітераційні методи.
4. Похибка округлення не накопичується – загальна властивість ітераційних методів.

2.2. ПОСЛІДОВНІСТЬ ОСНОВНИХ ДІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ РІВНЯННЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Послідовність основних дій при розв'язанні рівняння методом Ньютона наступна:

а) Підготовчий етап:

1. Записати рівняння у формі (2.1);
2. Визначити похідну від функції $F'(x)$;
3. Записати формулу (2.4) для заданого рівняння;
4. Визначити початкове наближення невідомого кореня $x^{(0)}$ з використанням (2.3), (2.5) тощо;

б) Розв'язання рівняння:

5. Визначити значення функції $F(x^{(k)})$ і її похідної $F'(x^{(k)})$ в точці наближення;
6. За формулою (2.4) обчислити наступне наближення невідомого;
7. Перевірити умови завершення ітераційного процесу за формулами (2.6) або (2.7).

Якщо умови виконуються, то обчислене на останній ітерації наближення кореня $x^{(k+1)}$, є розв'язком рівняння із заданою точністю ε .

Якщо умови не виконуються, то ітераційний розрахунок повторюється з пункту 5 при новому наближенні кореня.

Приклад розв'язування нелінійного рівняння методом Ньютона:

Знайти один із коренів рівняння $x^3 - 5x = 10$ з точністю $\varepsilon = 0,01$

Розв'язання:

а) Підготовчий етап. Записуємо рівняння у формі (2.1):

$$F(x) = x^3 - 5x - 10 = 0$$

Похідна від функції:

$$F'(x) = 3x^2 - 5$$

Запишемо формулу (2.4) для заданого рівняння:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^3 - 5 \cdot x^{(k)} - 10}{3(x^{(k)})^2 - 5}$$

Визначаємо початкове наближення кореня: обчислимо значення функції в точках $x=2$ і $x=3$:

$$F(2) = 2^3 - 5 \cdot 2 - 10 = -12 < 0$$

$$F(3) = 3^3 - 5 \cdot 3 - 10 = 2 > 0$$

Тобто на інтервалі $[2,3]$ існує не менше одного кореня. Як початкове наближення можна взяти значення $x^{(0)} = 3$. При ньому виконується умова (2.5).

б) Розв'язання рівняння. Ітерація 1.

$$F(x^{(0)}) = F(3) = 2$$

$$F'(x^{(0)}) = F'(3) = 3 \cdot 3^2 - 5 = 22$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} - F(x^{(0)}) / F'(x^{(0)}) = 3 - 2 / 22 = 2.909$$

Нев'язка рівняння в цій точці:

$$F(x^{(1)}) = F(2.909) = (2.909)^3 - 5 \cdot 2.909 - 10 = 0.073 > \varepsilon$$

Необхідно виконати наступну ітерацію.

Ітерація 2:

$$F(x^{(1)}) = F(2.909) = 0.0703$$

$$F'(x^{(1)}) = F'(2.909) = 20.387$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - F(x^{(1)}) / F'(x^{(1)}) = 2.909 - 0.073 / 20.387 = 2.905$$

$$F(x^{(2)}) = F(2.905) = 0.01 \approx \varepsilon$$

Задана точність досягнута. Як корінь рівняння із точністю $\varepsilon = 0.01$ приймається значення $x^{(2)} = 2.905$.

2.3. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ БАГАТОЧЛЕН НЬЮТОНА

Інтерполяційні багаточлени Ньютона можуть бути записані тільки для рівновіддалених вузлів *інтерполяції*, першої, другої формул Ньютона:

1) Інтерполяційний багаточлен Ньютона має степінь, не вище n за умови, що побудова багаточленів виконується по таблиці, у якій заданий $n+1$ вузол. При побудові багаточлена Ньютона вузли повинні бути рівновіддаленими;

2) У багаточленів Ньютона степені їхніх доданків постійно підвищуються, починаючи від нульового в першому доданку до n -ої в останньому. Крім того, у формулах Ньютона знаменники коефіцієнтів містять величину $k!$ Ці числа зі

збільшенням k швидко зростають, отже, коефіцієнти зменшуються і при обчисленнях, починаючи з деякого номера, останніми доданками більш високої степені можна знехтувати;

3) Додаток нового вузла інтерполяції у формулах Ньютона додасть лише новий доданок, але не змінить всіх попередніх доданків;

4) При побудові багаточленів Ньютона вузли інтерполяції збігаються і багаточлени будуть тотожно рівні, тобто рівні коефіцієнти при однакових степенях. Це впливає з єдиничності побудови багаточлена степені n за умови проходження функцій через задані точки.

На рис. 7. представлено інтерполяційну залежність Ньютона.

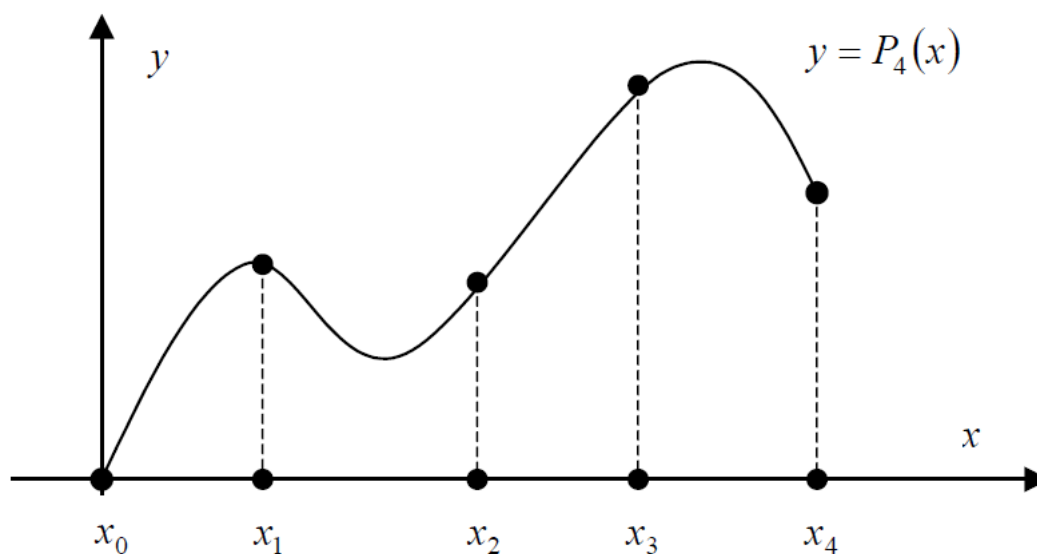


Рис. 7. Інтерполяційна залежність Ньютона

Отже, можна зробити висновок, що інтерполяційні поліноми у формі Ньютона зручно використовувати, коли точка інтерполяції знаходиться поблизу початку (пряма формула Ньютона) чи кінця таблиці (обернена формула Ньютона).

ЛЕКЦІЯ 3

Тема: МЕТОД ГАУСА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР

3.1. ТОЧНІ І НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ (СЛАР)

Для розв'язання СЛАР традиційно використовують дві групи чисельних (обчислювальних) методів:

➤ **точні** (метод Гауса, метод Гауса з вибором головного елемента, метод Гауса з одиничною матрицею, метод Гауса з перетвореною матрицею, метод Гауса-Халецького, метод Гауса-Жордана, метод Крамера);

➤ **наближені** (метод послідовних ітерацій, метод Гауса-Зейделя, метод векторів зміщень).

До точних методів відносять методи, які дозволяють отримати точний розв'язок системи за відповідну кількість операцій перетворення без урахування похибок заокруглення.

До наближених методів відносять методи, які дозволяють отримати розв'язок системи у вигляді границі послідовності векторів, яка збігається до точного розв'язку системи.

3.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР ЗА МЕТОДОМ ГАУСА (МЕТОД ПОСЛІДОВНОГО ВИКЛЮЧЕННЯ НЕВІДОМИХ)

Для розв'язування системи рівнянь точними методами необхідно знати як виконуються елементарні перетворення систем лінійних рівнянь. Таких перетворень існує три типи:

- 1) Множення обох частин рівняння на будь-яке ненульове число;
- 2) Перестановка рівнянь системи місцями;
- 3) Додавання (або віднімання) до обох частин одного рівняння відповідних частин іншого рівняння, помноженого на будь-яке ненульове число.

Система n лінійних рівнянь із n невідомими у загальному вигляді може бути записана:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

де x_1, x_2, \dots, x_n - невідомі величини, які необхідно визначити при розв'язуванні системи;

$a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}$ - коефіцієнти при невідомих;
 b_1, b_2, \dots, b_n - вільні члени рівнянь системи.

У матричній формі ця система рівнянь має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

або $A \cdot x = B$,

де A - квадратна матриця коефіцієнтів системи розмірністю $n \times n$;

x - вектор невідомих;

B - вектор вільних членів.

Розв'язати систему (3.1) – означає обчислити такі значення елементів вектора невідомих x , за яких кожне рівняння системи перетворюється на тотожність.

Для цього можна застосувати як прямі, так і ітераційні методи. Поширеним прямим способом розв'язування систем лінійних рівнянь є алгоритм послідовного виключення невідомих, що має назву *метод Гауса*.

Існують різні алгоритми його реалізації. Один із них – *метод Гауса із зворотнім ходом* для розв'язання СЛАР, які розглядається у цій роботі.

Метод Гауса із зворотнім ходом передбачає виконання двох етапів: прямий і зворотній хід методу. Прямий хід – послідовність однотипних кроків виключення невідомих із системи рівнянь. В результаті його виконання вихідна система (3.1) або (3.2) з *квадратною* матрицею коефіцієнтів перетворюється на *еквівалентну* систему рівнянь з *верхньою трикутною* матрицею коефіцієнтів. На зворотному ході обчислюються значення невідомих, починаючи з останнього (від x_n до x_1). Розглянемо більш детально можливий варіант перетворень.

Прямий хід:

Перший крок виключення невідомих. Виключаємо невідому x_1 із рівнянь системи (3.1), починаючи з другого. Виберемо на діагоналі опорний елемент a_{11} . При цьому необхідно, щоб виконувались умови:

$$a_{11} \neq 0 \quad \text{і} \quad |a_{11}| \geq |a_{i1}|; \quad i = 2, \dots, n \quad (3.3)$$

Тобто він повинен бути відмінним від нуля і серед елементів першого стовпця матриці коефіцієнтів в (3.2) найбільшим за абсолютною величиною. В іншому разі переставимо рівняння у системі так, щоб ці умови виконувались.

Ділимо перше рівняння системи (3.1) на опорний елемент a_{11} . Отримаємо:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (3.4)$$

Для виключення складових з невідомим x_1 із решти рівнянь необхідно рівняння (3.4) по черзі домножати на коефіцієнт a_{i1} ($i=2, \dots, n$) і результат віднімати від відповідних рівнянь вихідної системи (3.1). В результаті отримаємо *еквівалентну* систему:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ 0 + a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

де
$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot a_{i1}; \quad (3.6)$$

$$b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot b_1;$$

i - номер рівняння в системі, $i = 2, \dots, n$;

j - номер елемента в рівняннях, $j = 1, \dots, n$.

На *другому* кроці виключення невідомих необхідно виключити x_2 з рівнянь системи (3.5), починаючи з третього. Вибираємо опорний елемент $a_{22}^{(1)}$ згідно з умовами, подібними до (3.3), тобто $a_{22}^{(1)} \neq 0$; $|a_{22}^{(1)}| \geq |a_{i2}^{(1)}|$, $i = 3, \dots, n$. Якщо вони не виконуються, переставимо відповідним чином рівняння 3,3,..., цієї системи. Ділимо друге рівняння системи (3.5) на опорний елемент $a_{22}^{(1)}$. Отримаємо:

$$x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot x_3 + \dots + \frac{a_{2n}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot x_n = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}. \quad (3.7)$$

Виключаємо доданки з невідомим x_2 із рівнянь 3,4,...,n системи (3.5). Для цього рівняння (3.7) по черзі домножаємо на a_{i2} ($i = 3, \dots, n$) і результат віднімаємо від відповідних рівнянь. Отримуємо *еквівалентну* систему:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \quad 0 + a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad 0 + a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

де

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{i2}^{(1)} \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot b_2^{(1)} \\ i &= 3, \dots, n; \quad j = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.9)$$

Наступні кроки виключення невідомих виконуються аналогічно. На k -му кроці коефіцієнти і вільні члени системи рівнянь обчислюються за такими формулами:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{ik}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot b_k^{(k-1)}; \end{aligned} \quad (3.10)$$

де $k = 1, \dots, n-1$ – номер кроку виключення невідомих, що збігається з номером рівняння системи, в якому розташований опорний елемент;

$i = k+1, \dots, n$ - номер рівняння, з якого виключається невідома;

$j = k, \dots, n$ - номер елемента у рівнянні.

Опорний елемент $a_{kk}^{(k-1)}$ вибирається у стовпці відповідно до умов, отримаємо:

$$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0; \quad |a_{kk}^{(k-1)}| \geq |a_{ik}^{(k-1)}|, \quad i = k+1, \dots, n \quad (3.11)$$

Після виконання останнього $(n-1)$ -го кроку виключення невідомих вихідна система рівнянь перетворюється на *еквівалентну* систему з верхньою *трикутною* матрицею коефіцієнтів. Отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n &= b_{n-1}^{(n-2)} \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned} \right\}, \quad (3.12)$$

Зворотній хід:

Обчислюємо значення всіх невідомих, починаючи з x_n . Із останнього рівняння системи (3.12) отримуємо:

$$x_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)} \quad (3.13)$$

Підставляємо його в передостаннє рівняння і обчислюємо x_{n-1} :

$$x_{n-1} = (b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n) / a_{n-1,n-1}^{(n-2)} \quad (3.14)$$

Послідовно визначаємо $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_2, x_1$ із решти рівнянь. Останнім обчислюється x_1 із першого рівняння при підстановці у нього всіх значень x_2, \dots, x_n . В загальній формі ці обчислення можна описати:

$$x_i = (b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)}x_j) / a_{ii}^{(i-1)}, \quad (3.15)$$

$$i = n - 1, \dots, 1.$$

Для перевірки правильності розв'язування системи рівнянь, необхідно обчислені значення невідомих x_1, \dots, x_n підставити у вихідну систему (3.1). Усі рівняння повинні перетворитись при цьому на *тотожності*.

3.3. МЕТОД ГАУСА З ВИБОРОМ ГОЛОВНОГО ЕЛЕМЕНТА

Основна ідея методу. Може виявитися так, що система набуде наступного вигляду:

$$Ax = f \quad (3.16)$$

має єдиний розв'язок, хоча який-небудь із кутових мінорів матриці A дорівнює нулю. У цьому випадку звичайний метод Гауса виявляється непридатним, але може бути застосований *метод Гауса з вибором головного елемента*.

Основна ідея методу полягає в тому, щоб на черговому кроці виключати не наступне по номеру невідоме, а те невідоме, коефіцієнт при якому є найбільшим по модулю. Таким чином, у якості провідного елемента тут вибирається головний, тобто найбільший по модулю елемент. Тим самим, якщо $|A| \neq 0$, то в процесі обчислень не буде відбуватися ділення на нуль. Різні варіанти методу Гауса за вибором головного елемента проілюструємо на прикладі системи із двох рівнянь, отримаємо:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= f_2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

Припустимо, що $|a_{12}| > |a_{11}|$. Тоді на першому кроці будемо виключати змінне x_2 . Таке приймання еквівалентне тому, що система запишеться у наступному вигляді, отримаємо:

$$\begin{aligned} a_{12}x_2 + a_{11}x_1 &= f_1, \\ a_{22}x_2 + a_{21}x_1 &= f_2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

і до отриманої системи застосовується перший крок звичайного методу Гауса. Зазначений спосіб виключення називається *методом Гауса з вибором головного елемента по рядку*. Він еквівалентний застосуванню звичайного методу Гауса до системи, у якій на кожному кроці виключення проводиться відповідна перенумерація змінних.

Застосовується також метод Гауса з вибором головного елемента по стовпцю. Припустимо, що $|a_{21}| > |a_{11}|$. Перепишемо систему рівнянь у наступному вигляді, отримаємо:

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= f_2, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= f_1, \end{aligned} \quad (3.19)$$

і до нової системи застосовуємо на першому кроці звичайний метод Гауса.

Таким чином, *метод Гауса з вибором головного елемента по стовпцю* еквівалентний застосуванню звичайного методу Гауса до системи, у якій на кожному кроці виключення проводиться відповідна перенумерація рівнянь.

Слід відмітити, що іноді застосовується *метод Гауса з вибором головного елемента по всій матриці*, коли в якості ведучого вибирається максимальний по модулю елемент серед усіх елементів матриці системи.

3.4. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР МЕТОДОМ ГАУСА

Обчислити корені системи 3-х лінійних рівнянь з трьома невідомими x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad (3.20)$$

Прямий хід.

Необхідно виконати 2 кроки виключення невідомих. На *першому* кроці ($\kappa=1$) виключаємо невідому x_1 із другого і третього рівнянь системи. Опорний елемент $a_{11} = 5$. Ділимо на нього перше рівняння системи, отримаємо:

$$x_1 - 0.8x_2 + 0.6x_3 = 0.8$$

і виконуємо виключення. Для цього робимо перетворення відповідно до (3.6) при $i = 2, 3; j = 1, 2, 3$:

$$i=2, j=1 \rightarrow a_{21}^{(1)} = a_{21} - \frac{a_{11}}{a_{11}} \cdot a_{21} = 1 - \frac{5}{5} \cdot 1 = 0$$

$$j=2 \rightarrow a_{22}^{(1)} = a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot a_{21} = 8 - \frac{-4}{5} \cdot 1 = 8.8$$

$$j=3 \rightarrow a_{23}^{(1)} = a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} \cdot a_{21} = -7 - \frac{3}{5} \cdot 1 = -7.6$$

$$b_2^{(1)} = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot b_1 = 2 - \frac{1}{5} \cdot 4 = 1.2$$

Таким чином, в результаті перетворень, друге рівняння ($i = 2$) набуває наступного вигляду:

$$0 + 8.8x_2 - 7.6x_3 = 1.2$$

Отримаємо:

$$i=3, j=1 \rightarrow a_{31}^{(1)} = a_{31} - \frac{a_{11}}{a_{11}} \cdot a_{31} = 2 - \frac{5}{5} \cdot 2 = 0$$

$$j = 2 \rightarrow a_{32}^{(1)} = a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot a_{31} = -1 - \frac{-4}{5} \cdot 2 = 0.6$$

$$j = 3 \rightarrow a_{33}^{(1)} = a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{31} = 1 - \frac{3}{5} \cdot 2 = -0.2$$

$$b_3^{(1)} = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot b_{13} = 2 - \frac{2}{5} \cdot 4 = 0.4$$

Третє рівняння ($i = 3$) набуває наступного вигляду, отримаємо:

$$0 + 0.6x_2 - 0.2x_3 = 0.4$$

Отримуємо еквівалентну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 8.8x_2 - 7.6x_3 = 1.2 \\ 0.6x_2 - 0.2x_3 = 0.4 \end{cases} \quad (3.21)$$

На *другому* кроці ($\kappa = 2$) виключаємо невідому x_2 із третього рівняння системи (3.21). Опорний елемент $a_{22}^{(1)} = 8.8$. Ділимо на нього друге рівняння системи (3.21). Отримаємо:

$$x_2 - 0.8636x_3 = -0.1364$$

і виконуємо виключення. При $i = 3, j = 2, 3$ відповідно до (3.9) отримуємо:

$$i=3 \rightarrow a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{32}^{(1)} = 0.6 - \frac{0.8}{0.8} \cdot 0.6 = 0$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{32}^{(1)} = -0.2 - \frac{-7.6}{8.8} \cdot 0.6 = 0.3182$$

$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot b_2^{(1)} = 0.4 - \frac{0.6}{8.8} \cdot 1.2 = 0.3182$$

Третє рівняння системи (3.21) набуває вигляду:

$$0 + 0.3182x_3 = 0.3182$$

Отримуємо еквівалентну систему рівнянь з трикутною матрицею коефіцієнтів:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 8.8x_2 - 7.6x_3 = 1.2 \\ 0.3182x_3 = 0.3182 \end{cases} \quad (3.22)$$

Зворотній хід.

Із останнього рівняння системи (3.22) знаходимо:

$$x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{0.3182}{0.3182} = 1$$

Підставляємо обчислене значення x_3 в передостаннє рівняння системи (3.22) і знаходимо:

$$x_2 = (b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} \cdot x_3) / a_{22}^{(1)} = \frac{1.2 - (-7.6) \cdot 1}{8.8} = 1$$

Із першого рівняння системи знаходимо:

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11} = \frac{4 - (-4) \cdot 1 - 3 \cdot 1}{5} = 1$$

Таким чином, розв'язком системи є вектор, отримаємо:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для перевірки правильності розв'язування системи рівнянь підставляємо елементи вектора X у вихідну систему. Рівняння системи перетворюється на тотожності, що підтверджує правильність її розв'язання.

ЛЕКЦІЯ 4

Тема: МЕТОД ПОДВІЙНОЇ ФАКТОРИЗАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР

4.1. ОСНОВНІ ЕТАПИ МЕТОДУ ПОДВІЙНОЇ ФАКТОРИЗАЦІЇ

Метод подвійної факторизації є прямим методом розв'язання СЛАР. Який використовує обернену матрицю коефіцієнтів.

Для системи лінійних рівнянь (2.2) це розв'язування має наступний вигляд:

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (4.1)$$

Слід відмітити, що метод дозволяє зменшити обчислювальні труднощі, які виникають при оберненні матриці коефіцієнтів, яка в практичних задачах може мати велику розмірність і малу заповненість. Метод включає два основних етапи:

1. Обернення матриці коефіцієнтів методом подвійної факторизації;
2. Розв'язування системи рівнянь перемноженням оберненої матриці A^{-1} на вектор вільних членів системи B відповідно до рівняння (4.1).

Подвійна факторизація (елімінативна форма оберненої матриці) – це подання оберненої матриці як добутку послідовності елементарних верхніх та нижніх трикутних матриць, в яких не дорівнює нулю тільки один стовпець чи рядок. Отримаємо:

$$A^{-1} = R_1 \cdots R_k \cdots R_{n-1} \cdot L_n \cdot L_{n-1} \cdots L_k \cdots L_1, \quad (4.2)$$

де k - номер кроку перетворення матриці A (крок факторизації);

R_k, L_k - верхні та нижні трикутні матриці на k -му кроці перетворення (праві та ліві факторні матриці).

Верхня трикутна матриця (права факторна матриця) має наступну структуру:

$$R_k = \begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,n} \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ i \\ \downarrow \\ n \end{array}$$

$\begin{array}{cccccc} 1 & \dots & \dots & k & \dots & n \end{array}$
 $\begin{array}{c} j \\ \longrightarrow \end{array}$

Це матриця з одиничною діагоналлю та відмінними від нуля над-діагональними елементами в k -му рядку. Усі інші елементи матриці дорівнюють нулю.

Нижня трикутна матриця (ліва факторна матриця) має наступну структуру:

$$L_k = \begin{array}{cccccc} \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & & & & & \\ \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \\ \\ \end{array} & & & & & \\ & & a_{k,k} & & & \\ & & a_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \dots & & 1 & \\ & & a_{n,k} & & & 1 \end{array} \begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & k & n \\ j & \longrightarrow & \end{array}$$

Її діагональні елементи дорівнюють одиниці, за винятком k -го стовпця. У ньому елементи, що розташовані на діагоналі і нижче її, відмінні від нуля. Усі інші елементи матриці дорівнюють нулю.

Елементи факторних матриць R_k , L_k на k -му кроці факторизації обчислюються за наступними формулами:

$$\text{Матриця } L_k : a_{kk}^{(k)} = 1 / a_{kk}^{(k-1)},$$

$$a_{ik}^{(k)} = -a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} = -a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kk}^{(k)} \quad (4.3)$$

$$\text{Матриця } R_k : a_{kj}^{(k)} = -a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} = -a_{kj}^{(k-1)} \cdot a_{kk}^{(k)}, \quad (4.4)$$

де i, j - номери рядка та стовпця матриці коефіцієнтів

($i = k + 1, \dots, n; j = k + 1, \dots, n$);

k - номер кроку факторизації $k = 1, \dots, n$;

J - елементи матриці коефіцієнтів на k -му кроці факторизації.

На кожному кроці факторизації виконується перерахунок усіх елементів не перетвореної раніше частини матриці (Рис. 8) за формулою:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} = a_{ij}^{(k-1)} + a_{ik}^{(k)} \cdot a_{kj}^{(k-1)}; \quad (4.5)$$

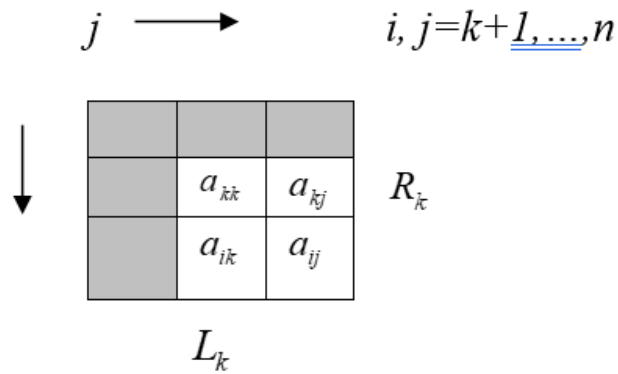


Рис. 8. Частина матриці

В результаті виконання n кроків перетворення отримуємо $(n-1)$ праву факторну матрицю R і n лівих факторних матриць L (всього $2n-1$ елементарних трикутних матриць). Їх елементи розташовані на *полі вихідної матриці* A і утворюють *факторизовану* матрицю A^* . Одиниці на їх головній діагоналі передбачаються так, як це зображено на (Рис. 9).

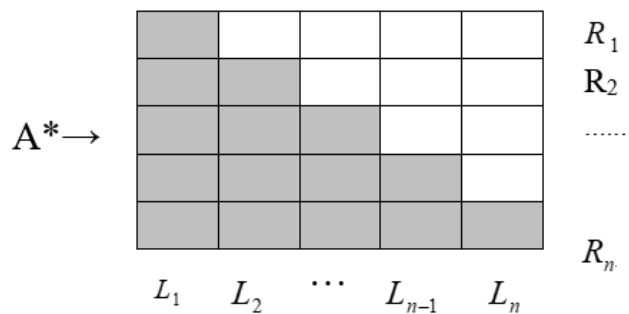


Рис. 9. Факторизована матрицю A^*

Загальний алгоритм подвійної факторизації матриці передбачає виконання таких основних кроків:

- 1) визначення номера чергового кроку факторизації k ($k = 1, \dots, n$);
- 2) вибір чергового опорного елемента a_{kk} . Це діагональний елемент, що розташований на перетині k -го рядка і k -го стовпця (*опорні* рядок та стовпець);
- 3) обчислення елементів k -ої факторної матриці L_k за формулами (4.3);
- 4) обчислення інших елементів матриці A , що не входили в опорний рядок і стовпець і на попередніх кроках перетворення. Використовується формула (4.5);
- 5) обчислення елементів k -ої факторної матриці R_k за формулою (4.4);
- 6) якщо таким чином виконано n кроків перетворення і сформовано факторизовану матрицю, що містить елементи $(n-1)$ матриць R і n матриць L , то подвійна факторизація завершується.

В іншому випадку - повернення до пункту 1) і виконання наступного кроку перетворення.

Після завершення факторизації з факторизованої матриці можна *виділити* і сформувані факторні матриці R , L (відповідно до їх структури) і визначити обернену матрицю A^{-1} відповідно до рівняння (4.2).

4.2. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР МЕТОДОМ ПОДВІЙНОЇ ФАКТОРИЗАЦІЇ

Розв'яжемо СЛАР методом подвійної факторизації. Матриця коефіцієнтів системи має наступний вигляд:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & -4 & 3 \\ \hline 1 & 8 & -7 \\ \hline 2 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Виконуємо факторизацію матриці відповідно до наступного алгоритму. Отримаємо:

Необхідно виконати 3 кроки факторизації ($n = 3$).

Перший крок факторизації ($k = 1$). Опорний елемент $a_{11} = 5$. Визначаємо елементи лівої факторної матриці L_1 за формулами (4.3).

$$k = 1; i = 2, 3; j = 2, 3.$$

$$a_{11}^{(1)} = 1 / a_{11} = 1 / 5 = 0.2$$

$$a_{21}^{(1)} = -(a_{21}) \cdot a_{11}^{(1)} = -1 \cdot 0.2 = -0.2$$

$$a_{31}^{(1)} = -(a_{31}) \cdot a_{11}^{(1)} = -2 \cdot 0.2 = -0.4$$

Переобчислюємо елементи матриці, що не увійшли у опорний рядок і стовпець, за формулою (4.5):

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} + a_{21}^{(1)} \cdot a_{12} = 8 + (-0.2) \cdot (-4) = 8.8$$

$$a_{23}^{(1)} = a_{23} + a_{21}^{(1)} \cdot a_{13} = -7 + (-0.2) \cdot 3 = -7.6$$

$$a_{32}^{(1)} = a_{32} + a_{31}^{(1)} \cdot a_{12} = -1 + (-0.4) \cdot (-4) = 0.6$$

$$a_{33}^{(1)} = a_{33} + a_{31}^{(1)} \cdot a_{13} = 1 + (-0.4) \cdot 3 = -0.2$$

Визначаємо елементи правої факторної матриці R_1 за формулою (4.4):

$$a_{12}^{(1)} = -a_{12} \cdot a_{11}^{(1)} = -(-4) \cdot 0.2 = 0.8$$

$$a_{13}^{(1)} = -a_{13} \cdot a_{11}^{(1)} = -3 \cdot 0.2 = -0.6$$

В результаті виконання 1-го кроку факторизації, визначені елементи факторних матриць L_1 і R_1 . Вони розташовані на полі вихідної матриці. Перетворена матриця на цьому етапі має наступний вигляд:

$$A^{(1)} = \begin{array}{ccc|c} \hline 0.2 & 0.8 & -0.6 & R_1 \\ \hline -0.2 & 8.8 & -7.6 & \\ \hline -0.4 & 0.6 & -0.2 & \\ \hline \end{array} \\ L_1$$

Другий крок факторизації ($\kappa = 2$). Опорний елемент $a_{22}^{(1)} = 8.8$.

$$k=2, i=3; j=3.$$

$$a_{22}^{(2)} = 1/a_{22}^{(1)} = 1/8.8 = 0.1136$$

$$a_{32}^{(2)} = -a_{32}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} = -0.6 \cdot 0.01136 = -0.0682$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} + a_{32}^{(2)} \cdot a_{23}^{(1)} = -0.2 + (-0.682) \cdot (-7.6) = 0.3182$$

$$a_{23}^{(2)} = -a_{23}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} = -(-7.6) \cdot 0.1136 = 0.8634$$

В результаті другого кроку факторизації визначені елементи факторних матриць L_2 і R_2 . Матриця набуває вигляду:

$$A^{(2)} = \begin{array}{ccc|cc} \hline 0.2 & 0.8 & -0.6 & R_1 & \\ \hline -0.2 & 0.1136 & 0.8634 & R_2 & \\ \hline -0.4 & -0.0682 & 0.3182 & & \\ \hline \end{array} \\ L_1 \quad L_2$$

Третій крок факторизації ($\kappa = 3$). Опорний елемент $a_{33}^{(2)} = 0.3182$.

Отримаємо:

$$a_{33}^{(3)} = 1/0.3182 = 3.1427.$$

В результаті останнього, третього, кроку визначено елемент факторної матриці L_3 . Отримано факторизовану матрицю, яка має остаточний вигляд:

$$A^* = \begin{array}{ccc|c} 0.2 & 0.8 & -0.6 & R_1 \\ -0.2 & 0.1136 & 0.8634 & R_2 \\ -0.4 & -0.0682 & 3.1427 & \\ \hline & L_1 & L_2 & L_3 \end{array}$$

Слід відмітити, що її елементами є елементи факторних матриць R_1, R_2, L_1, L_2, L_3 .

Розв'язуємо систему рівнянь відповідно до алгоритму. Виділяємо і формуємо факторні матриці. Розв'язок визначаємо в результаті послідовного перемноження матриць R_1, R_2, L_1, L_2, L_3 на вектор вільних членів B (відповідно до формул (4.2) і (4.1)). Отримаємо:

$$\begin{aligned} L_1 * B \rightarrow B: \quad b_1 &= 0.2 \cdot 4 = 0.8 \\ b_2 &= (-0.2) \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 1.2 \\ b_3 &= (-0.4) \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 * B \rightarrow B \quad b_1 &= 1 \cdot 0.8 = 0.8 \\ b_2 &= 0.1136 \cdot 1.2 = 0.1363 \\ b_3 &= -0.0682 \cdot 1.2 + 1 \cdot 0.4 = 0.3182 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3 * B \rightarrow B \quad b_1 &= 1 \cdot 0.8 = 0.8 \\ b_2 &= 1 \cdot 0.1363 = 0.1363 \\ b_3 &= 3.1427 \cdot 0.3182 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 * B \rightarrow B \quad b_1 &= 1 \cdot 0.8 = 0.8 \\ b_2 &= 1 \cdot 0.1363 + 0.8634 \cdot 1 = 1 \\ b_3 &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 * B \rightarrow B \quad b_1 &= 1 \cdot 0.8 + 0.8 \cdot 1.0 + (-0.6) \cdot 1 = 1.0 \\ b_2 &= 1 \cdot 1.0 = 1 \\ b_3 &= 1 \cdot 1.0 = 1 \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язком системи рівнянь є вектор:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для перевірки правильності розв'язування системи необхідно елементи вектора X підставити у вихідну систему рівнянь. Рівняння системи перетворюється на тотожності, тобто вона розв'язана вірно.

ЛЕКЦІЯ 5

Тема: МЕТОДИ ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ І ЗЕЙДЕЛЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ (СЛАР)

5.1. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ МЕТОДІВ ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ І МЕТОДІВ ЗЕЙДЕЛЯ

Ці методи належать до групи ітераційних методів, що застосовуються для розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь. Дозволяють отримати значення невідомих величин із заданою точністю, як результат виконання послідовності ітерацій.

У загальному вигляді нелінійну систему рівнянь можна записати:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Для її розв'язування методами простої ітерації і Зейделя, систему необхідно перетворити: розв'язати кожне i -те рівняння системи відносно відповідної невідомої величини x_i .

Перетворена система набуває загального вигляду:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 &= \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \\ x_n &= \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

При підстановці в праву частину цієї системи чергового наближення невідомих величин $x_i^{(k)}$, а також виконанні необхідних обчислень, можна отримати наступне наближення невідомих $x_i^{(k+1)}$, $i = 1, \dots, n$.

При цьому *ітераційна форма* запису системи має наступний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \phi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \phi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \\ x_n^{(k+1)} &= \phi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}). \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Підставивши дані у рівняння (5.3) нове наближення невідомих і виконавши обчислення, знаходимо нові значення невідомих і т.д. Це відповідає послідовності розрахунків за *методом простої ітерації*. Більш ефективним по показниках збіжності є модифікація методу простої ітерації – *метод Зейделя*.

Відмінність методу Зейделя полягає в тому, що для визначення чергового $(k+1)$ наближення i -го невідомого $x_i^{(k+1)}$ використовуються $(k+1)$ наближення невідомих з номерами меншими за i , тобто $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$, які обчислені на цій же $(k+1)$ -й ітерації, а також k -ті наближення невідомих $x_{i+1}^{(k)}, x_{i+2}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ з номерами більшими за i , що обчислені на попередній k -ій ітерації.

Система рівнянь (5.3) при розв'язуванні її методом Зейделя набуває наступного вигляду:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \phi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \phi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{n-1}^{(k+1)} &= \phi_{n-1}(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}), \\ x_n^{(k+1)} &= \phi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Ітерації повторюються доти, поки не стане виконуватись умова (1.6) для *всіх* невідомих, або умова (1.7) – для *всіх* рівнянь системи.

5.2. ОСНОВНА ПОСЛІДОВНІСТЬ ДІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ СЛАР МЕТОДОМ ЗЕЙДЕЛЯ

Основна послідовність дій при розв'язуванні СЛАР (систем лінійних алгебраїчних рівнянь) методом Зейделя наступна:

1. Перетворення вихідної системи у форму (5.2) і запис її в ітераційній формі (5.4).
2. Визначення початкового наближення невідомих $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$.

У випадку системи двох рівнянь з двома невідомими, початкові наближення коренів і їх кількість можна знайти, виконавши побудову графіків для кожного рівняння системи на площині $x_1 - x_2$. На Рис. 9. представлено експериментальну залежність для кожного рівняння системи на площині $x_1 - x_2$.

Отримаємо:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0; \\ f_2(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned}$$

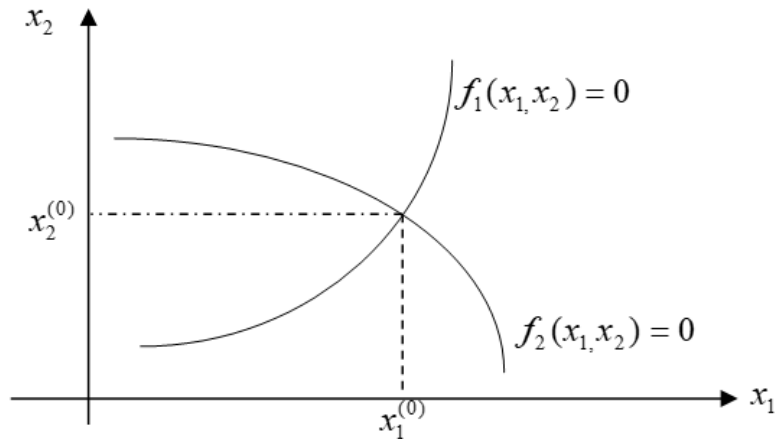


Рис. 9. Експериментальна залежність для кожного рівняння системи на площині $x_1 - x_2$.

Слід відмітити, що координати x_1 і x_2 точок перетину графіків відповідають значенням коренів системи рівнянь і можуть бути прийняті як їх початкові наближення.

3. Обчислення наступного наближення невідомих.

Підставляємо вибрані наближення коренів (на 1-й ітерації – це початкові наближення) у перше рівняння системи (5.4) і обчислюємо $x_1^{(k+1)}$. Із другого рівняння отримаємо $x_2^{(k+1)}$, використовуючи нове значення $x_1^{(k+1)}$ і наближення невідомих із попередньої ітерації $x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$. Із наступних рівнянь отримаємо $(k+1)$ -і наближення всіх інших невідомих.

4. Контроль завершення ітераційного процесу досягається за умови досягнення заданої точності ε . Контроль виконується по нев'язках рівнянь системи при чергових наближеннях невідомих. Для всіх рівнянь повинні виконуватись наступні умови. Отримаємо:

$$\begin{aligned}
 & \left| f_1(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}) \right| \leq \varepsilon \\
 & \left| f_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}) \right| \leq \varepsilon \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & \left| f_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}) \right| \leq \varepsilon
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

Якщо точність досягнута, то обчислені на цій ітерації наближення коренів $x_i^{(k+1)}$ ($i=1, \dots, n$) є розв'язком системи рівнянь із заданою точністю ε . Якщо умови не виконуються, то ітераційний розрахунок повторюється спочатку і починається із пункту 3 при новому наближенні коренів.

5.3. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР МЕТОДОМ ЗЕЙДЕЛЯ

Знайти корені системи 3-х нелінійних рівнянь з трьома невідомими. Точність $\varepsilon = 0.01$.

$$\begin{cases} x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 = 0.1 \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 = -0.2 \\ x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 0.3 \end{cases}$$

Система рівнянь у формі (5.1):

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 - 0.1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 + 0.2 = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 0.3 = 0 \end{cases}$$

Перетворюємо систему у форму (5.2):

$$\begin{cases} x_1 = -x_1^2 + 2x_2x_3 + 0.1 \\ x_2 = x_2^2 - 3x_1x_3 - 0.2 \\ x_3 = -x_3^2 - 2x_1x_2 + 0.3 \end{cases}$$

Записуємо систему в ітераційній формі по методу Зейделя:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -(x_1^{(k)})^2 + 2 \cdot x_2^{(k)} \cdot x_3^{(k)} + 0.1 \\ x_2^{(k+1)} = (x_2^{(k)})^2 - 3 \cdot x_1^{(k+1)} \cdot x_3^{(k)} - 0.2 \\ x_3^{(k+1)} = -(x_3^{(k)})^2 - 2 \cdot x_1^{(k+1)} \cdot x_2^{(k+1)} + 0.3 \end{cases}$$

Вибираємо початкові наближення невідомих $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$.

Ітерація 1.

Визначаємо перші наближення невідомих. Отримаємо:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -(x_1^{(0)})^2 + 2 \cdot x_2^{(0)} \cdot x_3^{(0)} + 0.1 = 0.1; \\ x_2^{(1)} &= (x_2^{(0)})^2 - 3 \cdot x_1^{(1)} \cdot x_3^{(0)} - 0.2 = -0.2; \\ x_3^{(1)} &= -(x_3^{(0)})^2 - 2 \cdot x_1^{(1)} \cdot x_2^{(1)} + 0.3 = -0.16. \end{aligned}$$

Нев'язки рівнянь при цих наближеннях набудуть наступного вигляду.
Отримаємо:

$$f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) = x_1^{(1)} + (x_1^{(1)})^2 - 2x_2^{(1)} \cdot x_3^{(1)} - 0.1 = 0.1 + (0.1)^2 - 2 \cdot (-0.2)(-0.16) - 0.1 = -0.054$$

$$f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) = x_2^{(1)} - (x_2^{(1)})^2 + 3 \cdot x_1^{(1)} \cdot x_3^{(1)} + 0.2 = -0.2 - (-0.2)^2 + 3 \cdot 0.1 \cdot (-0.16) + 0.2 = -0.088$$

$$f_3(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) = x_3^{(1)} + (x_3^{(1)})^2 + 2 \cdot x_1^{(1)} \cdot x_2^{(1)} - 0.3 = -0.16 + (-0.16)^2 + 2 \cdot 0.1 \cdot (-0.2) - 0.3 = -0.4744$$

Слід відмітити, що нев'язки рівнянь дорівнюють:
 $|f_1^{(1)}| > \varepsilon$, $|f_2^{(1)}| > \varepsilon$, $|f_3^{(1)}| > \varepsilon$, тому виконуємо наступну ітерацію при нових значеннях невідомих. Обчислення повторюються до досягнення заданої точності.

ЛЕКЦІЯ 6

Тема: МЕТОД НЬЮТОНА-РАФСОНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СНАР

6.1. ОСНОВНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ МЕТОДІВ НЬЮТОНА-РАФСОНА

Метод має відносно нескладний алгоритм обчислень і забезпечує швидку збіжність ітераційного процесу, яка мало залежить від розмірності задачі.

Суть методу полягає у послідовній заміні на кожній ітерації розрахунку вихідної нелінійної системи рівнянь допоміжною лінійною, розв'язування якої дозволяє визначити чергові наближення невідомих (*лінійаризація*).

Відмінність методу Ньютона-Рафсона для розв'язування систем нелінійних рівнянь від методу Ньютона для розв'язування окремих нелінійних рівнянь полягає у переході від одномірної задачі до багатовимірної задачі.

Замість однієї невідомої величини x , нев'язки одного рівняння $F(x)$ і похідної від цього рівняння $F'(x)$ розглядаємо відповідно *вектор невідомих* X , *вектор нев'язок* рівнянь системи F і матрицю частинних похідних від рівнянь системи по всім невідомим $W(x)$ (*матриця Якобі*):

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Рекурентна формула, що дозволяє визначити наступне наближення невідомих за методом Ньютона-Рафсона, по структурі подібна до (1.4), але включає, як складові, об'єкти (6.1). Отримаємо:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)}) \cdot F(x^{(k)}) \quad (6.2)$$

Тут $x^{(k)}, x^{(k+1)}$ - вектори чергового k -го і наступного $(k+1)$ -го наближень невідомих;

$F(x^{(k)})$ - вектор нев'язок рівнянь вихідної системи при черговому наближенні $x^{(k)}$;

$W(x^{(k)})$ - матриця Якобі при черговому наближенні невідомих $x^{(k)}$.

Елементами матриці Якобі є частинні похідні від всіх рівнянь системи, записаної у формі (6.1), по всім невідомим. Кожний i -й рядок матриці

складається із похідних від одного i -го рівняння вихідної системи. Розмірність матриці Якобі дорівнює: $n \times n$.

Визначення наближень невідомих за формулою (6.2) ускладнюється необхідністю обернення матриці Якобі на кожній ітерації розрахунку, особливо якщо вона має велику розмірність.

Тому, часто для обчислення наступного наближення невідомих в методі Ньютона-Рафсона формують і розв'язують допоміжну систему лінійних рівнянь відносно поправок до невідомих величин. Ця система утворюється із рівняння (6.2) і має наступний вигляд:

$$W(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}), \quad (6.3)$$

де
$$\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}.$$

Система (6.3) лінійна відносно невідомих поправок $\Delta x^{(k)}$. У ній елементи матриці Якобі $W(x^{(k)})$ являються коефіцієнтами при невідомих Δx_i . Розв'язавши цю систему будь-яким методом, визначаємо елементи вектора поправок $\Delta x^{(k)}$ і обчислюємо вектор наступних наближень коренів, отримуємо:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \quad (6.4)$$

Нові наближення невідомих параметрів використовуються для обчислень на наступній ітерації і послідовного уточнення коренів вихідної системи нелінійних рівнянь.

6.2. ПОСЛІДОВНІСТЬ ДІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ СНАР МЕТОДОМ НЬЮТОНА-РАФСОНА

Основна послідовність дій при розв'язуванні СНАР методом Ньютона-Рафсона полягає у наступному:

а) Підготовчий етап:

1. Перетворення вихідної системи нелінійних рівнянь у форму (6.1);
2. Визначення аналітичних виразів частинних похідних від усіх рівнянь системи по всім невідомим диференціюванням відповідних рівнянь, отримуємо:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

3. Визначення структури вектора поправок невідомих Δx , вектора нев'язок F , і матриці Якобі W для заданої системи рівнянь;
4. Формування допоміжної лінійної (лінійаризованої) системи рівнянь подібно до рівняння (6.3). У загальному вигляді її можна записати:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}^{(k)} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}^{(k)} \quad (6.5)$$

б) Розв'язування системи рівнянь:

5. Вибір початкового наближення невідомих $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ (наприклад так, як це зроблено у занятті № 4);
6. Підстановка чергових наближень коренів (на 1-й ітерації – це початкові наближення) у вихідну систему рівнянь (6.1) і визначення нев'язок рівнянь $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_n^{(k)}$ при цих наближеннях;
7. Підстановка вибраних наближень коренів у виразі частинних похідних від рівнянь системи $\partial f_i / \partial x_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) і обчислення їх значень при чергових наближеннях. Формування матриці Якобі;
8. Формування лінійаризованої системи рівнянь (6.5);
9. Розв'язування цієї системи будь-яким методом і визначення поправок до невідомих $\Delta x_i^{(k)}$;
10. Обчислення наступних наближень коренів за формулою (6.4);
11. Контроль завершення ітераційного процесу буде відбуватися за умови досягнення заданої точності ε . І виконується по нев'язкам рівнянь системи відповідно до умов рівняння (6.5).

Слід відмітити, що ітерації виконані за допомогою методу Ньютона-Рафсона (включають пункти 3...11) повторюються доти, доки не стане виконуватись умова (6.5) для усіх рівнянь системи. Якщо точність досягнута, то обчислені на останній ітерації наближення коренів $x_i^{(k+1)}$ ($i = 1, \dots, n$) є розв'язком нелінійної системи рівнянь із заданою точністю ε .

6.3. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ МЕТОДОМ НЬЮТОНА-РАФСОНА

Необхідно визначити корені системи 3-х нелінійних рівнянь з трьома невідомими. Точність при цьому дорівнює: $\varepsilon = 0.01$.

Отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 = 0.1 \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 = -0.2 \\ x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 0.3 \end{cases}$$

Система у формі (6.1) набуде наступного вигляду:

$$\begin{cases} f_1 = x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 - 0.1 = 0 \\ f_2 = x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 + 0.2 = 0 \\ f_3 = x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 0.3 = 0 \end{cases}$$

Далі визначаємо частинні похідні від рівнянь системи f_1, f_2, f_3 по усім невідомим x_1, x_2, x_3 . Отримаємо наступне:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 1 + 2x_1; & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -2x_3; & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= -2x_2; \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 3x_3; & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 1 - 2x_2; & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= 3x_1; \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= 2x_2; & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} &= 2x_1; & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} &= 1 + 2x_3; \end{aligned}$$

Після сого формуємо матрицю Якобі. Отримаємо:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2x_1 & -2x_3 & -2x_2 \\ 3x_3 & 1 - 2x_2 & 3x_1 \\ 2x_2 & 2x_1 & 1 + 2x_3 \end{bmatrix};$$

Формуємо лінійаризовану систему рівнянь:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}^{(k)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix}^{(k)} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}^{(k)},$$

$$\begin{bmatrix} 1+2x_1 & -2x_3 & -2x_2 \\ 3x_3 & 1-2x_2 & 3x_1 \\ 2x_2 & 2x_1 & 1+2x_3 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix}^{(k)} = - \begin{bmatrix} x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 - 0.1 \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 + 0.2 \\ x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 0.3 \end{bmatrix}^{(k)}$$

Вибираємо початкові наближення невідомих: $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$.

Ітерація 1.

Підставляємо початкові наближення у матрицю Якобі і вектор нев'язок, обчислюємо значення їх елементів. Тоді лінійаризована система рівнянь набуває наступного вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix}^{(1)} = - \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix}$$

Розв'язавши її, визначаємо вектор поправок до невідомих:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

Знаходимо наступні наближення коренів:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(0)} + \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

Нев'язки рівнянь при цих наближеннях дорівнюють:

$$\begin{aligned}
f_1^{(1)} &= x_1^{(1)} + (x_1^{(1)})^2 - 2x_2^{(1)} \cdot x_3^{(1)} - 0.1 = 0.1 + 0.1^2 - 2 \cdot (-0.2) \cdot (0.3) - 0.1 = 0.13 \\
f_2^{(1)} &= x_2^{(1)} - (x_2^{(1)})^2 + 3x_1^{(1)} \cdot x_3^{(1)} + 0.2 = -0.2 - (-0.2)^2 + 3 \cdot 0.1 \cdot 0.3 + 0.2 = 0.05 \\
f_3^{(1)} &= x_3^{(1)} + (x_3^{(1)})^2 + 2x_1^{(1)} \cdot x_2^{(1)} - 0.3 = 0.3 + 0.3^2 + 2 \cdot 0.1 \cdot (-0.2) - 0.3 = 0.05
\end{aligned}$$

Нев'язки рівнянь $|f_1^{(1)}| > \varepsilon, |f_2^{(1)}| > \varepsilon, |f_3^{(1)}| > \varepsilon$, тому виконуємо наступну ітерацію.

Ітерація 2.

Підставляємо знайдені наближення коренів у матрицю Якобі і вектор нев'язок і обчислюємо значення їх елементів, отримаємо:

$$\begin{bmatrix} 1+2 \cdot 0.1 & -2 \cdot 0.3 & -2 \cdot (-0.2) \\ 3 \cdot 0.3 & 1-2 \cdot (-0.2) & 3 \cdot 0.1 \\ 2 \cdot (-0.2) & 2 \cdot 0.1 & 1+2 \cdot 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix}^{(2)} = - \begin{bmatrix} 0.1+0.1^2-2 \cdot (-0.2) \cdot 0.3-0.1 \\ (-0.2)-(-0.2)^2+3 \cdot 0.1 \cdot 0.3+0.2 \\ 0.3+0.3^2+2 \cdot 0.1 \cdot (-0.2)-0.3 \end{bmatrix}$$

Лінійаризована система рівнянь набуває наступного вигляду:

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.6 & 0.4 \\ 0.9 & 1.4 & 0.3 \\ -0.4 & 0.2 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix}^{(2)} = - \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Розв'язуємо отриману систему лінійних рівнянь і визначаємо чергове наближення вектора поправок до невідомих:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.0624 \\ 0.056 \\ -0.0538 \end{bmatrix}$$

Наступні наближення коренів нелінійної системи рівнянь набувають вигляду:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{(1)} + \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0624 \\ 0.056 \\ -0.0538 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0376 \\ -0.144 \\ 0.2462 \end{bmatrix}$$

Нев'язки рівнянь системи при цих наближеннях будуть дорівнювати:

$$f_1^{(2)} = x_1^{(2)} + (x_1^{(2)})^2 - 2x_2^{(2)}x_3^{(2)} - 0.1 = 0.0376 + 0.0376^2 - 2 \cdot (-0.144) \cdot 0.2462 - 0.1 = 0.0099$$

$$f_2^{(2)} = x_2^{(2)} - (x_2^{(2)})^2 + 3x_1^{(2)}x_3^{(2)} + 0.2 = (-0.144) - (-0.144)^2 + 3 \cdot 0.0376 \cdot 0.2462 + 0.2 = 0.063$$

$$f_3^{(2)} = x_3^{(2)} + (x_3^{(2)})^2 + 2x_1^{(2)}x_2^{(2)} - 0.3 = 0.2462 + 0.2462^2 + 2 \cdot 0.0376 \cdot (-0.144) - 0.3 = -0.00402$$

Отже, нев'язки набудуть наступного вигляду: $|f_1^{(2)}| < \varepsilon, |f_2^{(2)}| > \varepsilon, |f_3^{(2)}| < \varepsilon$ - умови завершення ітераційного процесу виконуються не для всіх рівнянь, тому необхідні наступні ітерації.

ЛЕКЦІЯ №7

Тема: ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

7.1. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Інтерполяція функцій полягає у наближеній заміні заданої функції іншою функцією, більш простою за структурою, і визначенні відповідного аналітичного виразу.

Інтерполяція використовується, коли функції задані *таблицно* і є невідомий їх аналітичний вираз, або якщо функції мають *складні* аналітичні вирази і обчислення їх значень при довільному значенні аргумента на заданому відрізку неможливе або занадто складне. При цьому виконується приблизна заміна таких функцій функцією простої структури.

Спрощена *задача інтерполяції* функції однієї змінної $y = f(x)$ полягає у наступному. Функція $y = f(x)$ задана *таблицно*, тобто на відрізку $[a, b]$ задано $(n+1)$ у точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, а також відомі значення функції у цих точках, отримаємо:

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n.$$

Після чого отримаємо:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	..	y_n

Необхідно визначити функцію $F(x)$, яка в точках x_i має ті ж значення, що і функція $f(x)$, тобто:

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, F(x_2) = y_2, \dots, F(x_n) = y_n, \quad (7.1)$$

Слід відмітити, що точки x_i ($i = 0, \dots, n$) називаються *вузлами інтерполяції*, функція $F(x)$ - *інтерполююча* функція. Графічно це означає, що крива $y = F(x)$ повинна проходити через задану систему точок $M_i(x_i, y_i)$, $i = 0, \dots, n$, тобто у цих точках вона повинна співпадати із функцією $y = f(x)$.

На рис. 10 представлено інтерполяційну залежність функції $y = F(x)$.

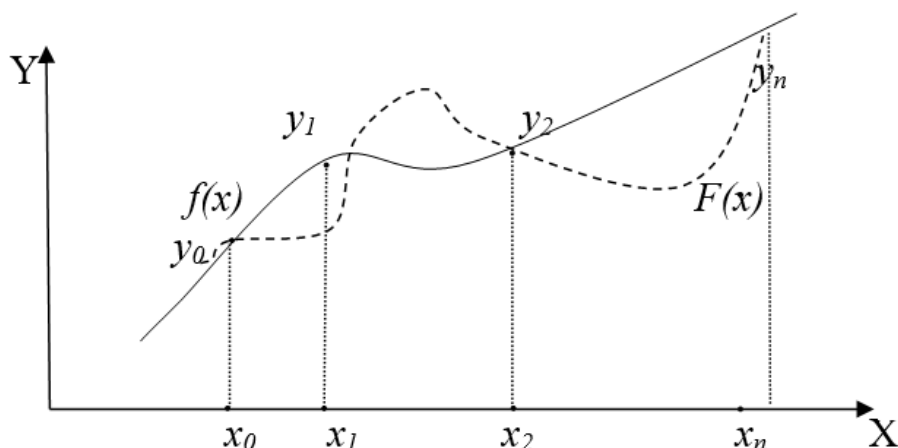


Рис. 10. Інтерполяційна залежність функції $y = F(x)$

Для забезпечення однозначності розв'язування задачі інтерполяції, функцію $F(x)$ можна вибрати у вигляді полінома $P_n(x)$ ступеня не вищого n , який задовольняється наступним умовам рівняння (6.1):

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n. \quad (7.2)$$

Варто зазначити, що цей інтерполюючий поліном $P_n(x)$ зазвичай використовується для приблизного обчислення значень функції $f(x)$ при значеннях x , відмінних від заданих вузлів інтерполяції x_i ($i = 0, \dots, n$).

У цьому випадку для інтерполяції функції використовується *інтерполяційний поліном Лагранжа*. Отримаємо:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, \quad (7.3)$$

де $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ - задані вузли інтерполяції,

$y_0, y_1, \dots, y_i, \dots, y_n$ - відомі значення функції, що інтерполюються функцією $y = f(x)$, у цих вузлах,

n - кількість відрізків, на які розділений вузлами інтерполяції інтервал $[a, b]$.

При заданому $(n+1)$ вузлі інтерполяції, що *довільно* розташовані на інтервалі $[a, b]$, поліном $L_n(x)$ повинен мати у цих точках ті ж значення, що і функція, яка інтерполюється $y = f(x)$.

На Рис. 11 представлено інтерполяційну залежність, яка виконана за допомогою поліному Лагранжа.

$$L_n(x_i) = y_i; \quad i=0, 1, \dots, n.$$

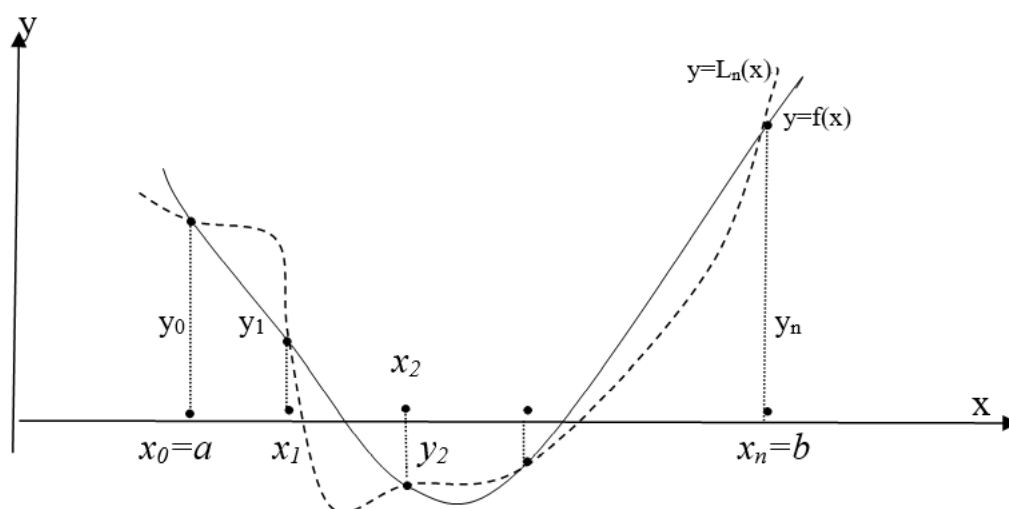


Рис. 11. Інтерполяційна залежність, яка виконана за допомогою поліному Лагранжа

Поліном Лагранжа має загальний характер, застосовується при довільному розташуванні вузлів інтерполяції на заданому відрізку $[a, b]$.

При $n = 1$ формула Лагранжа (7.3) перетворюється на рівняння *прямої* лінії, яка проходить через 2 точки. Отримаємо:

$$L = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

При $n = 2$ отримуємо рівняння параболи, яка проходить через 3 точки:

$$L = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

7.2. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ БАГАТОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Нехай відомі значення функції f в $n+1$ різних точках: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. ($x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$): $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$. Наприклад, ці значення знайдені експериментально або отримані у результаті розрахунків. Виникає задача наближено відбудувати функцію f у довільній точці x .

Для розв'язання цієї задачі будується алгебраїчний багаточлен $L_n(x)$

степеня n , який у точках x_i приймає ті ж значення y_i , що й функція $f(x)$, тобто:

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots, n).$$

Такий багаточлен називають **інтерполяційним**. Точки x_i ($i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) називають **вузлами інтерполяції**.

Тоді необхідно шукати інтерполяційний багаточлен у вигляді лінійної комбінації багаточленів степеня n , отримаємо:

$$L_n(x) = y_0 \cdot l_0(x) + y_1 \cdot l_1(x) + \dots + y_n \cdot l_n(x) \quad (7.4)$$

При цьому вимагатимемо, щоб кожен багаточлен $l_i(x)$ обертався в нуль в усіх вузлах інтерполяції, за винятком одного i -го вузла, де він повинен дорівнювати одиниці. Легко перевірити, що цим умовам задовольняється багаточлен наступного вигляду, отримаємо:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (7.5)$$

Підставляючи вираз (7.4) у вираз (7.3), отримаємо наступне співвідношення:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (7.6)$$

Інтерполяційний багаточлен, представлений у вигляді (7.6), називають **інтерполяційним багаточленом Лагранжа**, а функції $l_i(x)$, представлена у вигляді (3), – **лагранжєвими коефіцієнтами**.

Окремі випадки:

Лінійна інтерполяція. За $n = 1$ (інтерполюємо за двома точками), отримаємо:

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Квадратична інтерполяція. За $n = 2$ (інтерполюємо за трьома точками), отримаємо:

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

7.3. ПРИКЛАД ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ФУНКЦІЇ ПОЛІНОМОМ ЛАГРАНЖА

Для функції задані вузли інтерполяції ($n = 3$):

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0,25; \quad x_2 = 0,5; \quad x_3 = 1.$$

Відомі точні значення функції в цих точках набудуть наступного вигляду:

$$y_0 = 1; \quad y_1 = 0.7071; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = -1.$$

Визначити аналітичний вираз цієї функції, використовуючи інтерполяційний поліном Лагранжа.

Застосовуємо формулу (7.3) і отримуємо:

$$\begin{aligned} L_3 &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ &+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \\ &= 1 \frac{(x-0.25)(x-0.5)(x-1)}{(0-0.25)(0-0.5)(0-1)} + 0.7071 \frac{(x-1)(x-0.5)(x-1)}{(0.25-0)(0.25-0.5)(0.25-1)} + \\ &+ 0 \frac{(x-0)(x-0.25)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-0.25)(0.5-1)} - 1 \frac{(x-0)(x-0.25)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.25)(1-0.5)} = \\ &= 4.4181x^3 - 6.6772x^2 + 0.2091x + 1. \end{aligned}$$

Сформований вираз є інтерполюючим поліномом Лагранжа для заданої функції (використані значення функції $y = \cos \pi x$).

Обчислимо значення поліному L_3 у вузлах інтерполяції і порівняємо їх з точними значеннями, отримаємо:

Вузли інтерполяції	x	0	0,25	0,5	1
Задана функція	y	1	0.7071	0	-1
Інтерполяційний поліном	L_3	1	0.7071	0.0001	-1

Значення функції, що інтерполюється, і інтерполюючого поліному у вузлах інтерполяції *співпадають*, тобто обидві криві проходять через задану систему точок.

Обчислимо значення функції $y = \cos \pi x$ і поліному L_3 при значеннях x , що *не* співпадають із вузлами інтерполяції ($x \in [a, b]$). Отримаємо:

x	0.1	0.2	0.3	0.35	0.4	0.55	0.6	0.7	0.85	0.9
y	0.9511	0.809	0.5878	0.454	0.309	-0.1564	-0.309	-0.5878	-0.8991	-0.9511
L_3	0.9591	0.8121	0.5856	0.4508	0.308	-0.1546	-0.306	-0.5856	-0.8972	-0.959
$\Delta\%$	0.8	0.31	-0.22	-0.71	-0.96	-1.15	-0.97	-0.37	0.7	0.79

Інтерполяційний поліном дає значення, що незначно (похибка $|\Delta| \approx 1\%$) відрізняються від точних даних. При збільшенні кількості заданих вузлів інтерполяції i , відповідно, порядку полінома L_n збільшується і точність результату.

ЛЕКЦІЯ №8

Тема: ЧИСЛОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

8.1. ОСНОВНА ЗАДАЧА ТА ПРИНЦИП ЧИСЛОВОГО ІНТЕГРУВАННЯ

У загальному випадку звичайний визначений інтеграл безперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ можна обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца. Отримаємо:

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (8.1)$$

де $F(x)$ - першообразна функції $f(x)$, $F'(x) = f(x)$.

Він дорівнює площі фігури, обмеженої прямими $x = a$ та $x = b$, віссю абсцис X і кривою підінтегральної функції $f(x)$.

На Рис. 12 представлено інтерполяційну залежність числового інтегрування функції $f(x)$.

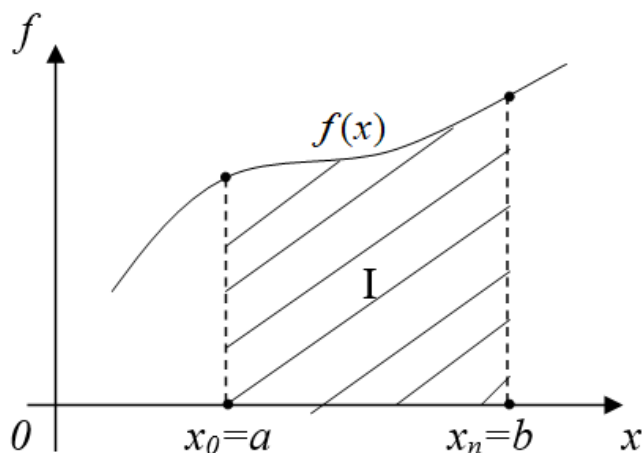


Рис. 12. Інтерполяційна залежність числового інтегрування функції $f(x)$.

Числове інтегрування застосовується, коли функція $f(x)$ задана таблично і є невідомий її аналітичний вираз, або коли визначення функції $F(x)$ неможливе, або воно дуже складна. При цьому $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ інтерполюється функцією (поліномом) простої структури $\phi(x)$, для якої визначений інтеграл обчислюється безпосередньо за простими формулами. Отримаємо:

Тоді приблизно приймається, що
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \phi(x)dx.$$

Суть методів числового інтегрування полягає в тому, що інтервал інтегрування $[a, b]$ розбивається на n менших відрізків, на кожному з яких підінтегральна крива $f(x)$ приблизно замінюється простішою функцією (наприклад лінійною). Відповідно, площа фігури під кривою $f(x)$ розбивається на n простих геометричних фігур (прямокутників, трапецій тощо), сума площ яких приблизно дорівнює площі фігури під кривою $f(x)$ і, відповідно, величині інтегралу I .

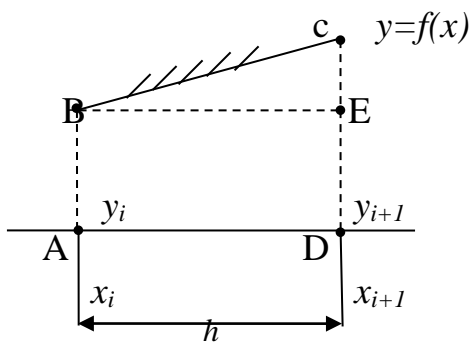
8.2. ФОРМУЛА ТРАПЕЦІЙ

Виконується лінійна апроксимація функції $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$. Інтервал інтегрування розбивається на n рівних відрізків, отримаємо:

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (8.2)$$

Кожний відрізок обмежується рівновіддаленими точками x_i ($x_i = a + i \cdot h$, $i=0, \dots, n$), значення підінтегральної функції $f(x)$ в яких $y_i = f(x_i)$ відомі, або їх можна обчислити.

Крива $y = f(x)$ на малому відрізку $(x_i - x_{i+1})$ замінюється прямою BC.



При малому h площа під кривою $f(x)$ приблизно дорівнює площі трапеції ABCD. Отримаємо:

$$I_i = h \cdot \frac{1}{2} (y_i + y_{i+1})$$

Наближене значення інтегралу I дорівнює сумі площ n таких елементарних трапецій:

$$I = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) \quad (8.3)$$

де h – крок інтегрування, який визначається за формулою (8.2);

y_0, y_1, \dots, y_n – відомі значення підінтегральної функції $f(x)$ в точках розбиття x_0, x_1, \dots, x_n .

Геометрично формула трапецій (8.3) відповідає заміні графіка підінтегральної функції $y = f(x)$ ламаною лінією.

Слід відмітити, що точність результату збільшується при збільшенні кількості відрізків розбиття на n .

8.3. ПРИКЛАД ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛУ ЗА ФОРМУЛОЮ ТРАПЕЦІЙ

Обчислити на інтервалі $[a, b]$ інтеграл функції, яка задана набором точок $M_i(x_i, y_i)$. Аналітичний вираз функції $f(x)$ невідомий.

Підінтегральна функція $f(x)$ на інтервалі $a = 0, b = 1$ задана 11-ма значеннями в точках розбиття $x_i, i = 0, \dots, 10$ (використовуються значення функції $f(x) = \sqrt{1+2x}$). Інтервал інтегрування розділений на $n = 10$ відрізків. Крок інтегрування набуде наступного вигляду, отримаємо:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_i	1	1.0954	1.1832	1.2649	1.3416	1.4142	1.4832	1.5492	1.6125	1.6733	1.7321

Обчислюємо наближене значення інтегралу за формулою трапецій:

$$I \approx \frac{h}{2} \cdot [y_0 + 2 \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9) + y_{10}] = \frac{0.1}{2} \cdot [1 + 2 \cdot (1.0954 + 1.1832 + 1.2649 + 1.3416 + 1.4142 + 1.4832 + 1.5492 + 1.6125 + 1.6733) + 1.7321] = 1.3984$$

Точне значення інтегралу дорівнює 1.3987. Похибка інтегрування складає 0.021%.

8.4. ОСНОВНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ МЕТОДУ СІМПСОНА

Метод Сімпсона – один із поширених методів числового інтегрування функцій. Аналогічно методу трапецій, інтегрування проводиться шляхом розбиття загального інтервалу інтегрування $[a, b]$ на багато дрібних відрізків. Для обчислення площі над кожним із них, через *три* послідовні ординати розбиття проводиться квадратична парабола. Тобто крива $f(x)$ на малому відрізку замінюється параболою $L(x)$, яка проходить через 3 точки: $M_i(x_i, y_i)$; $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$; $M_{i+2}(x_{i+2}, y_{i+2})$.

На Рис. 13 зображено інтерполяційну залежність методом Сімпсона.

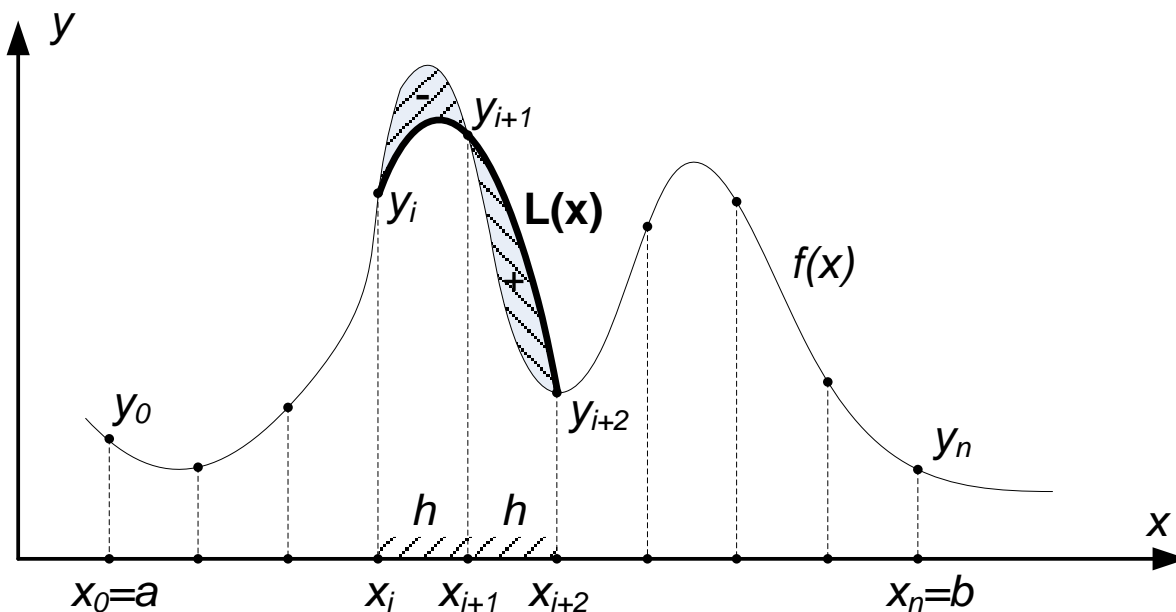


Рис. 13. Інтерполяційна залежність методом Сімпсона

Припускаємо, що кількість відрізків $n = 2m$ – парне число. Інтервал $[a, b]$ розділений на відрізки $(n+1)$ -ю рівновіддаленою точкою розбиття, отримаємо:

$$x_0 = a; x_1 = a + h; x_2 = a + 2h; \dots x_i = a + ih; \dots, x_n = b,$$

де h - крок інтегрування і дорівнює:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$$

Відомі $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ – значення підінтегральної функції у цих точках.

Тоді загальну формулу Сімпсона можна записати:

$$I = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})].$$

Слід відмітити, що формула Сімпсона дає похибку, яка дорівнює сумі площ заштрихованих фігур (з урахуванням знаків). При інтегруванні багаточленів до третього порядку включно, формула Сімпсона дає точне значення інтеграла.

8.5. ПРИКЛАД ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛУ ЗА ФОРМУЛОЮ СІМПСОНА

Обчислимо значення інтеграла функції за умовами прикладу, який розглянуто у лабораторній роботі № 7, при $n = 2m = 10$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3} [(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)] = \\ &= \frac{0.1}{3} [(1 + 1.7321) + 4(1.0954 + 1.2649 + 1.4142 + 1.5492 + 1.6733) + \\ &+ 2(1.1832 + 1.3416 + 1.4832 + 1.6125)] = 1.3987 \end{aligned}$$

Слід відмітити, що отримане значення дорівнює точному значенню інтеграла.

ЛЕКЦІЯ 9

Тема: ЧИСЛОВЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

9.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЛОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Числове (наближене) диференціювання функцій використовують у випадку, коли функція $y = f(x)$ задана таблично (тобто у вигляді масива точок з координатами $x_i, y_i; i=0,1,\dots,n$) і невідомий її аналітичний вираз, або якщо аналітичний вираз функції достатньо складний і безпосереднє диференціювання її викликає труднощі. При цьому функцію $y = f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ замінюють інтерполюючою функцією $P(x)$ (зазвичай поліномом) і припускають, що:

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx P'(x); \\ f''(x) &\approx P''(x) \\ \dots &\quad \dots \end{aligned} \tag{9.1}$$

Інтерполююча функція $P(x)$ вибирається такою, щоб похідні від неї визначались аналітично з використанням відповідних простих формул.

Для обчислення значень інтерполюючого поліному $P(x)$ і його похідних $P'(x), P''(x), \dots$ при заданому x можна застосувати правило Горнера. Поліном подається у наступному вигляді, отримаємо:

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + xa_n))\dots). \tag{9.2}$$

Обчислення починаються із внутрішніх дужок:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n, \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + x \cdot a_n = a_{n-1} + x \cdot b_n, \\ b_{n-2} &= a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n) = a_{n-2} + x \cdot b_{n-1}, \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ b_i &= a_i + x \cdot b_{i+1}, \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ b_0 &= a_0 + x \cdot b_1 = P(x). \end{aligned} \tag{9.3}$$

Слід відмітити, що послідовно обчислюючи $b_n, b_{n-1}, \dots, b_i, \dots, b_0$, отримаємо значення поліному $b_0 = P(x)$.

9.2. ЗАКОНОМІРНОСТІ ЧИСЕЛЬНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Задача чисельного диференціювання полягає у знаходженні значень похідних функції $y = f(x)$ в заданих точках у випадках, коли аналітичний вигляд функції $f(x)$ невідома (задана неявно) і є дуже складним процесом або ж функція $f(x)$ задана таблицею. Особливість чисельного підходу пояснюється наявністю дуже простих математичних формул, за допомогою яких похідні у заданих точках можна приблизно обчислити за кількома значеннями функції $f(x)$ у цих точках.

Формули чисельного диференціювання застосовуються у тих випадках, коли функція $y = f(x)$ може бути задана таблицею своїх значень $y_i = f(x_i)$ у рівновіддалених вузлах $x_i = x_0 + i \cdot h$, де $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Варто зазначити, що нумерація точок x_i для зручності запису проводиться відповідно відносної точки x_0 , у якій обчислюється похідна функції. Вибравши будь-яку множину $(n+1)$ -го вузлів, функцію $y = f(x)$ наближають інтерполяційним багаточленом $P_0(x)$. Тоді похідна від цього багаточлена буде дорівнювати $P'_n(x)$ у точці x_0 і застосовується для наближеного подання шуканої похідної $y'(x_0) = f'(x_0)$, а саме $f'(x_0) \approx P'_n(x_0)$.

Найбільш зручним інтерполяційним багаточленом для чисельного диференціювання є поліном Ньютона. На його основі отримані формули різного порядку точності залежно від кількості задіяних точок x_i .

Слід навести кілька найпростіших формул для першої похідної першого порядку, отримаємо:

- формула диференціювання вперед, отримаємо:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} \quad (9.4)$$

- формула диференціювання назад, отримаємо:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = \frac{y_0 - y_{-1}}{h} \quad (9.5)$$

- симетрична формула диференціювання набуде наступного вигляду, отримаємо:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \quad (9.6)$$

Варто зазначити, що запис формули через функцію $f(x)$ відповідає постановці задачі диференціювання, коли її аналітичний вигляд невідомий або

дуже складний. Це означає, що значення функції $f(x)$ можна розраховувати у потрібних точках x_i із кроком h . При цьому кроком h називають кроком чисельного диференціювання та підбирають залежно від поведінки функції $f(x)$ навколо точки x_0 .

Слід відмітити, що запис формули через y_i відповідає постановці задачі диференціювання, коли функція $f(x)$ задана таблицею. При цьому для крайніх точок x_i можна застосовувати формули диференціювання вперед та назад (відповідно до того, з якого вони боку), а для внутрішніх точок краще застосовувати симетричну формулу диференціювання.

Для похідних першого порядку можна застосовувати наступну *симетричну формулу диференціювання*, отримаємо:

$$f'(x_0) \approx \frac{-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}}{12h} \quad (9.7)$$

Варто також навести кілька найпростіших математичних формул для похідної другого порядку, отримаємо:

- симетричні формули диференціювання:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \quad (9.8)$$

або

$$f''(x_0) \approx \frac{-y_2 + 16y_1 - 30y_0 + 16y_{-1} - y_{-2}}{12h^2} \quad (9.9)$$

Слід відмітити, що крок чисельного диференціювання h не можна брати дуже малим, бо тоді, внаслідок виникнення похибок скруглення на комп'ютері, похибка розрахунку похідної із застосуванням формул чисельного диференціювання може бути дуже великою. Слід також пам'ятати, що значення h також краще брати залежно від величини x_0 , наприклад: $h = h_R \cdot |x_0|$, де h_R знаходиться у межах від 10^{-6} до 10^{-2} та підбирають залежно від поведінки функції $f(x)$ навколо точки x_0 .

9.3. ПРИКЛАД ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ ФУНКЦІЙ

Виконати числове диференціювання функції, заданої таблично (використовуються значення функції $y = \cos \pi x$).

У лабораторній роботі № 5 розглянутий приклад, в якому для цієї функції сформований інтерполюючий поліном Лагранжа при $n = 3$. Отримаємо:

$$L_3 = 4.4181x^3 - 6.6272x^2 + 0.2091x + 1$$

Визначимо його першу і другу похідні:

$$L_3' = 13.2543x^2 - 13.2544x + 0.2091$$

$$L_3'' = 26.5086x - 13.2544$$

Обчислимо наближені значення першої похідної у вузлах інтерполяції і порівняємо їх з точними значеннями функції, що диференціюється:

Вузли інтерполяції x	0	0.25	0.5	1
Функція, що диференціюється $y' = -\pi \sin \pi x$	0	-2.2214	-3.1416	0
Інтерполяційний поліном L_3'	0.2091	-2.2761	-3.1045	0.2091

Далі обчислюємо значення другої похідної у вузлах інтерполяції, отримаємо:

Вузли інтерполяції x	0	0.25	0.5	1
Функція, що диференціюється $y'' = -\pi \cos \pi x$	-9.8696	-6.9789	0	9.8696
Інтерполяційний поліном L_3''	-13.2544	-6.6273	0	13.2542

Після чого необхідно обчислити точні і наближені значення похідних y', L_3', y'', L_3'' при значеннях x , що не співпадають з вузлами інтерполяції ($x \in [a, b]$) і дорівнюють:

x	0.1	0.2	0.3	0.35	0.4	0.55	0.6	0.7	0.85	0.9
y'	-0.9708	-1.8466	-2.5416	-2.7992	-2.9878	-3.1029	-2.9878	-2.5416	-1.4263	-0.9708

L_3'	-0.9838	-1.9116	-2.5743	-2.8063	-2.9720	-3.0714	-2.9720	-2.5744	-1.4809	-0.9839
$\Delta\%$	1.34	3.52	1.29	0.26	-0.53	-1.02	-0.53	1.29	3.83	1.35
y''	-9.3866	-7.9847	-5.8012	-4.4807	-3.0499	1.5439	3.0499	5.8012	8.7939	9.3866
L_3''	-10.6035	-7.9527	-5.3018	-3.9764	-2.651	1.3253	2.6508	5.3016	9.2779	10.6033
$\Delta\%$	12.96	-0.4	-8.61	-11.25	-13.08	-14.16	-13.09	-8.61	5.5	12.96

Слід відмітити, що наближене диференціювання функцій дає результат з більшою похибкою, ніж інтерполяція.

ЛЕКЦІЯ 10

Тема: ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ (ЗДР)

10.1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ (ЗДР)

Диференційним називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x , функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'', \dots, y^{(n)}$. Отримаємо:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (10.1)$$

Порядок рівняння визначається найвищою похідною у його складі. Якщо функція $y = f(x)$ є функцією однієї змінної, то диференційне рівняння називається *звичайним*.

У роботі розглядаємо звичайні диференційні рівняння першого порядку, отримаємо:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (10.2)$$

або $y' = \varphi(x, y)$, якщо його можна розв'язувати відносно похідної.

Розв'язком, або інтегралом диференційного рівняння, називається будь-яка функція $y = f(x)$, яка обертає його на тотожність.

Загальним розв'язком диференційного рівняння першого порядку називається функція, яка дорівнює:

$$y = f(x, c) \quad (10.3)$$

яка залежить від однієї довільної постійної величини c і задовольняється наступним обов'язковим умовам:

1. Вона є розв'язком диференційного рівняння при будь-якому конкретному значенні c ;
2. При будь-якій початковій умові $x = x_0$ функція повинна дорівнювати заданому $y = y_0$, тобто можна знайти таке значення $c = c_0$, при якому функція $y = f(x, c_0)$ буде задовольнятися заданій початковій умові.

Графічно, загальному розв'язку ЗДР відповідає сімейство кривих, що описується рівнянням (10.3) при різних значеннях c (*інтегральні криві*).

Частковим розв'язком називається функція $y = f(x, c_0)$, яку отримаємо із загального розв'язку при вибраному відповідно до заданих початкових умов

$y|_{x=x_0} = y_0$, значенні c_0 . Йому відповідає одна із інтегральних кривих, яка проходить через задану точку початкових умов (x_0, y_0) .

Розв'язувати (проінтегрувати) диференціальне рівняння означає визначити його частковий розв'язок, що відповідає заданим початковим умовам. Розв'язок отримаємо у вигляді функції $y = f(x)$, яка при розв'язанні ЗДР числовими методами подається у табличній формі, тобто як система точок $M_i(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$.

Числові методи розв'язування ЗДР полягають у послідовному визначенні координат точок, які належать функції $y = f(x)$, починаючи від точки, яка задана початковими умовами $y|_{x=x_0} = y_0$.

Числові методи розв'язання ЗДР застосовуються тоді, коли коефіцієнти і функції в рівнянні занадто складні або задані у табличній формі, що унеможлиблює розв'язання таких рівнянь класичними аналітичними методами.

Одним із широких класів числових методів розв'язування диференціальних рівнянь є методи Рунге-Кутта. Це одноступеневі методи, в яких для обчислення значення функції y_{k+1} в точці x_{k+1} достатньо даних тільки про попередню точку (x_k, y_k) . Ці методи не потребують обчислень похідних від $\phi(x, y)$ - достатньо обчислень самої функції.

У даній роботі використовуємо один із методів цього класу – метод Ейлера.

10.2. МЕТОД ЕЙЛЕРА ДЛЯ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗДР

Вихідне рівняння записуємо у формі Коші, отримаємо:

$$y' = \phi(x, y) \quad (10.4)$$

Треба визначити наближений розв'язок цього рівняння на відрізку $[x_0, b]$ при заданих початкових умовах: $y = y_0$ при $x = x_0$. Ним буде функція $y = f(x)$, значення якої у точках x_i ($x_i \in [x_0, b]$), $i = 0, \dots, n$ обчислюємо одним із числових методів.

Ділимо відрізок $[x_0, b]$ точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ на n рівних частин. Їх величина (*крок*) буде дорівнює:

$$h = \frac{b - x_0}{n}. \quad (10.5)$$

Тоді $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = b - x_{n-1} = h$ і, відповідно,

$$x_1 = x_0 + h; x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h; \dots x_k = x_0 + kh; \dots x_n = x_0 + nh = b.$$

Відповідно до *методу Ейлера* наближені значення функції $y = f(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n обчислюються за наступною формулою:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \phi(x_k, y_k) \quad (10.6)$$

Тут $\phi(x_k, y_k)$ - значення функції згідно рівняння (10.4) у точці (x_k, y_k) .

Варто зазначити, що даний метод має велику похибку і часто виявляється нестійким.

Важливим також є, що метод Ейлера відноситься до методів Рунге-Кутта першого порядку. Порядок методу визначається ступенем кроку h , у якому він присутній в аналітичних виразах відповідних методів.

10.3. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ МЕТОДОМ ЕЙЛЕРА

Визначити наближене розв'язування диференційного рівняння 1-го порядку $x = y' - y$ на інтервалі $[0;1]$, яке задовольняється початковим умовам: $y_0 = 1$ при $x_0 = 0$.

Запишемо це рівняння у формі Коші згідно математичного рівняння (10.4). Отримаємо:

$$y' = x + y.$$

У цьому рівнянні права частина буде дорівнювати: $\phi(x, y) = x + y$.

Ділимо інтервал $[0;1]$ на $n = 10$ рівних частин точками $x_0 = 0, x_1 = 0.1, \dots, x_{10} = 1$. Крок $h = (1 - 0) / 10 = 0.1$.

Для розв'язування рівняння треба обчислити значення y_1, y_2, \dots, y_{10} функції $y = f(x)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_{10} .

Застосовуємо формулу (10.6). Для заданого рівняння вона набуває наступного вигляду, отримаємо:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h \cdot (x_k + y_k) \\ x_0 &= 0, \\ y_1 &= y_0 + h \cdot (x_0 + y_0) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.100; \\ x_1 &= x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1 \\ y_2 &= y_1 + h \cdot (x_1 + y_1) = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.220; \end{aligned}$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot (x_2 + y_2) = 1.22 + 0.1(0.2 + 1.22) = 1.362;$$

... ..

$$x_9 = x_8 + h = 0.8 + 0.1 = 0.9,$$

$$y_{10} = y_9 + h \cdot (x_9 + y_9) = 2.8091 + 0.1(0.9 + 2.8091) = 3.1875.$$

Після чого, результати обчислень запишемо у таблицю:

Точка	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	1	1.1	1.22	1.362	1.5282	1.72	1.9431	2.1974	2.4872	2.8159	3.1875

Слід відмітити, що отримали наближені значення функції $y = f(x)$ у заданих точках. Точним аналітичним розв'язком є функція $y = 2e^x - x - 1$. Більш точне її значення набуде наступного вигляду: $y|_{x=1.0} = 3.466$.

Похибка складає $\Delta E \approx 7.25\%$. Слід також зазначити, що збільшення n дозволяє отримати більш точний результат.

10.4. ЧИСЛОВЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗДР МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Загальні положення і постановка задачі розв'язування звичайних диференційних рівнянь (ЗДР) першого порядку числовими методами описані у попередній роботі.

Метод Рунге-Кутта 4-го порядку є найбільш поширеним методом розв'язання ЗДР і систем рівнянь. Його перевага - висока точність результату. Відповідно до методу, наближені значення функції $y = f(x)$, яка є розв'язком диференційного рівняння, в точках x_1, x_2, \dots, x_n обчислюються за наступним переліком формул:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (10.7)$$

$$k_1 = \phi(x_k, y_k),$$

$$k_2 = \phi(x_k + h/2, y_k + h \cdot k_1 / 2),$$

$$k_3 = \phi(x_k + h/2, y_k + h \cdot k_2 / 2),$$

$$k_4 = \phi(x_k + h, y_k + h \cdot k_3).$$

де

Крок інтегрування h обчислюється за формулою (10.5). Його правильний вибір дозволяє підвищити точність результату. Існує грубе оціночне правило: якщо співвідношення буде дорівнювати:

$$\frac{|k_2 - k_3|}{|k_1 - k_2|} \quad (10.8)$$

стає великим (більше кількох сотих), то крок інтегрування необхідно зменшити.

10.5. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Визначити наближене розв'язування диференційного рівняння 1-го порядку $y' - x - y = 0$ на відрізку $[0; 1]$, яке задовольняється початковим умовам: $y_0 = 1$ при $x_0 = 0$.

Запишемо рівняння у формі Коші: $y' = x + y$.

Ділимо відрізок $[0; 1]$ на $n = 10$ частин точками $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, ..., $x_{10} = 1.0$. Обчислюємо крок: $h = (1 - 0) / 10 = 0.1$.

Точним розв'язком рівняння є функція $y = 2e^x - x - 1$. Її значення в точках розбиття x_i ($i = 0, 1, \dots, 10$). Отримаємо:

Точка	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_i	1.0	1.1103	1.2428	1.3997	1.5836	1.7974	2.0442	2.3275	2.6511	3.0192	3.4365

Для наближеного розв'язування рівняння (обчислення значень функції y_1, y_2, \dots, y_{10} в точках розбиття) методом Рунге-Кутта 4-го порядку, застосовуємо формулу (10.7). Для заданого рівняння вона набуває вигляду:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

де

$$k_1 = x_k + y_k,$$

$$k_2 = (x_k + h/2) + (y_k + h \cdot k_1 / 2),$$

$$k_3 = (x_k + h/2) + (y_k + h \cdot k_2 / 2),$$

$$k_4 = (x_k + h) + (y_k + h \cdot k_3).$$

Обчислюємо значення функції:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = x_0 + y_0 = 0 + 1 = 1,$$

$$k_2 = (x_0 + h/2) + (y_0 + h \cdot k_1 / 2) = 0 + \frac{0.1}{2} + 1 + \frac{0.1 \cdot 1}{2} = 1.1,$$

$$k_3 = (x_0 + h/2) + (y_0 + h \cdot k_2 / 2) = 0 + \frac{0.1}{2} + 1 + \frac{0.1 \cdot 1.1}{2} = 1.105,$$

$$k_4 = (x_0 + h) + (y_0 + h \cdot k_3) = 0 + 0.1 + 1 + 0.1 \cdot 1.105 = 1.2105,$$

$$y_1 = 1 + \frac{0.1}{6} (1 + 1 \cdot 1.1 + 2 \cdot 1.105 + 1.2105) = 1.1103$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = x_1 + y_1 = 0.1 + 1.1103 = 1.2103,$$

$$k_2 = (x_1 + h/2) + (y_1 + h \cdot k_1 / 2) = 0.1 + \frac{0.1}{2} + 1.1103 + \frac{0.1 \cdot 1.2103}{2} = 1.3208,$$

$$k_3 = (x_1 + h/2) + (y_1 + h \cdot k_2 / 2) = 0.1 + \frac{0.1}{2} + 1.1103 + \frac{0.1 \cdot 1.3208}{2} = 1.3263,$$

$$k_4 = (x_1 + h) + (y_1 + h \cdot k_3) = 0.1 + 0.1 + 1.1103 + 0.1 \cdot 1.3263 = 1.4429,$$

$$y_2 = 1.1103 + \frac{0.1}{6} (1.2103 + 2 \cdot 1.3208 + 2 \cdot 1.3263 + 1.4429) = 1.2428.$$

Аналогічно обчислюємо значення функції y_3, y_4, \dots, y_{10} в інших точках і результати записуємо у таблицю:

Точка	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_i	1.0	1.1103	1.2428	1.3997	1.5836	1.7974	2.0442	2.3275	2.6511	3.0192	3.43653

Слід відмітити, що отримані результати співпадають з точним розв'язком диференційного рівняння в точках розбиття x_i .

ЛЕКЦІЯ 11

Тема: ВИЗНАЧЕННЯ ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЙ ГРАДІЄНТНИМ МЕТОДОМ

11.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЙ ГРАДІЄНТНИМ МЕТОДОМ

Екстремумом функції багатьох змінних $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ називається її мінімальне або максимальне значення. У загальному випадку функція може мати декілька екстремумів. Один із них – головний - називається *глобальним*, інші - *локальні*. Задача пошуку екстремумів зводиться до їх локалізації і уточнення значень параметрів x_i та функції $F(X)$ в точці екстремуму. Сукупність параметрів $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначає *координати* точки екстремуму.

На параметри x_i накладаються, зазвичай, *обмеження* у вигляді нерівностей $a \leq x_i \leq b$. В межах відрізка $[a; b]$ функцію вважаємо унімодальною, тобто такою, що має один екстремум. За таких умов для пошуку екстремуму функції найчастіше застосовують методи можливих напрямків. Це багатокрокові методи, у яких, в результаті виконання ряду кроків оптимізації ΔX у просторі параметрів, формується послідовність точок $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$, що збігається до точки екстремуму функції $X^{(*)}$. Їх сукупність складає *траєкторію спуску* до мінімуму (максимуму) функції.

На траєкторії спуску кожна наступна точка $X^{(k+1)}$ повинна бути *кращою* за попередню точку $X^{(k)}$ по критерію оптимальності:

- $F(X^{(k+1)}) < F(X^{(k)})$ - значення функції повинно зменшуватись, якщо визначається її мінімум, і $F(X^{(k+1)}) > F(X^{(k)})$ - значення функції збільшується, якщо визначається її максимум. Тоді кроки оптимізації вважаються успішними.

Координати кожної точки на траєкторії спуску обчислюються за рекурентною формулою:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + h^{(k)} \cdot \Delta X^{(k)}, \quad (11.1)$$

де $X^{(k)}, X^{(k+1)}$ - вектори координат k -ї і наступної $(k+1)$ -ї точок траєкторії;

$h^{(k)}$ - коефіцієнт кроку. Дозволяє впливати на довжину кроку при переході від точки k до точки $(k+1)$. У роботі приймається як постійна величина $h = const$;

$\Delta X^{(k)}$ - крок, задає напрям кроку.

11.2. ГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД

Градiєнтом функції $F(X)$ в точці $X^{(k)}$ називається вектор, ортогональний до дотичної та до поверхні рівня функції в цій точці площини і направлений в сторону найшвидшого збільшення функції. Позначається $\nabla F(X)$. Протилежний йому напрям *антиградієнта* ($-\nabla F(X^{(k)})$) показує шлях найшвидшого зменшення функції.

Визначений таким чином напрям вектора-градієнта (антиградієнта) дозволяє виконувати оптимальні кроки і спрямовувати траєкторію спуску в бік екстремуму функції, який треба знайти. Саме тому в градiєнтному методі *кроки оптимізації* виконуються вздовж вектора градiєнта:

$$\Delta X^{(k)} = \pm \nabla F(X^{(k)}) \quad (11.2)$$

Знак залежить від виду екстремуму функції, який визначається: знак «+» – при пошуку максимуму функції, знак «-» – мінімуму.

Вектор-градієнт $\nabla F(X)$ визначається через похідні функції $F(X)$ по всім незалежним змінним, отримаємо:

$$\nabla F(X) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\} \quad (11.3)$$

Вони є *складовими вектора*, визначають його напрям і довжину. Для визначення чергового кроку $\Delta X^{(k)}$ необхідно обчислювати згідно рівняння (11.2), значення похідних $\frac{\partial F}{\partial x_i}$.

Із врахуванням рівнянь (11.1) і (11.2) *рекурентна формула градiєнтного методу* набуває наступного вигляду, отримаємо:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} \pm h^{(k)} \cdot \nabla F(X^{(k)}) \quad (11.4)$$

Вона дозволяє отримати координати чергової $(k+1)$ -ї точки на траєкторії спуску до екстремуму функції.

При наближенні до екстремуму функції довжина вектора-градієнта зменшується. В точці екстремуму вона дорівнює нулю. Якщо чергова точка траєкторії $X^{(k+1)}$ наблизилась до екстремуму $X^{(*)}$ в межах заданої точності ε , то виконуватиметься наступна умова:

$$\|\nabla F(X^{(k+1)})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2} \leq \varepsilon \quad (11.5)$$

де $\|\nabla F(X^{(k+1)})\|$ - k - норма вектора, яка відповідає його довжині. Обчислюється як корінь із суми квадратів складових вектора $\partial F / \partial x_i$.

Слід відмітити, що координати цієї точки (точки екстремуму) дорівнюють: $X^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})$ і значення функції в ній дорівнюють: $F(X^{(k+1)})$ і є розв'язком задачі.

11.3. ЗАГАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ГРАДІЄНТНИМ МЕТОДОМ

Загальний алгоритм визначення екстремуму функції градієнтним методом полягає у наступному:

1. Підготовчий етап:
визначення структури вектора-градієнта і аналітичних виразів його складових $\partial F / \partial x_i$ диференціюванням функції $F(X)$ по усім змінним x_i ;
2. Вибір коефіцієнту кроку h ;
3. Вибір і завдання початкових значень елементів вектора параметрів $X^{(0)} \rightarrow X^{(k)}$, які є координатами початкової точки траєкторії спуску. Обчислення значення функції в цій точці $F(X^{(k)})$;
4. Обчислення значень похідних функції (складових вектора-градієнта) в черговій точці $X^{(k)}$: $\partial F^{(k)} / \partial x_i$;
5. Контроль завершення відбувається відповідно до умов (11.5). Якщо ці умови не виконуються – перехід до п. 6, якщо виконуються – до п. 7;
6. Виконання *кроку* оптимізації, заданого складовими вектора-градієнта відбувається відповідно до рівнянь (11.4), визначення координат чергової точки $X^{(k+1)}$. Отримаємо:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - h \cdot \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$X^{(k+1)} \rightarrow X^{(k)}.$$

Обчислення значення функції у новій точці.

Повернення до п. 4;

7. Точка траєкторії спуску $X^{(k+1)}$, координати якої $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}$ визначені в результаті останнього кроку, є шуканим екстремумом функції із заданою точністю ε .

Обчислюємо значення функції в цій точці $F(X^{(k+1)})$.

11.4. ПРИКЛАД ВИЗНАЧЕННЯ ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЇ ГРАДІЄНТНИМ МЕТОДОМ

Знайти *мінімум* функції двох змінних $F(X) = F(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 2x_1x_2 + 5$ з точністю $\varepsilon = 0.01$ в інтервалі $[0.5; 1.5]$ для x_1 і $[0; 1.0]$ для x_2 .

1. Визначаємо структуру вектора-градієнта. Вектор параметрів $X = \{x_1, x_2\}$, тоді вектор-градієнт має дві складові:

$$\nabla F = \left\{ \frac{dF}{dx_1}, \frac{dF}{dx_2} \right\}.$$

$$\frac{dF}{dx_1} = 1 - 2x_2; \quad \frac{dF}{dx_2} = 2 - 2x_1$$

$$\nabla F = \{1 - 2x_2; 2 - 2x_1\}.$$

Приймаємо коефіцієнт кроку $h = 0.2$;

2. Як початкові наближення параметрів беремо значення на кінцях інтервалів $x_1^{(0)} = 0.5$; $x_2^{(0)} = 1.0$. $X^0 = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\} = \{0.5; 1.0\}$.
3. Значення функції в цій точці:

$$\begin{aligned} F(X^{(0)}) &= F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)} - 2x_1^{(0)}x_2^{(0)} + 5 = \\ &= 0.5 + 2 \times 1.0 - 2 \times 0.5 \times 1.0 + 5 = 6.5 \end{aligned}$$

Виконуємо крок оптимізації:

4. Вектор-градієнт $\nabla F(X^{(0)})$ в початковій точці $X^{(0)}$:

$$\frac{dF}{dx_1} = 1 - 2x_2^{(0)} = 1 - 2 \times 1.0 = -1.0$$

$$\frac{dF}{dx_2} = 2 - 2x_1^{(0)} = 2 - 2 \times 0.5 = 1.0$$

$$\nabla F(X^{(0)}) = \{-1.0; 1.0\}$$

5. Контроль завершення відбувається відповідно до рівнянь (11.5):

$$\|\nabla F(X^{(0)})\| = \sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 1.414 \gg \varepsilon.$$

Задана точність не досягнута, необхідно виконати крок оптимізації ($k=1$).

6. Координати наступної точки траєкторії спуску відповідно до (11.4).
Отримаємо:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= X^{(0)} - h \cdot \nabla F(X^{(0)}) \\ x_1^{(1)} &= x_1^{(0)} - 0.2 \times \frac{dF}{dx_1} = 0.5 - 0.2 \times (-1) = 0.7, \\ x_2^{(1)} &= x_2^{(0)} - 0.2 \times \frac{dF}{dx_2} = 1.0 - 0.2 \times 1 = 0.8; \end{aligned}$$

Значення функції в цій точці:

$$\begin{aligned} F(X^{(1)}) &= x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} - 2x_1^{(1)}x_2^{(1)} + 5 = 0.7 + 2 \times 0.8 - 2 \times 0.7 \times 0.8 + 5 = 6.18; \\ F(X^{(1)}) &< F(X^{(0)}). \end{aligned}$$

Значення функції зменшилось, крок оптимізації успішний.

Переходимо до наступного кроку ($k=2$):

Вектор-градієнт $\nabla F(X^{(1)})$ в наступній точці $X^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx_1} &= 1 - 2x_2^{(1)} = 1 - 2 \times 0.8 = -0.6 \\ \frac{dF}{dx_2} &= 2 - 2x_1^{(1)} = 2 - 2 \times 0.7 = 0.6 \\ \nabla F(X^{(1)}) &= \{-0.6; 0.6\} \end{aligned}$$

$$\|\nabla F(X^{(1)})\| = \sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)^2} = \sqrt{(-0.6)^2 + 0.6^2} = 0.849 \gg \varepsilon$$

Довжина вектора-градієнта зменшується.

Координати наступної точки траєкторії спуску:

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= X^{(1)} - h \cdot \nabla F(X^{(1)}) \\ x_1^{(2)} &= x_1^{(1)} - 0.2 \times \frac{dF}{dx_1} = 0.7 - 0.2 \times (-0.6) = 0.82, \\ x_2^{(2)} &= x_2^{(1)} - 0.2 \times \frac{dF}{dx_2} = 0.8 - 0.2 \times 0.6 = 0.68; \end{aligned}$$

Значення функції у цій точці набуде наступного вигляду:

$$F(X^{(2)}) = x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)} - 2x_1^{(2)}x_2^{(2)} + 5 = 0.82 + 2 \times 0.68 - 2 \times 0.82 \times 0.68 + 5 = 6.065;$$

$$F(X^{(2)}) < F(X^{(1)}).$$

Значення функції зменшилось, крок оптимізації успішний.

Переходимо до наступного кроку оптимізації.

Повторюємо кроки оптимізації до досягнення заданої точності. Результати розрахунків записуємо у таблицю:

Крок	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1^{(k)}$	0,5	0,7	0,82	0,892	0,935	0,961	0,977	0,986	0,992	0,995	0,997
$x_2^{(k)}$	1,0	0,8	0,68	0,608	0,565	0,539	0,523	0,514	0,508	0,505	0,503
$F(X^{(k)})$	6,5	6,18	6,065	6,023	6,008	6,003	6,001	6,000	6,000	6,000	6,000
$\ \nabla F(X^{(k)})\ $	1,414	0,849	0,509	0,305	0,183	0,110	0,066	0,040	0,024	0,014	0,009
$x_1^{(k+1)}$	0,7	0,82	0,892	0,935	0,961	0,977	0,986	0,992	0,995	0,997	0,998
$x_2^{(k+1)}$	0,8	0,68	0,608	0,565	0,539	0,523	0,514	0,508	0,505	0,503	0,502

Після виконання 10-го кроку оптимізації довжина вектора-градієнта становить:

$$\|\nabla F(X^{(10)})\| = 0.009 < \varepsilon.$$

Задана точність досягнута, розрахунок закінчується.

Мінімум функції з точністю $\varepsilon = 0.01$ дорівнює $F^{\min} = F(X^{(10)}) = 6.000$ і досягається при $x_1^{\min} = x_1^{(10)} = 0.998$ і $x_2^{\min} = x_2^{(10)} = 0.502$ після виконання 10-ти кроків оптимізації в напрямку вектора-антиградієнта. При цьому монотонно зменшується довжина вектора $\|\nabla F(X^{(k)})\|$ і значення функції $F(X^{(k)})$, наближуючись до F^{\min} .

Слід відмітити, що на хід процесу оптимізації і швидкість збіжності можна вплинути зміною коефіцієнту кроку h , вибором інших початкових значень параметрів.

ЛЕКЦІЯ 12

Тема: ЗНАХОДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦІ

12.1. ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ І ВЛАСНІ ВЕКТОРИ МАТРИЦІ. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ

Якщо A – квадратна матриця n -го порядку і $Ax = \lambda x$ при $x \neq 0$, то число λ називається власним значенням матриці, а ненульовий вектор x – відповідним йому власним вектором. Перепишемо задачу у наступному вигляді, отримаємо:

$$(A - \lambda E)x = 0, \quad x \neq 0 \quad (12.1)$$

Для існування нетривіального розв'язку задачі (12.1) обов'язково має виконуватися наступна умова, отримаємо:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (12.2)$$

Цей визначник являє собою многочлен n -ї степені від λ ; його називають характеристичним многочленом. Значить, існує n власних значень – коренів цього многочлена, серед яких можуть бути однакові і кратні значення.

Якщо знайдено деяке власне значення, то, при підстановці його в однорідну систему (12.1), можна визначити відповідний власний вектор. Будемо нормувати власні вектори. Нормуванням (на одиницю) вектора x називають множення його на $\|x\|^{-1}$; нормований вектор має одиничну довжину. Тоді кожному простому (не кратному) власному значенню відповідає один (з точністю до напрямку) власний вектор, а сукупність всіх власних векторів, що відповідають сукупності простих власних значень, лінійно-незалежна. Таким чином, якщо всі власні значення матриці прості, то вона має n лінійно незалежних власних векторів, які утворюють базис простору.

Кратному власному значенню кратності p може відповідати від 1 до p лінійно-незалежних власних векторів. Наприклад, розглянемо наступні матриці четвертого порядку, отримаємо:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad C_4 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

У кожної з них характеристичне рівняння приймає вигляд $\det(A - \lambda E) = (a - \lambda)^4 = 0$, а отже, власне значення $\lambda = a$ і має кратність $p = 4$.

Проте у першій матриці є чотири лінійно-незалежних власних вектора:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12.4)$$

У другій матриці є тільки один власний вектор e_1 . Другу матрицю називають простою жордановою (або класичною) підматрицею. Третя матриця має так звану канонічну жорданову форму (по діагоналі стоять або числа, або жорданові підматриці, а інші елементи дорівнюють нулеві).

Таким чином, якщо серед власних значень матриці є кратні, то її власні вектори не завжди утворюють базис. Однак і у цьому випадку власні вектори, що відповідають різним власним значенням, являються лінійно-незалежними.

При розв'язуванні теоретичних і практичних задач часто виникає потреба визначити власні значення даної матриці A , тобто обчислити корені її характеристичного рівняння, отримаємо:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

а також знайти відповідні власні вектори матриці A . Друга задача є простішою, оскільки якщо корені характеристичного рівняння відомі, то знаходження власних векторів зводиться до відшукування ненульових розв'язків деяких однорідних лінійних систем. Тому ми у першу чергу будемо займатися першою задачею – відшукуванням коренів характеристичного рівняння.

Тут в основному застосовується два прийоми: 1) розгортання вікового визначника в поліном n -го степеня, отримаємо:

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) \quad (12.5)$$

з подальшим розв'язком рівняння $D(\lambda) = 0$, що є одним з відомих наближених, способів (наприклад, методом Лобачевського-Греффе) наближене визначення коренів характеристичного рівняння (найчастіше найбільших по модулю) методом ітерації, без попереднього розгортання вікового визначника.

Розгортання вікового визначника.

Як відомо, віковим визначником матриці $A = [a_{ij}]$ називається визначник наступного вигляду:

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \quad (12.6)$$

Прирівнюючи цей визначник до нуля, отримаємо характеристичне рівняння наступного вигляду, отримаємо:

$$D(\lambda) = 0 \quad (12.7)$$

Якщо потрібно знайти весь корінь характеристичного рівняння, то доцільно заздалегідь обчислити визначник.

Розгортаючи визначник, отримаємо поліном n -го степеня:

$$D(\lambda) = (-1)^n [\lambda^n - \rho_1 \lambda^{n-1} + \rho_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n] \quad (12.8)$$

$$\sigma_1 = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha\alpha} \quad (12.9)$$

де

є сума усіх діагональних мінорів першого порядку матриці A . Отримаємо:

$$\sigma_2 = \sum_{\alpha < \beta}^n \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix} \quad (12.10)$$

є сума всього діагонального мінору другого порядку матриці A . Отримаємо наступне:

$$\sigma_3 = \sum_{\alpha < \beta < \gamma}^n \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\gamma} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} & a_{\beta\gamma} \\ a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma\beta} & a_{\gamma\gamma} \end{vmatrix} \quad (12.11)$$

– сума всіх діагональних мінорів третього порядку матриці A і т.д.

Після чого, можна отримати наступне:

$$\sigma_n = \det A \quad (12.12)$$

Слід відмітити, що число діагональних мінорів k -го порядку матриці A дорівнює наступному співвідношенню, отримаємо:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (12.13)$$

Звідси випливає, що безпосереднє обчислення коефіцієнтів характеристичного полінома (12.13) еквівалентне наступному обчисленню, отимаємо:

$$C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n - 1 \quad (12.14)$$

визначників різних порядків. Остання задача, взагалі кажучи, технічно важко здійснена для великих значень n . Тому необхідно застосовувати спеціально створені методи розгортання вікових визначників (методи А.Н. Крилова, А.М. Данілевського, метод невизначених коефіцієнтів, метод інтерполяції та ін.).

12.2. МЕТОД А.М. ДАНІЛЕВСЬКОГО. ЗНАХОДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ І ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ МАТРИЦЬ

Суть методу А.М. Данілевського полягає у приведенні вікового визначника до так званого нормального виду Фробеніуса, отримаємо:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \rho_1 - \lambda & \rho_2 & \rho_3 & \dots & \rho_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} \quad (12.15)$$

Після чого, коли ми записати віковий визначник у поданій вище формі, то, розкладаючи його по елементах першого рядка, матимемо наступне:

$$D(\lambda) = (\rho_1 - \lambda) \cdot (-\lambda)^{n-1} - \rho_2 \cdot (-\lambda)^{n-2} + \rho_3 \cdot (-\lambda)^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \rho_n \quad (12.16)$$

або

$$D(\lambda) = (-1)^n \cdot (\lambda^n - \rho_1 \lambda^{n-1} - \rho_2 \cdot \lambda^{n-2} - \rho_3 \lambda^{n-3} - \dots - \rho_n) \quad (12.17)$$

Таким чином, розгортання вікового визначника, записаного в нормальній формі, не представляє труднощів. Позначимо його через матрицю A , отримаємо:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (12.18)$$

після чого позначаємо:

$$P = \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{n-1} & \rho_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (12.19)$$

– подібну їй матрицю Фробеніуса, тобто:

$$P = S^{-1}AS \quad (12.20)$$

де S – особлива матриця.

Оскільки подібні матриці володіють однаковими характеристичними поліномами, то маємо наступне:

$$\det(A - \lambda E) = \det(P - \lambda E) \quad (12.21)$$

Тому для обґрунтування методу досить показати, яким чином, виходячи з матриці A , будується матриця P . Згідно методу А.М. Данілевського, перехід від матриці A до подібної їй матриці P здійснюється за допомогою перетворення подібності, що послідовно перетворюють рядки матриці A , починаючи з останнього, у відповідні рядки матриці P .

Покажемо початок процесу через наступний рядок:

$$a_{n1} \cdot a_{n2} \cdot \dots \cdot a_{nm-1} \cdot a_{nn} \quad (12.22)$$

переводимо у рядок $0 \ 0 \ 1 \ 0$. Припускаючи, що $a_{nm-1} \neq 0$, розділимо усі елементи $(n-1)$ – го стовпця матриці A на a_{nm-1} . Тоді отримаємо її n -й рядок, який прийме наступного значення:

$$a_{n1} \cdot a_{n2} \cdot \dots \cdot 1 a_{nn} \quad (12.23)$$

Після чого необхідно відняти $(n-1)$ – й стовпець перетвореної матриці, помножений відповідно на числа $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$, зі всієї решти її стовпців.

У результаті отримаємо матрицю, останній рядок якої має бажаний наступний вигляд: $0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0$. Слід відмітити, що вказані операції є елементарними перетвореннями, що здійснюються над стовпцями матриці A . Виконавши ці ж перетворення над одиничною матрицею, отримаємо наступну матрицю:

$$M_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (12.24)$$

де

$$m_{n-1,i} = -\frac{a_{ni}}{a_{n,n-1}} \quad \text{при } i \neq n-1$$

$$m_{n-1,n-1} = -\frac{1}{a_{n,n-1}}$$

Звідси робимо висновок, що проведені операції рівносильні множенню справа матриці M_{n-1} на матрицю A , тобто після проведених перетворень отримаємо наступну матрицю:

$$AM_{n-1} = B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (12.25)$$

Використовуючи правило множення матриць, знаходимо, що елементи матриці B обчислюються за наступними математичними співвідношеннями:

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{i,n-1}m_{n-1,j} \quad \text{при } j \neq n-1; \quad (12.26)$$

$$b_{i,n-1} = a_{i,n-1}m_{n-1,n-1}$$

Слід відмітити, що побудована матриця $B = AM_{n-1}$ не буде подібна матриці A . Для того щоб мати перетворення подібності, потрібно обернену матрицю M_{n-1}^{-1} зліва перемножити на матрицю B . Отримаємо:

$$M_{n-1}^{-1}AM_{n-1} = M_{n-1}^{-1}B \quad (12.27)$$

Безпосередньо перевіркою легко переконатися, що обернена матриця M_{n-1}^{-1} має наступний вигляд:

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (12.28)$$

Нехай $M_{n-1}^{-1}AM_{n-1} = C$;

Отже: $C = M_{n-1}^{-1}B$.

Оскільки очевидно, множення зліва матриці M_{n-1}^{-1} на матрицю B не змінює перетвореного останнього рядка, то матриця C буде мати наступний вигляд:

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n-1} & c_{1,n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2,n-1} & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (12.29)$$

Далі перемножимо матриці M_{n-1}^{-1} і B , матимемо:

$$c_{n-1,j} = \sum_{k=1}^n a_{nk} \cdot b_{kj} \quad (12.30)$$

Таким чином, множення M_{n-1}^{-1} на матрицю B змінює лише $(n-1)$ -й рядок матриці B .

Отримана матриця C подібна матриці A і має один зведений родок. Цим і закінчується перший етап процесу.

Далі, якщо $C_{n-1,n-2} \neq 0$, то над матрицею C можна повторити аналогічні операції, узявши за основу $(n-2)$ -й її рядок. У результаті отримаємо наступну матрицю:

$$D = M_{n-2}^{-1} - CM_{n-2} \quad (12.31)$$

з двома зведеними рядками. Над останньою матрицею проробляємо ті ж операції. Слід також відмітити, що продовжуючи цей процес, ми, нарешті, отримаємо матрицю Фробеніуса:

$$P = M_1^{-1} \cdot \dots \cdot M_{n-2}^{-1} \cdot M_{n-1}^{-1} \cdot AM_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \dots \cdot M_1, \quad (12.32)$$

якщо, звичайно, усі $n-1$ проміжні перетворення можливі.

12.3. МЕТОД СКАЛЯРНИХ ДОБУТКІВ. ЗНАХОДЖЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ВЛАСНОГО ЗНАЧЕННЯ СИМЕТРИЧНОЇ МАТРИЦІ

Для відшукування першого власного значення λ_1 дійсної матриці A можна вказати дещо інший ітераційний процес, що є іноді набагато кращим та простішим. Метод заснований на утворенні скалярних добутоків, отримаємо:

$$(A_k \cdot y_0, A^k \cdot y_0) \text{ і } (A^{k-1} \cdot y_0, A^k \cdot y_0) \quad (12.33)$$

де

$$k = 1, 2, \dots;$$

A' – матриця, транспонована з матрицею A ;

y_0 – вибраний яким-небудь чином початковий вектор.

Переходимо тепер до викладу самого підходу.

Нехай A – дійсна матриця і $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – її власні значення, які передбачаються різними, причому дорівнюють:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Візьмемо деякий ненульований вектор y_0 і за допомогою матриці A побудуємо послідовність ітерацій, отримаємо:

$$y_k = Ay'_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (12.34)$$

Для вектора y_0 утворюємо також за допомогою транспонованої матриці A' другу послідовність ітерацій, отримаємо:

$$y'_k = A' y'_{k-1} \quad (k=1,2,\dots) \quad (12.35)$$

де

$$y'_k = y_0.$$

У просторі E^n вибираємо два власні базиси $\{x_j\}$ і $\{x'_j\}$ відповідно для матриць A і A' , що задовольняються наступним умовам ортонормування:

$$(x'_i, x'_j) = \delta_{ij} \quad (12.36)$$

де $Ax_i = \lambda_i x_i$ і $A'x'_j = \lambda'_j x'_j$, $(i, j=1,2,\dots,n)$. Позначимо координати вектора y_0 в базисі $\{x_j\}$ через a_1, \dots, a_n , а в базисі $\{x'_j\}$ – через b_1, \dots, b_n , тобто:

$$y_0 = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \quad \text{і} \quad y_0 = b_1 x'_1 + \dots + b_n x'_n$$

Звідси:

$$y_k = A^k y_0 = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^k x_i \quad (12.37)$$

$$y'_k = A'^k y_0 = \sum_{j=1}^n b_j \lambda_j'^k x'_j$$

Після чого складаємо скалярний добуток, отримуємо:

$$(y_k, y'_k) = (A^k \cdot y_0, A'^k \cdot y_0) = (y_0, A'^{2k} \cdot y_0) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i, \sum_{j=1}^n b_j \cdot \lambda_j'^{2k} \cdot x'_j \quad (12.38)$$

Звідси через умову ортонормування знаходимо:

$$(y_k, y'_k) = \sum_{i=1}^n a_i b_i \lambda_i'^{2k} = a_1 b_1 \lambda_1'^{2k} + a_2 b_2 \lambda_2'^{2k} + \dots + a_n b_n \lambda_n'^{2k} \quad (12.38)$$

Аналогічно отримуємо наступне співвідношення:

$$(y_{k-1}, y'_k) = a_1 b_1 \lambda_1'^{2k-1} + a_2 b_2 \lambda_2'^{2k-1} + \dots + a_n b_n \lambda_n'^{2k-1} \quad (12.39)$$

Отже, при умові $a_1 b_1 \neq 0$ матимемо наступне:

$$\frac{(y_k, y'_k)}{(y_{k-1}, y'_{k-1})} = \frac{a_1 b_1 \lambda_1^{2k} + a_2 b_2 \lambda_2^{2k} + \dots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k}}{a_1 b_1 \lambda_1^{2k-1} + a_2 b_2 \lambda_2^{2k-1} + \dots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k-1}} = \lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right) \quad (12.40)$$

Таким чином,

$$\lambda_1 \approx \frac{(y_k, y'_k)}{(y_{k-1}, y'_{k-1})} = \frac{(A^k \cdot y_0, A^{1k} \cdot y_0)}{(A^{k-1} \cdot y_0, A^{1k} \cdot y_0)}, \quad (12.41)$$

Слід відмітити, що цей метод особливо зручний для знаходження симетричної матриці A , оскільки тоді $A' = A$, і ми маємо наступне досить просте математичне співвідношення:

$$\lambda_1 \approx \frac{(A^k \cdot y_0, A^k \cdot y_0)}{(A^{k-1} \cdot y_0, A^{1k} \cdot y_0)} \quad (12.42)$$

і, отже, тут потрібно побудувати тільки одну послідовність $y_k = A^k \cdot y_0$ ($k = 1, 2, \dots$).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Методичне забезпечення

1. Pasternak Ia., Pasternak V., Ilchuk N. Boundary Element Method for Defective Multifield Materials. *Lambert Academic Publishing*. 2018. 111 p. Режим доступу:

<https://www.amazon.com/Boundary-Element-Defective-Multifield-Materials/dp/6139935997>

2. Sulym H., Pasternak Ia., Pasternak V. Boundary element modeling of pyroelectric solids with shell inclusions. *Mechanics and Mechanical Engineering*. 2018. P. 727-737.

3. Пастернак Я.М. Пастернак В.В. Об'єктно-орієнтована реалізація методу граничних елементів тривимірної термомагнітоелектро-пружності. *Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво*. 2018. С. 107-112.

4. Мекуш О.Г., Соліч К.В., Федунік-Яремчук О.В. Обчислювальні методи: Теорія похибок. Наближені методи розв'язання рівнянь та систем рівнянь: методичні вказівки до вивчення курсу «Обчислювальні методи». Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2018. 62 с.

5. Мекуш О.Г., Ханін О.Г. Інтерполяція та чисельне диференціювання функцій: Елементи теорії наближень: методичні вказівки до курсу «Обчислювальні методи». Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2021. 60 с.

6. Мекуш О.Г., Ханін О.Г. Чисельне інтегрування функцій: Чисельні методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь: методичні вказівки до курсу «Обчислювальні методи». Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2021. 36 с.

Рекомендована література та інтернет-джерела

1. Волонтир Л.О., Зелінська Л.В., Потапова Н.А., Чіков І.А. Чисельні методи: навчальний посібник / за редакцією Л.О. Волонтир. Вінниця: ВНАУ, 2020. 322 с. Режим доступу:

<file:///C:/Users/vikto/Downloads/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%96%20%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA.pdf>

2. Дзісь В.Г., Левчук О.В., Дячинська О.М. Прикладна математика на основі MathCAD: навчальний посібник / за редакцією В.Г. Дзісь. Вінниця: ВНАУ, 2020. 378 с.

3. Найко Д.А., Шевчук О.Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник / за редакцією Д.А. Найко. Вінниця: ВНАУ, 2020. 382 с. Режим доступу:

<http://socrates.vsau.org/repository/card.php?lang=en&id=24513>

4. Гончаров О.А., Васильєва Л.В., Юнда А.М. Чисельні методи розв'язання прикладних задач: навчальний посібник / за редакцією О.А. Гончарова. Суми: Сумський державний університет, 2020. 142 с.

5. Андруник В.А., Висоцька В.А., Пасічник В.В., Чирун Л.Б, Чирун Л.В. Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник, Том 1 / за редакцією д.т.н., професора, Лауреата державної премії України у галузі науки та техніки В.В. Пасічника. Львів: Новий світ-2000, 2020. 470 с.

6. Андруник В.А., Висоцька В.А., Пасічник В.В., Чирун Л.Б, Чирун Л.В. Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник, Том 2 / за редакцією Лауреата державної премії України у галузі науки та техніки В.В. Пасічника. Львів: Новий світ-2000, 2020. 536 с.

7. Кодекс академічної доброчесності ВНУ імені Лесі Українки URL: https://ra.vnu.edu.ua/akademichna_dobrochesnist/kodeks_akademichnoi_dobrochesnosti/.

8. Положення про комітет з етики наукових досліджень Волинського національного університету імені Лесі Українки. 2020. URL: <https://ra.vnu.edu.ua/wp-content/uploads/2020/11/Komitet-z-etyky-naukovyh-doslidzhen-.pdf>.

9. Положення про організацію навчального процесу на першому (бакалаврському) та другому (магістерському) рівнях у Волинському національному університеті імені Лесі Українки. 2022. URL: <https://bit.ly/3VMJPXA>.

10. Положення про порядок формування індивідуальної траєкторії навчання здобувачів освіти Волинського національного університету імені Лесі Українки. 2022. URL: <https://bit.ly/3PqWfSA>.

11. Положення про систему запобігання та виявлення академічного плагіату Волинського національного університету імені Лесі Українки. 2021. URL: <https://ra.vnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/03/Polozhennya-pro-systemu-zapobigannya-ta-vyyavlenya-akademichnogo-plagiatu.pdf>.

УДК 519.61(07)
П 19

Електронне мережне навчальне видання

Вікторія ПАСТЕРНАК

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ з дисципліни «ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ
МЕТОДИ»**

для студентів спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика)
першого (бакалаврського) рівня

Друкується в авторській редакції