

**РОЙКО Л.Л.**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА:  
методичні рекомендації для самостійної роботи студентів факультету  
хімії, екології та фармацевції**

**ЛУЦЬК, 2020**

**СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ  
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
І МАТЕМАТИКИ  
КАФЕДРА ЗАГАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ  
ІНФОРМАТИКИ**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА:  
методичні рекомендації для самостійної роботи студентів факультету  
хімії, екології та фармації**

**ЛУЦЬК, 2020**

УДК 51(072)

Р 65

Рекомендовано до друку науково-методичною радою  
Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки  
(протокол №2 від 21 жовтня 2020 року)

Рецензенти:

Гуда О.В. – кандидат технічних наук, доцент кафедри фундаментальних наук  
Луцького національного технічного університету

Гембарська С.Б. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії  
функцій та методики навчання математики

Р 65

Ройко Л.Л.

Вища математика: методичні рекомендації для самостійної роботи студентів  
факультету хімії, екології та фармації. – Луцьк, 2020. – 40 с.

Навчально-методичне видання призначене для самостійної роботи студентів з курсу «Вища математика», містить типові завдання з кожного модуля навчальної програми для студентів факультету хімії, екології та фармації.

УДК 51(072)

© Ройко Л.Л.

## АНОТАЦІЯ КУРСУ

**Метою викладання навчальної дисципліни «Вища математика» є надання студентам фундаментальних знань з вищої математики, які дозволяють у подальшому засвоювати спеціальні дисципліни, котрі базуються на математичних поняттях. При цьому значна увага надається виробленню практичних навичок при розв'язуванні конкретних задач, вмінню застосовувати математичні методи для дослідження реальних процесів і прийняття оптимальних рішень.**

У результаті вивчення курсу студенти повинні:

- ознайомитися з методами розв'язання СЛР;
- розвинути навички диференціювання та інтегрування функцій;
- отримати навички обчислення похідних, невизначених і визначених інтегралів;
- навчитись будувати й досліджувати функції, що розглядаються у спеціальних предметах;
- засвоїти методи розв'язування простіших диференційних рівнянь.

**Основними завданнями вивчення дисципліни «Вища математика» є:**

***Методичні:***

- навчити студентів використовувати математичний апарат при проведенні розрахунків курсових та дипломних робіт;
- навчити студентів робити оцінку очікуваного результату при розв'язуванні задач практичного змісту;
- навчити студентів не формального, вдумливого, творчого підходу до будь-якої справи;
- навчити студентів раціонально розподіляти свій час на виконання поставлених завдань.

***Пізнавальні:***

- прищепити студентам уміння підходити до розв'язування будь-якого питання чи проблеми різними шляхами, оцінювати їх, а потім вибирати оптимальний шлях розв'язку;
- прищепити студентам навички розв'язування математичних задач;
- прищепити студентам уміння використовувати математичні методи для розв'язання творчих задач та обробки даних наукових досліджень;
- формувати вміння здійснювати аналіз, контроль і оцінку результатів своєї праці.

***Практичні:***

- сформувати у студентів навички комплексного розв'язування математичних задач;
- сформувати у студентів бачення тісного дидактичного зв'язку між змістом математики та лінгвістики;
- виробити у студентів критерій раціонального підходу при розв'язуванні будь-яких задач;
- виховання загальної культури студентів;
- розвиток культури мови, вміння висловлювати свої міркування перед аудиторією.

## 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Дано матриці  $A$ ,  $B$  та  $C$ . Знайти:

1)  $(2A+3C)^T$ ;

2) Довести, що переставний закон добутку двох матриць не виконується. Тобто  $A \cdot C \neq C \cdot A$ .

3)  $A^T \times B$ ;

4) визначник  $C$  методом безпосереднього обчислення;

5) визначник  $C$ , розклавши його за елементами третього стовпця;

6) визначник  $C$ , розклавши його за елементами другого рядка;

7)  $C^{-1}$  (виконати перевірку).

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

2.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ .

3.  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ .

4.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

5.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ .

6.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ .

7.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$9. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 9 \\ 8 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$11. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$12. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$13. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$14. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$15. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$16. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 5 & 9 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$17. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$18. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$19. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 6 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$20. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

## 1.2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом (з допомогою оберненої матриці);

в) методом Гаусса;

г) дослідити систему на сумісність та визначеність.

$$1. \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases};$$

$$11. \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases};$$

$$2. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases};$$

$$12. \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases};$$

$$13. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases};$$

$$14. \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases};$$

$$5. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases};$$

$$15. \quad \begin{cases} x + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases};$$

$$16. \quad \begin{cases} x + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases};$$

$$17. \quad \begin{cases} x + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -9 \end{cases}$$



$$8. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} ;$$

$$9. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} ;$$

$$10. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$$

## **2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ**

**2.1. Побудувати чотирикутник, обмежений лініями  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ,  $x = a$  і  $y = b$ . Для виконання побудов загальні рівняння прямих перетворити до вигляду рівняння прямої у відрізках на осях. Отриману фігуру заштрихувати.**

**2.2 Знайти координати вершин утвореного чотирикутника.**

1.  $7x + 3y + 21 = 0$ ,  $x + 3y - 3 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = -2$

2.  $x - y + 4 = 0$ ,  $4x + y - 4 = 0$ ,  $x = -2$ ,  $y = 0$ .

3.  $5x + 3y + 15 = 0$ ,  $2x - y - 2 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ .

4.  $5x - 4y - 20 = 0$ ,  $x + y + 2 = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

5.  $3x + y + 3 = 0$ ,  $5x - 3y - 15 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = -1$ .

6.  $2x + 3y - 6 = 0$ ,  $6x - 5y + 30 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = -7$ .

7.  $x - y + 6 = 0$ ,  $5x + y - 5 = 0$ ,  $x = -2$ ,  $y = 0$ .

8.  $4x - 5y - 20 = 0$ ,  $x + y + 1 = 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ .

9.  $x + 3y + 9 = 0$ ,  $3x - 2y - 6 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 2$ .

10.  $7x + 2y + 14 = 0$ ,  $5x - 4y + 20 = 0$ ,  $x = -1$ ,  $y = 0$ .

11.  $5x + 4y + 20 = 0$ ,  $x + 4y - 4 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = -2$

12.  $4x - 3y - 12 = 0$ ,  $x + y + 4 = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ .

13.  $5x + 2y + 10 = 0$ ,  $2x + 2y - 4 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = -3$

14.  $8x + 3y + 24 = 0$ ,  $x + 5y - 5 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = -2$ .

15.  $x - y - 1 = 0$ ,  $3x + y + 24 = 0$ ,  $x = -3$ ,  $y = 0$ .

16.  $2x + y + 2 = 0$ ,  $2x - y - 8 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 4$ .

17.  $4x + 3y + 12 = 0$ ,  $-3x + 2y + 6 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 2$ .

18.  $5x - 3y - 15 = 0$ ,  $x + y + 3 = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ .

19.  $x - y + 5 = 0$ ,  $4x + y - 3 = 0$ ,  $x = -3$ ,  $y = 0$ .

20.  $6x + 3y + 18 = 0$ ,  $x + 5y - 5 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = -1$

**2.3. Задані вершини  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  трикутника. Знайти:**

**1) рівняння та довжину сторони  $BC$ ;**

**2) рівняння та довжину висоти  $AD$ . Записати рівняння висоти у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом та у відрізках на осях;**

**3) рівняння та довжину медіани  $CE$ ;**

**4) величину кута  $BCE$ .**

1.  $A(2; 5)$ ,  $B(-3; 4)$ ,  $C(1; -2)$ .

11.  $A(1; 4)$ ,  $B(-2; 3)$ ,  $C(1; -1)$ .

2.  $A(3; -1)$ ,  $B(-5; 5)$ ,  $C(-4; 0)$ .

12.  $A(2; -2)$ ,  $B(-1; 4)$ ,  $C(-3; 0)$ .

3.  $A(10; -1)$ ,  $B(2; 5)$ ,  $C(3; 0)$ .

13.  $A(7; -1)$ ,  $B(1; 3)$ ,  $C(2; 1)$ .

4.  $A(9; 1)$ ,  $B(1; 7)$ ,  $C(-2; -2)$ .

14.  $A(2; 3)$ ,  $B(0; 7)$ ,  $C(-2; -1)$ .

5.  $A(4; -2)$ ,  $B(-4; 4)$ ,  $C(2; 3)$ .

15.  $A(3; -3)$ ,  $B(-2; 4)$ ,  $C(3; 1)$ .

6.  $A(5; 1)$ ,  $B(-3; 7)$ ,  $C(-2; 2)$ .

16.  $A(4; 2)$ ,  $B(-3; 5)$ ,  $C(2; -3)$ .

7.  $A(1; 3)$ ,  $B(-2; -3)$ ,  $C(-6; 4)$ .

17.  $A(2; 5)$ ,  $B(-1; -3)$ ,  $C(-3; 2)$ .

8.  $A(2; 10)$ ,  $B(-7; 8)$ ,  $C(2; -1)$ .

18.  $A(1; 9)$ ,  $B(-3; 8)$ ,  $C(1; -3)$ .

9.  $A(2; 1)$ ,  $B(-6; -3)$ ,  $C(0; -4)$ .

19.  $A(1; 0)$ ,  $B(-3; -3)$ ,  $C(0; 4)$ .

10.  $A(3; 4)$ ,  $B(6; 0)$ ,  $C(2; 5)$ .

20.  $A(2; 6)$ ,  $B(5; 0)$ ,  $C(-1; -5)$ .

**2.4. Дано координати вершин трикутної піраміди  $ABCD$ . Знайти:**

**1) Координати векторів  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ , і  $\overrightarrow{AD}$  та їх абсолютні величини;**

**2) Координати вектора  $3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{AB}$ ;**

**3) Проекцію вектора  $\overrightarrow{AD}$  на вектор  $\overrightarrow{AB}$ ;**

**4) Площу грані  $ABC$ ;**

**5) Об'єм піраміди  $ABCD$  та її висоту;**

**6) Загальне рівняння площини  $ABC$  та координати її нормального вектора;**

**7) Рівняння площини  $ABC$  у відрізках на осях;**

**8) Канонічне та параметричне рівняння прямої  $AB$ ;**

**9) Кут між площинами  $ABC$  та  $ABD$ ;**

- 10) Відстань від точки  $D$  до грані  $ABC$ ;
- 11) Кут між прямими  $AB$  і  $AC$ ;
- 12) Канонічне рівняння висоти  $DO$  піраміди  $ABCD$ ;
- 13) Координати точки перетину висоти  $DO$  з гранню  $ABC$ ;
- 14) Кут між ребром  $AD$  і гранню  $ABC$ .

1.  $A(0; -3; 2);$        $B(4; -2; 3);$        $C(1; -5; 2);$        $D(3; -4; 4).$
2.  $A(-5; 2; 0);$        $B(3; -4; 0);$        $C(6; 2; 3);$        $D(2; 1; -4).$
3.  $A(-5; 2; -3);$        $B(-4; 4; -5);$        $C(6; -2; -1);$        $D(3; 1; 3).$
4.  $A(-1; -4; -1)$        $B(0; -2; -3)$        $C(2; -3; 1),$        $D(7; 3; 4).$
5.  $A(0; -2; 1);$        $B(1; 0; -1);$        $C(2; 8; 3);$        $D(8; 6; 5).$
6.  $A(-2; -1; 8);$        $B(-4; 0; 6);$        $C(0; 1; -2);$        $D(0; -2; 1).$
7.  $A(-2; 1; 0);$        $B(3; -6; 0);$        $C(4; 3; 2);$        $D(2; 5; -3).$
8.  $A(1; 6; -1);$        $B(0; 3; 1);$        $C(2; 13; 4);$        $D(6; 2; 0).$
9.  $A(0; -2; 1);$        $B(2; -3; 1);$        $C(4; -5; 2);$        $D(2; -4; 3).$
10.  $A(-4; 4; -5);$        $B(0; -2; 1);$        $C(6; -1; 7);$        $D(4; 1; -2).$
11.  $A(2; -3; 1);$        $B(-2; -1; 8);$        $C(2; -3; 1);$        $D(-1; 2; 5).$
12.  $A(4; 2; -3);$        $B(4; -2; 5);$        $C(-5; 2; 1);$        $D(3; 1; 3).$
13.  $A(-5; 2; -3);$        $B(-4; 4; -5);$        $C(6; -2; -1);$        $D(3; 1; 3).$
14.  $A(-3; 1; 0);$        $B(4; -5; 0);$        $C(5; 3; 3);$        $D(2; 4; -4).$
15.  $A(3; 2; -4);$        $B(5; -4; 3);$        $C(-6; 3; -1);$        $D(4; 2; 3).$
16.  $A(3; 3; 4);$        $B(2; 0; -9);$        $C(5; 2; 1);$        $D(1; 6; 2).$
17.  $A(3; 2; -4);$        $B(4; -4; 5);$        $C(-7; 2; 2);$        $D(2; 1; 3).$
18.  $A(0; -1; 2);$        $B(2; -3; 1);$        $C(3; 5; 5);$        $D(2; 4; -4).$
19.  $A(-4; 2; 0);$        $B(3; -4; 0);$        $C(6; 2; 3);$        $D(2; 3; -4).$
20.  $A(2; 2; -3);$        $B(5; -3; 4);$        $C(-4; 2; -2);$        $D(4; 1; 5).$

### 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

#### 3.1. Знайти границі:

1. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x^3 - 3x}{2 - x^2 + 8x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+6} - \sqrt{8-x}}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 4x \operatorname{ctg} 2x$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2-3x}{5-3x} \right)^{x-4}$
2. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6 + x^4 - 7}{7x^6 - 3x^2 + x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{x \operatorname{tg} 2x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+2}{4x-3} \right)^{-2x+3}$
3. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x - 4}{2x^4 + 5x + 3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 5x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-3} \right)^{x+4}$
4. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{4 - x^4 + 2x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{2 \sin^2 3x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-x-2}{-x+4} \right)^{4x+4}$
5. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^2 + 4x - 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 - x - 2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 5x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x-7} \right)^{x+3}$
6. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \operatorname{tg} 5x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5+2x}{2x-3} \right)^{x+5}$
7. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^2 + 3x + 5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{-2-x}}{x+4}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\sin^2 4x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5+x}{x-3} \right)^{3x-2}$
8. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+4}{4x^4 + 2x^2 + 3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x \operatorname{tg} x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3} \right)^{x^2+4}$
9. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - 3}{x - 4x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{\operatorname{tg}^2 5x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+3} \right)^{3x+2}$
10. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 1}{3x^4 + x^3 + 5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 2x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x-1} \right)^{2x-7}$
11. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x + 1}{8x^2 + 3x + 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{8-x}}{x-5}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}^2 3x}{\operatorname{ctg}^2 6x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4+x}{x-2} \right)^{3x+4}$
12. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x + 1}{4 + 3x^2 + 2x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 + 5x + 6}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2 5x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+2}{2x-3} \right)^{5x+3}$
13. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x^3 - x}{3 + 3x^2 + 4x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{10 + 3x - x^2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+4}{4x+3} \right)^{4x+5}$
14. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{5 - x^2 + 2x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{\sqrt{x+8} - \sqrt{-x}}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{1 - \cos 6x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x-4} \right)^{5-2x}$
15. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 7}{2 - 4x + 3x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} 8x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+5}{5x-3} \right)^{x+3}$
16. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 6x^2 + 5}{4 - x + 3x^2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{-2-x}}{x+4}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg}^2 2x \cdot \sin^2 6x)$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{3x+4} \right)^{4x-1}$
17. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 6x^3 - 7}{5x^3 - 3x^5 + 3x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{7x - 3x^2 - 2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 5x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x-2}{7x-1} \right)^{4-3x}$
18. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x}{1 - 4x^2 + 6x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 6x$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3-x}{5-x} \right)^{x+2}$

$$19. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 6x^3 - 7}{5x^3 - 3x^5 + 3x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{\cos 2x - 1}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{7x - 2}{7x - 1} \right)^{4-3x}$$

$$20. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 12x^3}{3x^3 - x^5 + 7x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{-1-x}}{2+x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x+4}{6x-3} \right)^{5x-2}$$

**3.2. Дослідити функцію на неперервність вияснити характер точок розриву, побудувати графік:**

$$1. f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ 3x^2 + 1, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 2, \\ x^3 + 2, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & \text{якщо } x < 3, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{якщо } x \leq 1, \\ -x^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ -x+3, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 < x \leq 2, \\ -x+3, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{якщо } x < -1, \\ x^2 + 2, & \text{якщо } -1 \leq x < 1, \\ 2x, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} -3, & \text{якщо } x < -2, \\ -x^2 + 1, & \text{якщо } -2 \leq x < 2, \\ 3, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & \text{якщо } x \leq 2; \\ x, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & \text{якщо } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{якщо } x \leq 0; \\ 4-x^2, & \text{якщо } 0 < x < 2; \\ x-2, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \leq 1; \\ 3-x^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x < -2, \\ -x+1, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 1, \\ x^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} -4, & \text{якщо } x \leq -2; \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 2; \\ 2x-7, & \text{якщо } 2 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1; \\ 4-2x, & \text{якщо } 1 < x < 2,5; \\ 2x-7, & \text{якщо } 2,5 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1; \\ 2, & \text{якщо } 1 < x < 3; \\ x, & \text{якщо } 3 \leq x < \infty. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 < x \leq 2, \\ x+1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{якщо } x < 0; \\ (x-1)^2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2; \\ 4-x, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

### 3.3. Знайти похідну заданих функцій:

$$1. \text{ а) } y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}; \quad \text{б) } y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x^2}}; \quad \text{в) } x \sin y - y \cos x = 0; \quad \text{г) } y = x^{\frac{2}{x}}$$

$$2. \text{ а) } y = \frac{3x}{\sqrt[3]{2+x}} - 6\sqrt[3]{2+x}; \quad \text{б) } y = \sin^3 \sqrt{2x+1}; \quad \text{в) } e^{xy} - x^2 + y^2 = 0; \quad \text{г) } y = (\arccos x)^x$$

$$3. \text{ а) } y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}; \quad \text{б) } y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}; \quad \text{в) } y \sin x + \cos(x-y) = 6; \quad \text{г) } y = x^{\arcsin x}$$

$$4. \text{ а) } y = \sqrt[3]{x^4+5x} - \sqrt[4]{(5x-1)^3}; \quad \text{б) } y = \frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}; \quad \text{в) } \cos(x-y) - 2x + 4y = 0; \quad \text{г) } y = x^{\cos^2 x}$$

$$5. \text{ а) } y = x + \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}; \quad \text{б) } y = \sin \sqrt{x^2+x}; \quad \text{в) } xe^y + ye^x = xy; \quad \text{г) } y = x^{\frac{1}{x^2}}$$

$$6. \text{ а) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{5}{\sqrt[4]{(x^3+2)^3}}; \quad \text{б) } y = (e^{\sin x} - x)^2; \quad \text{в) } \cos(xy) = \frac{y}{x}; \quad \text{г) } y = 2x^{\sqrt{x}}$$

$$7. \text{ а) } y = x^3 \sqrt{\frac{2}{1+x}}; \quad \text{б) } y = (3x^8 + 5\sqrt{x^2} - 3)^5; \quad \text{в) } xy + \ln y - 2 \ln x = 0; \quad \text{г) } y = (\ln x)^x$$

$$8. \text{ а) } y = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}; \quad \text{б) } y = 7^{\operatorname{arctg} 2x} + x \cdot \ln 2x; \quad \text{в) } e^{x+y} = \sin \frac{y}{x}; \quad \text{г) } y = (\sin x)^{\cos x}$$

$$9. \text{ а) } y = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}; \quad \text{б) } y = x \arcsin \frac{2x+1}{3}; \quad \text{в) } y^2 - \operatorname{tg}xy = 5 + x^7; \quad \text{г) } y = \arccos x^{\arcsin \frac{1}{x}}$$

$$10. \text{ а) } y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}; \quad \text{б) } y = e^{-x^2} \cos^3(2x+3); \quad \text{в) } y \ln x - x \ln y = x + y; \quad \text{г) } y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}$$

$$11. \text{ а) } y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{3x-4}{3x+1}\right)^4}; \quad \text{б) } y = \frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}; \quad \text{в) } (x+y)^2 = (x-2y)^3; \quad \text{г) } y = x^{\frac{\cos \frac{1}{x}}{x}}$$

$$12. \text{ а) } y = \ln \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x}}{1-x} + x^2; \quad \text{б) } y = 4^{\cos 2x} - x \cdot \sin 2x; \quad \text{в) } y^5 + x^7 - \sqrt{xy} = 3; \quad \text{г) } y = x^{\lg x}$$

$$13. \text{ а) } y = \ln \sqrt[5]{\left(\frac{1-5x}{1+5x}\right)^3}; \quad \text{б) } y = \left(3x^4 - \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}} + 2\right)^5; \quad \text{в) } 3x^2 + 2y^5 = \operatorname{ctg}xy; \quad \text{г) } y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin 3x}$$

$$14. \text{ а) } y = \ln \arccos \frac{1}{\sqrt{2x}} + \sqrt[3]{x^2}; \quad \text{б) } y = 3^{\operatorname{ctg} 5x} + x \cdot \sin 5x; \quad \text{в) } \sqrt[5]{yx^2} = \frac{x}{y} + \operatorname{tg}y; \quad \text{г) } y = x^{\operatorname{arctg} x}$$

$$15. \text{ а) } y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} + 4x^3; \quad \text{б) } y = \ln \sqrt{\frac{x^6-3}{6x+2}}; \quad \text{в) } 7^{\frac{x}{y}} + 3^{xy} = 2 + \sin x; \quad \text{г) } y = x^{\sin x}$$

$$16. \text{ а) } y = \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - x \cdot \cos^2 x; \quad \text{б) } y = \sqrt{1+\ln^2 x}; \quad \text{в) } \ln(x+y) = y^3 + \sin x; \quad \text{г) } y = x^{\arcsin \frac{1}{x}}$$

$$17. \text{ а) } y = \ln \sqrt[4]{\left(\frac{2x^3-3}{2x^3+3}\right)^3}; \quad \text{б) } y = 4^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + x \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3}; \quad \text{в) } 7 + \operatorname{arctg} xy = x + \ln y; \quad \text{г) } y = (2-x)^{\arccos \frac{1}{x}}$$

18. а)  $y = \left( \frac{3x^8}{8} - 6x \cdot \sqrt[3]{x} - 6 \right)^7$ ; б)  $y = xt g 3x + 2^{x-2}$ ; в)  $\frac{y}{x-3} + \cos y = \ln x$ ; г)  $y = (\arctg x)^x$

19. а)  $y = \ln \sqrt[3]{\left( \frac{7x-4}{x^7-2} \right)}$ ; б)  $y = 4^{\cos^2 2x} - x \cdot \sin 2x$ ; в)  $5^{tgy} = y^2 + \sqrt{xy}$ ; г)  $y = (tgx)^{ctgx}$

20. а)  $y = \ln \sqrt[3]{\left( \frac{2x^2+4}{2x^2-4} \right)^5}$ ; б)  $y = \left( 3x^7 - \frac{2}{3x \cdot \sqrt{x}} + 1 \right)^7$ ; в)  $7x^7 - 5y^5 = \cos \frac{x}{y}$ ; г)  $y = x^{\cos \frac{1}{x}}$

**3.4. Знайти  $\frac{dy}{dx}$  та  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :**

1. 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 + t + 1 \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t \end{cases};$$

11. 
$$\begin{cases} x = \ln \cos^2 t \\ y = \ln \sin^2 t \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4t \\ y = \frac{1}{4}t^4 + 8t - 1 \end{cases};$$

12. 
$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} \end{cases};$$

13. 
$$\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1} \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} x = t + \frac{1}{2} \sin 2t \\ y = \cos^3 t \end{cases};$$

14. 
$$\begin{cases} x = \sqrt{\cos t} \\ y = \sqrt{\sin t} \end{cases}$$

5. 
$$\begin{cases} x = \arctg \sqrt{2t-1} \\ y = \sqrt{2t-1} \end{cases};$$

15. 
$$\begin{cases} x = \frac{2-t}{2+t^2} \\ y = \frac{t^2}{2+t^2} \end{cases}$$

6. 
$$\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1) \\ y = \arccos(2t) \end{cases};$$

16. 
$$\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$$

7. 
$$\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^3 t \end{cases};$$

17. 
$$\begin{cases} x = \sin t \cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

8. 
$$\begin{cases} x = ctgt \\ y = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases};$$

18. 
$$\begin{cases} x = t + \ln \cos t \\ y = t - \ln \sin t \end{cases}$$

9. 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sin^2 t} \\ y = tgt \end{cases}$$

19. 
$$\begin{cases} x = \ln(2t) \\ y = \ln(t^2 - 1) \end{cases}$$



$$10. \begin{cases} x = 3t - \sin 3t \\ y = t - \frac{1}{3} \sin 3t \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x = ctg \frac{t}{3} \\ y = tg \frac{t}{3} \end{cases}$$

**3.5. Знайти найбільше та найменше значення функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ :**

$$1. y = x^4 - 2x^2 + 3, [-1; 3];$$

$$11. y = 2\sqrt{x} - x, [0; 4]$$

$$2. y = \frac{10x}{1+x^2}, [0; 3];$$

$$12. y = x - 4\sqrt{x} + 5, [1; 9]$$

$$3. y = \frac{x-3}{x^2+16}, [-5; 5];$$

$$13. y = x - 2 \ln x, [1; e]$$

$$4. y = \frac{x+6}{x^2+13}, [-5; 5];$$

$$14. y = \ln(x^2 - 2x + 2), [0; 3]$$

$$5. y = \frac{4-x^2}{4+x^2}, [-1; 3];$$

$$15. y = 4 - e^{-x}, [0; 1]$$

$$6. y = 4 - x - \frac{4}{x^2}, [1; 4];$$

$$16. y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}, [-1; 2]$$

$$7. y = \frac{8x+4}{x^2-15}, \left[\frac{1}{2}; 2\right];$$

$$17. y = e^{4x-x^2}, [1; 3]$$

$$8. y = \frac{1}{2}x - \sin x, \left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right];$$

$$18. y = \frac{\ln x}{x}, [1; 4]$$

$$9. y = \frac{1}{2}x + \cos x, \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right];$$

$$19. y = \sqrt{x-x^3}, [0; 1]$$

$$10. y = \frac{1}{2}x + \cos x, \left[-2\pi; -\frac{3}{2}\pi\right];$$

$$20. y = x^3 e^{x+1}, [-4; 0]$$

**3.6. Дослідити методами диференціального числення функцію та побудувати її графік:**

$$1. y = \frac{x^3 - 4}{4x^2};$$

$$11. y = \frac{x}{x^2 + x - 2}$$

$$2. y = \frac{2x^3 + 1}{x^2};$$

$$12. y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}$$

$$3. y = \frac{x^2 - 11}{4x - 3};$$

$$13. y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

$$4. y = \frac{x^2}{x^2 - 1};$$

$$14. y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

5.  $y = \frac{x-1}{x^2-4}$ ;

15.  $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

6.  $y = \frac{3-x^2}{x+2}$ ;

16.  $y = \frac{3-x^2}{x^2}$

7.  $y = \frac{x^3+16}{x}$ ;

17.  $y = \frac{x^2}{2x+2}$

8.  $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ ;

18.  $y = \frac{2x^2+8}{x}$

9.  $y = \frac{12x}{9+x^2}$ ;

19.  $y = \frac{3-x^2}{x+2}$

10.  $y = \frac{1}{x^2-9}$ ;

20.  $y = \frac{x^2+1}{x-1}$

### 3.7. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

1.  $z = -2x^2 + xy - 2y^2 + 5x - 5y - 8$ ;

11.  $z = x^2 + xy + y^2 + 6x - 9y + 9$

2.  $z = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 10x + 8y + 7$ ;

12.  $z = x - y(3 - x - y) + 5$

3.  $z = x^2 + 6xy + 2y^2 - 4x + 2y + 5$ ;

13.  $z = x(x + y - 3) + y(-6 + y)$

4.  $z = 3x^2 - 2xy + 4y^2 - 8x + 10y - 3$ ;

14.  $z = 2x^2 - y^2 - 8x - 12y - 7$

5.  $z = -3x^2 + 4xy - 2y^2 + 10x - 8y + 2$ ;

15.  $z = (x + y)^2 - xy + x - y + 1$

6.  $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 2$ ;

16.  $z = -(x + y)^2 + xy + 3x$

7.  $z = x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 5y + 3$ ;

17.  $z = -x^2 - xy - y^2 + 3x + 6y + 5$

8.  $z = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 6y + 5$ ;

18.  $z = x^3 + y^3 - 3xy$

9.  $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 5$ ;

19.  $z = x^2 y(4 - x - y)$

10.  $z = 2x^2 + 3xy + y^2 + 7x + 5y - 7$

20.  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

## 4. ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

### 4.1. Методом безпосереднього інтегрування знайти інтеграли:

1.  $\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10) dx$

11.  $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}$

2.  $\int \frac{2x - x\sqrt{x} + 7x^3}{\sqrt{x}} dx$

12.  $\int \frac{dx}{3x^2 - 25}$

$$3. \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[5]{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^5}} dx;$$

$$4. \int \frac{\sqrt{x^3} - 5x}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} dx$$

$$5. \int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$6. \int (x^2 + 1)(x - 3) dx$$

$$7. \int (\sqrt{x} - x + 1)(1 + \sqrt{x}) dx$$

$$8. \int \frac{\sqrt{x} - x^2 e^x + x^5}{x^2} dx$$

$$9. \int \frac{1}{(5x + 2)^2} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{9 + 4x^2}}$$

$$13. \int \frac{x^2}{x^2 + 4} dx$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2(1 + x^2)}$$

$$15. \int \frac{x^2 dx}{(4x^3 + 9)^4}$$

$$16. \int (1 + e^{3x})^2 \cdot e^{3x} dx$$

$$17. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$$

$$18. \int \sqrt[3]{(5x - 7)^2} dx$$

$$19. \int \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$20. \int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$$

## 4.2. Методом інтегрування частинами знайти інтеграли:

$$1. \int x \sin x dx$$

$$2. \int (x^2 - 2x) \cos 5x dx,$$

$$3. \int x e^{-x} dx$$

$$4. \int x 5^x dx$$

$$5. \int x^2 e^{3x} dx$$

$$6. \int \operatorname{arctg} x dx$$

$$7. \int (x - 3) \cdot \arcsin x dx,$$

$$8. \int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

$$9. \int e^{2x} \cos x dx.$$

$$10. \int \ln x dx.$$

$$11. \int 3x \cos x dx$$

$$12. \int x^2 \cos x dx$$

$$13. \int x \ln x dx$$

$$14. \int e^{2x} \cdot \cos 2x dx$$

$$15. \int e^{3x} \cdot \sin 3x dx$$

$$16. \int (x + 2)^2 \cdot e^{-3x} dx$$

$$17. \int (2x - 1)^2 \arcsin 3x dx$$

$$18. \int \frac{x dx}{\cos^2 x}$$

$$19. \int x \cdot \ln(x^2 + 1) dx$$

$$20. \int e^{-2x} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$$

### 4.3. Методом заміни змінних знайти інтеграли:

1.  $\int e^{\sin x} \cos x dx$

2.  $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

3.  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

4.  $\int (3+7x^2)^5 x dx$

5.  $\int \frac{e^{2x} dx}{(e^{2x} + 1)^2}$

6.  $\int \frac{3x^6}{\sqrt[6]{1-x^7}} dx$

7.  $\int x^2 3^{x^3} dx$

8.  $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

9.  $\int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}$

10.  $\int \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x + \sin x}} dx$

11.  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx$

12.  $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$

13.  $\int \frac{x^2 dx}{(4x^3 + 9)^4}$

14.  $\int \frac{dx}{x \ln^4 x}$

15.  $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

16.  $\int e^{\sin 5x} \cdot \cos 5x dx$

17.  $\int x^2 \cdot \sqrt{2x^3 + 8} dx$

18.  $\int \frac{5^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$

19.  $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{4x^2 + 1} dx$

20.  $\int \frac{\operatorname{tg}^3 5x}{\cos^2 5x} dx$

### 4.4. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

1.  $\int \frac{dx}{(x^2 - 4)(x + 3)}$

2.  $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

3.  $\int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}$

4.  $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$

5.  $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$

6.  $\int \frac{x dx}{x^4 - 3x^2 + 2}$

11.  $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$

12.  $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$

13.  $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$

14.  $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx$

15.  $\int \frac{3-4x}{(x-1) \cdot (x^2 - 3x + 2)} dx$

16.  $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + x + 1}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} dx$

$$7. \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$$

$$8. \int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} dx.$$

$$9. \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx.$$

$$10. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+1)}.$$

$$17. \int \frac{x^3 + 7x - 15}{(x-2)^2(x^2 + x + 1)} dx$$

$$18. \int \frac{3x^3 + 10x^2 + 14x + 5}{(x+1)^2(x^2 + 3x + 4)} dx$$

$$19. \int \frac{4x^3 - 12x^2 + 12x - 36}{(x-1)^2(x^2 + 7)} dx$$

$$20. \int \frac{3x^3 - 2x^2 + 6x - 7}{(x^2 - x + 4)(2x^2 - x + 1)} dx$$

#### 4.5. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

$$1. \int \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x}}{x(\sqrt[4]{x} + 1)} dx.$$

$$2. \int \frac{xdx}{1 + \sqrt{2x+1}}$$

$$3. \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}}.$$

$$4. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 10)^3}}$$

$$7. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$8. \int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$$

$$10. \int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$11. \int \frac{(x^2 - 1)dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}.$$

$$12. \int \frac{(x^2 + 1)dx}{(x^2 - 1)\sqrt{x^4 + 1}}.$$

$$13. \int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x} dx$$

$$14. \int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} - 1} dx$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2} - \sqrt{5x+1}}$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+3x} - \sqrt{2+3x}},$$

$$18. \int \frac{1 + \sqrt[4]{5-2x}}{\sqrt{5-2x}} dx,$$

$$19. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$$

$$20. \int \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx,$$

#### 4.6. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

$$1. \int \sin^3 x \cos^5 x dx$$

$$2. \int \cos^4 x \sin^3 x dx$$

$$11. \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$$

$$12. \int \frac{\sin x dx}{(1 - 3 \cdot \cos x)^2}$$

3.  $\int \sin^5 x dx$

4.  $\int \cos^5 x dx$

5.  $\int \operatorname{tg}^5 x dx$

6.  $\int (1 - \sin 2x)^2 dx$

7.  $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$

8.  $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

9.  $\int \sin 5x \cdot \sin 6x dx$

10.  $\int \cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx$

13.  $\int \frac{dx}{4 + \cos x}$

14.  $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$

15.  $\int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x}$

16.  $\int \frac{1 + \sin^3 x}{\cos^2 x} dx$

17.  $\int \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\sin 2x} dx$

18.  $\int (1 + \cos 3x)^3 dx;$

19.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x};$

20.  $\int \frac{dx}{\cos^3 x};$

**4.7. Обчислити означений інтеграл:**

1.  $\int_{-1}^2 (x^3 - 6x^2 + x) dx$

2.  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx$

3.  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 4x dx$

4.  $\int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$

5.  $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$

6.  $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx,$

7.  $\int_{-1}^1 x \operatorname{arctg} x dx,$

8.  $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx,$

11.  $\int_0^1 xe^{-x} dx$

12.  $\int_0^1 xe^{-x} dx$

13.  $\int_0^{\pi/4} x \cos x dx$

14.  $\int_0^{\pi/4} \sin x \sin 7x dx$

15.  $\int_1^3 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

16.  $\int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx,$

17.  $\int_0^{2\pi} (3 - 7x^2) \cos 2x dx,$

18.  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx,$

$$9. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx,$$

$$10. \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x dx$$

$$19. \int_0^1 x^3 \sqrt{x^4+1} dx$$

$$20. \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^3 x} \sin x dx$$

#### 4.8. Обчислити невластний інтеграл, або довести його розбіжність:

$$1. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+4x+5},$$

$$3. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x},$$

$$5. \int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2},$$

$$7. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}},$$

$$9. \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx,$$

$$2. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}},$$

$$4. \int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2},$$

$$6. \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2},$$

$$8. \int_{-\infty}^{-3} \frac{xdx}{(x^2+1)^2},$$

$$10. \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

#### 4.9. За допомогою визначеного інтегралу обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (зробити рисунок):

$$1. y = -(x+1)^2 + 1, \quad x = -y,$$

$$2. y = -x^2 + 2x + 3, \quad y = 0, \quad y = \frac{2}{3}x, \quad x \geq 0,$$

$$3. y = -x^2 + 4, \quad y = 2x + 4, \quad y = 0,$$

$$4. xy = 4, \quad x + y - 5 = 0, \quad x = 0, \quad x = 4, \quad y = 0,$$

$$5. y = x^2, \quad y = (x-6)^2 - 4, \quad y = 0,$$

$$6. y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 3x - \frac{1}{2}x^2, \quad y = 0,$$

$$7. y = \sqrt{x}, \quad y = -x + 2, \quad y = 0,$$

$$8. y = -x^2 + 4, \quad y = -(x+3)^2 + 9, \quad y = 0,$$

$$9. y = 12 + 6x - x^2, \quad y = x^2 - 2x + 2,$$

$$10. x^2 - 6x - 4y + 9 = 0, \quad x - 2y + 9 = 0,$$

$$11. x^2 - 4x - 2y + 4 = 0, \quad x - y + 10 = 0,$$

$$12. x^2 - 6x - 2y + 9 = 0, \quad 3x - y - 9 = 0,$$

$$13. x^2 - 2x - 4y + 5 = 0, \quad x - 2y + 13 = 0,$$

14. $x^2 - 6x - 3y + 12 = 0,$	$2x - y - 5 = 0,$
15. $x^2 - 2x + y - 9 = 0,$	$x + y - 5 = 0,$
16. $x^2 - 3x - y + 4 = 0,$	$5x + y - 7 = 0,$
17. $x^2 - 2x + y + 1 = 0,$	$x - y - 3 = 0,$
18. $x^2 - 8x - 2y + 18 = 0,$	$x - y + 9 = 0,$
19. $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0,$	$x - 2y + 12 = 0.$
20. $x^2 - 8x - 2y + 14 = 0,$	$x - y + 7 = 0.$

#### 4. РЯДИ

##### 5.1. Довести збіжність числового ряду та знайти його суму

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$	11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$	12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$	13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$	14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$	15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$	16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$	17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{2I^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$	18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$	19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{2I^n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}$	20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

##### 5.2. Дослідити збіжність числових рядів:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + 2}$ ;    2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 4}{5n^4 + 3n}$ ;    3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{5n+7}$ ;    4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ ;    5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+5}{2+5n} \right)^n$



2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ ;    2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n^3+4}$ ;    3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^2+2}$ ;    4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(2n+1)!}$ ;    5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+4}{3+2n^2}\right)^{n^3}$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n^2}$ ;    2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n^2+5n}$ ;    3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+4}{3n+7}$ ;    4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+2)!}$ ;    5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{3+8n}\right)^n$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5n^2+3}$ ;    2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{2n^3+3}$ ;    3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ ;    4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$ ;    5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+4}{2n+5}\right)^{n^2}$
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n+2}$ ;    2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{2n+4}$ ;    3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{2n+5}$ ;    4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{7^n}$ ;    5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{7+n}\right)^n$
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{7^n+3}$ ;    2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n^3+4}$ ;    3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+4}{2n^2+7}$ ;    4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+2)!}$ ;    5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+2}{n^2+5}\right)^{n^2}$
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ln(n+2)}$ ;    2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4+5}{n^6+4n}$ ;    3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+4}{5n+7}$ ;    4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{3^n}$ ;    5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^n$
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{n^3}$ ;    2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n+5}}{2n+4}$ ;    3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+7}{2n^2+7}$ ;    4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{2n+2}$ ;    5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{3+4n}\right)^n$
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{13n^2+4}$ ;    2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{4n^3+5}$ ;    3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{4n+2}$ ;    4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{4^{n+2}}$ ;    5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{7^n+2}$ ;    2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{5n^2+5}$ ;    3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+7}{4n^3+1}$ ;    4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n+5}$ ;    5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+2}{n+4}\right)^{n^3}$

## 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

### 6.1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

1. а)  $2x^2 y dy = (3 + y^2) dx$ ;    б)  $xy' + y = x + 1$ ;
2. а)  $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy$ ;    б)  $y'(1 + x^2) - 2xy = (1 + x^2)^2$ ;
3. а)  $y(2 + e^x) dy = e^x dx$ ;    б)  $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$ ;
4. а)  $y \sin x dx + (\cos x - 1) dy = 0$ ;    б)  $xy' - 3y = x^4 e^x$ ;
5. а)  $dy - 3x dy - \sqrt{y} dx = 0$ ;    б)  $y' + y \cos x = \cos x$ ;
6. а)  $y(1 + e^x) dy = e^x dx$ ;    б)  $y' - \frac{1}{x} y = x \ln x$ ;
7. а)  $y' \cos x = y \ln y$ ;    б)  $y' - \frac{1}{x} y = e^{x^3} x^3$ ;

8. а)  $(x+1)y' - x = 0$ ;

б)  $xy' - 2y = x + 1$ ;

9. а)  $(1+x^2)dy + xydx = 0$ ;

б)  $(x^2+1)y' + 4xy = 3$ ;

10. а)  $y' - \frac{4xy}{x^2-1} = 0$

б)  $y' - y \operatorname{tg} x = \sin 2x$ .

**6.2. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:**

1.  $(y'+1)e^{2y} = 1$

2.  $x \ln \frac{x}{y} dy - y dx = 0$

3.  $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1+x$

4.  $(1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2} \sin y - xy)dy$

5.  $xy^2 y' = x^2 + y^3$

6.  $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0$

7.  $y'' + 2x(y')^2 = 0$

8.  $yy'' - (y')^2 = y^4$

9.  $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{9}$

10.  $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$

11.  $y'' + 2y' = 5x + 1$

12.  $y'' - 6y' + 8y = 3 \sin x$

13.  $y'' + 9y = \cos 3x$

14.  $y'' - 2y' + y = e^x \sin 2x$

15.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$

**6.3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:**

1. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 2x \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3y + x \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7x \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x + e^t \\ \frac{dy}{dt} = x - y + e^t \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3y + x \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y + 8x \\ \frac{dy}{dt} = 12x + 16y \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -15y + 5x \\ \frac{dy}{dt} = 15x + 5y \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2y + x \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 12x + e^{-2t} \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 10y + e^t \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + e^t + e^{-t} \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0 \\ \frac{dy}{dt} - x + y = 0 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 2y \end{cases}$$

## Лінійна алгебра

Дії над матрицями:

$$A + B = C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix};$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix};$$

Добутком  $A \cdot B$  матриці  $A = (a_{ij})$  порядку  $m \times n$  на матрицю  $B = (b_{ij})$  порядку  $n \times k$  називається матриця  $C = (c_{ij})$  порядку  $m \times k$  елемент якої  $c_{ij}$  дорівнює сумі відповідних добутків  $i$ -го рядка матриці  $A$  та  $j$ -го стовпця матриці  $B$ :

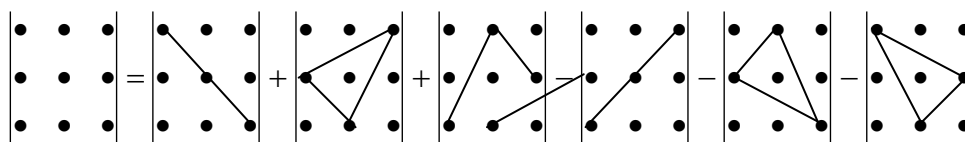
$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, k}$$

Обчислення визначника 2-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Обчислення визначника 3-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$



Алгебраїчне доповнення:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Визначник  $n$ -го порядку дорівнює сумі всіх добутків елементів довільного рядка або стовпця на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

або

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}.$$

Обернена матриця:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

**Формули Крамера:**

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, i = \overline{1, n}$$

де  $\Delta$  – визначник основної матриці;  $\Delta x_i$  – визначник, утворений із детермінанта  $\Delta$  заміною  $i$ -го стовпця стовпцем вільних членів  $b_i$  системи.

**Матричний спосіб розв’язування систем лінійних рівнянь:**

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Якщо матриця має відмінний від нуля мінор порядку  $r$ , а всі мінори вищого порядку (якщо вони є) дорівнюють нулю, то число  $r$  називається *рангом матриці*. Рангом матриці називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів. Позначають  $r = \text{rang}A = \text{Rg}A$ .

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Елементарними перетвореннями матриці є:

- перестановка рядків (стовпців);
- множення рядка (стовпця) на число, відмінне від нуля;
- додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), попередньо помножених на деяке число.

**Теорема Кронекера–Капеллі (існування розв’язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь).**

Для того, щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісною необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці  $A$  дорівнював рангу розширеної матриці  $B$ , тобто  $\text{rang}A = \text{rang}B$ .

Спільне значення рангів матриць  $A$  і називають  $B$  рангом системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Ранг системи не перевищує як числа рівнянь ( $r \leq m$ ), так і числа невідомих ( $r \leq n$ ).

**Теорема (критерій визначеності).** Якщо система лінійних рівнянь з  $n$  невідомими сумісна і її ранг дорівнює  $r$ , то при  $r = n$  система визначена, а при  $r < n$  невизначена.

## Векторна алгебра

**Координати вектора:**  $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), \overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ ;

**Довжина вектора:**  $|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ ;

**Кут між векторами:**  $\overline{A_1A_2} = (x_1, y_1, z_1), \overline{A_1A_3} = (x_2, y_2, z_2)$ ,

$$\cos\left(\overline{A_1A_2} \wedge \overline{A_1A_3}\right) = \cos\alpha = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3}}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_3}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

**Множення вектора на число:**  $\overline{a} = (x, y, z), c \cdot \overline{a} = (cx, cy, cz)$ .

**Додавання двох векторів:**  $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ,

$$\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

**Віднімання двох векторів:**  $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ,

$$\overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

**Виразення скалярного добутку через координати співмножників:**

$$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

**Виразення векторного добутку через координати співмножників:**

$$\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}, \overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}, [\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

**Застосування векторного добутку:**  $[\overline{AB}, \overline{AC}]$  – це площа паралелограма

$ABCD$ , побудованого на векторах  $\overline{AB}$  і  $\overline{AC}$ , тобто

$$S = |[\overline{AB}, \overline{AC}]|.$$

Тоді

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]|.$$

## Аналітична геометрія в просторі

**Загальне рівняння прямої:** 
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

**Канонічні рівняння прямої:** 
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad \vec{s}(m, n, p) - \text{напрямний}$$

вектор,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  – точка в просторі.

**Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:**

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2),$

$$AB: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

**Кут між двома прямими:** 
$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$

$$\cos \theta = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

**Умова перпендикулярності прямих:**  $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$

**Умова паралельності прямих:** 
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

**Рівняння площини, яка проходить через три точки:**

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$



## Диференціальне числення

## Таблиця похідних

1.  $(const)' = 0$ .
2.  $(x^n)' = nx^{n-1}$ .
3.  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ .
4.  $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .
5.  $(e^x)' = e^x$ .
6.  $(a^x)' = a^x \ln a$ .
7.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ .
8.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .
9.  $(\sin x)' = \cos x$ .
10.  $(\cos x)' = -\sin x$ .
11.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ .
12.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .
13.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
14.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
15.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ .
16.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ .

## Правила диференціювання

Якщо  $u(x)$  та  $v(x)$  - диференційовані функції, то

$$1. \quad (u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$$

$$2. \quad (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$3. \quad \left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

$$4. \quad (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

## Похідна складної функції

Похідна складної функції  $y = f(u(x))$  дорівнює добутку похідної цієї функції за проміжною змінною  $u$  на похідну проміжної змінної  $u$  за змінною  $x$ . Тобто,

$$y' = f'(u) \cdot u'(x) \quad y' = f'(u) \cdot u'(x)$$

## Інтегральне числення

## Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int 1 \cdot dx = x + c$	10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
2. $\int 0 \cdot dx = c$	11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$
3. $\int x^\alpha \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c (\alpha \neq -1)$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + c$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + c$	13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
5. $\int \alpha^x \cdot dx = \frac{\alpha^x}{\ln a} + c$	14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right  + C$
6. $\int e^x \cdot dx = e^x + c$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$
7. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C$
8. $\int \cos x \cdot dx = \sin x + c$	17. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{x^2 \pm a^2} + a^2 \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  \right) + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$	18. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} \right) + C$

**Властивості:**  $F(x)$  - первісна для функції  $f(x)$ .

- 1)  $\left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$ ;
- 2)  $d \int f(x) dx = f(x) dx$ ;
- 3)  $\int dF(x) = F(x) + c$ ;
- 4)  $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$ ;
- 5)  $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ .

**Формула інтегрування частинами:**  $\int u dv = uv - \int v du$ .

**Формула Ньютона-Лейбніца для обчислення визначених інтегралів:**

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

## Ряди. Дослідження їх на збіжність

**Числовим рядом** (або просто *рядом*) називають вираз

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (1)$$

**Необхідна ознака збіжності.** Якщо ряд (1) збігається, то його загальний член  $u_n$  прямує до нуля, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

**Наслідок (достатня ознака розбіжності ряду).** Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0,$$

або ця границя не існує, то ряд (1) розбігається.

**Узагальнено-гармонічний ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

збігається за умови  $\alpha > 1$  і розбігається, якщо  $\alpha < 1$ ; при  $\alpha = 1$  отримується гармонічний (гармонійний) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

який є **розбіжний**.

**Перша ознака порівняння**

Розглянемо два ряди з невід'ємними членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (2)$$

та

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (3)$$

Якщо для усіх  $n$ , починаючи з деякого номера  $n_0$ , виконується нерівність  $a_n \leq b_n$ , то зі збіжності ряду (3) випливає збіжність ряду (2), а з розбіжності ряду (2) випливає розбіжність ряду (3).

## Друга ознака порівняння (гранична)

Розглянемо ряди (2), (3) і припустимо, що  $b_n > 0$ ,  $n \geq n_0$ . Якщо виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k,$$

де  $0 < k < \infty$ , то ряди (2) і (3) одночасно збіжні або розбіжні.

## Ознака д'Аламбера

Якщо для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

де  $a_n > 0$ , існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

то при  $l < 1$  даний ряд збіжний, а при  $l > 1$  – розбіжний. Якщо ж  $l = 1$ , то потрібно застосувати іншу ознаку.

## Ознака Коші

Якщо для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

з невід'ємними членами існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

то при  $l < 1$  даний ряд збіжний, а при  $l > 1$  – розбіжний. Якщо ж  $l = 1$ , то потрібно застосувати іншу ознаку.

## Інтегральна ознака Коші-Маклорена

Нехай для членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

виконуються умови:

- $a_n > 0$ ;
- $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ .

Припустимо, що на проміжку  $[1; +\infty)$  визначена додатна незростаюча функція  $f(x)$  така, що  $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$ . Тоді невластний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

та ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

збігаються або розбігаються одночасно.

Нехай

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів.

Якщо ряд складений з модулів членів даного ряду, збіжний, то даний ряд також збіжний. Це достатня ознака збіжності знакозмінного ряду.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

називається **абсолютно збіжним**, якщо ряд з модулів збіжний.

У випадку, коли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

збіжний, а ряд з модулів розбіжний, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

називається **умовно збіжним**.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Бабак В.П., Білецький А.Я. та інші. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики / В. П. Бабак, А.Я. Білецький та інші. – К., 2003. – 86 с.
2. Барановська Л. В. Завдання для практичних занять з "Вищої математики": Методичний посібник / Л.В.Барановська. – К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003. – 62 с.
3. Бугір М.К. Посібник з теорії ймовірностей та математичної статистики / М.К.Бугір. – Тернопіль, 1998. – 176 с.
4. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник / Т.І.Бубняк. – Львів: Новий світ, 2007. – 436 с.
5. Васильченко У.П., Данилов В.Я., Лобаков А.У., Таран С.Ю. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навч. посібник. У двох книгах. Кн. 2. / У.П.Васильченко, В.Я. Данилов, А.У. Лобаков, С.Ю. Таран. – К: Либідь, 1994. – 208 с.
6. Вища математика: Зб. задач у 2 ч., ч.1. Лінійна і векторна алгебра / За заг. ред. П.П.Овчинникова. – К: Техніка, 2004. – 280 с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І.Юрик. – К: А.С.К., 2005. – 648 с.
8. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Т.Й. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навч. Посібник У двох книгах. Кн.1. / Г.Л.Кулініч, Л.О.Максименко, В.В.Плахотник, Т.Й. Призва. – К: Либідь, 1994. – 312 с.
9. Ройко Л.Л.Завдання для практичних занять з курсу “Вища математика” / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Твердиня. – 2006. – 52 с.
10. Ройко Л.Л. Завдання для самостійної та індивідуальної роботи з курсу “Вища математика” / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Твердиня. – 2007. – 56 с.
11. РойкоЛ.Л. Методичні рекомендації з курсу “Вища математика”. Частина 3. Диференціальне та інтегральне числення / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Вежа, 2014. – 94 с.

12. Ройко Л.Л. Основи вищої математики: навч. посібник / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Вежа, 2014. – 148 с.
13. Ройко Л.Л.Вища математика і теорія ймовірностей: практичні завдання до першого змістового модуля з навчального курсу / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Вежа, 2016. – 38 с.
14. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Ю.К.Рудавський, П.П.Костробій, Х.П.Луник, Д.В.Уханська. – Львів: Бескид Біт, 2002. – 262 с.
15. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Уханська Д.В. та інші. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / Ю.К.Рудавський, П.П.Костробій, Д.В.Уханська та інші. – Львів: "Бескид Біт", 2002. – 256 с.
16. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика. Підручник у 3 кн.: Книга 1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М.Котлова. – К: Либідь, 1994. – 280 с.
17. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика. Підручник у 3 кн.: Книга 2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М.Котлова. – К: Либідь. 1994. – 352 с.
18. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика. Підручник у 3 кн.: Книга 3. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М.Котлова. – К.: Либідь, 1994. – 352 с.