

РОЙКО Л.Л.

**ВИЩА МАТЕМАТИКА:
методичні рекомендації для самостійної роботи студентів факультету
хімії, екології та фармації**

ЛУЦЬК, 2020

**СХІДНОЄВРОПЕЙСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
І МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ЗАГАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ
ІНФОРМАТИКИ**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА:
методичні рекомендації для самостійної роботи студентів факультету
хімії, екології та фармації**

ЛУЦЬК, 2020

УДК 51(072)

Р 65

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки
(протокол №2 від 21 жовтня 2020 року)

Рецензенти:

Гуда О.В. – кандидат технічних наук, доцент кафедри фундаментальних наук
Луцького національного технічного університету

Гембарська С.Б. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії
функцій та методики навчання математики

Р 65

Ройко Л.Л.

Вища математика: методичні рекомендації для самостійної роботи студентів
факультету хімії, екології та фармації. – Луцьк, 2020. – 40 с.

Навчально-методичне видання призначене для самостійної роботи студентів з курсу «Вища математика», містить типові завдання з кожного модуля навчальної програми для студентів факультету хімії, екології та фармації.

УДК 51(072)

© Ройко Л.Л.

АНОТАЦІЯ КУРСУ

Метою викладання навчальної дисципліни «Вища математика» є надання студентам фундаментальних знань з вищої математики, які дозволяють у подальшому засвоювати спеціальні дисципліни, котрі базуються на математичних поняттях. При цьому значна увага надається виробленню практичних навичок при розв'язуванні конкретних задач, вмінню застосовувати математичні методи для дослідження реальних процесів і прийняття оптимальних рішень.

У результаті вивчення курсу студенти повинні:

- ознайомитися з методами розв'язання СЛР;
- розвинути навички диференціювання та інтегрування функцій;
- отримати навички обчислення похідних, невизначених і визначених інтегралів;
- навчитись будувати й досліджувати функції, що розглядаються у спеціальних предметах;
- засвоїти методи розв'язування простіших диференціальних рівнянь;
- одержати уявлення про комплексні числа;
- ознайомитися з елементами комбінаторики,
- ознайомитися з основними поняттями теорії ймовірностей

Основними завданнями вивчення дисципліни «Вища математика» є:

Методичні:

- навчити студентів використовувати математичний апарат при проведенні розрахунків курсових та дипломних робіт;
- навчити студентів робити оцінку очікуваного результату при розв'язуванні задач практичного змісту;
- навчити студентів не формального, вдумливого, творчого підходу до будь-якої справи;
- навчити студентів раціонально розподіляти свій час на виконання поставлених завдань.

Пізнавальні:

- прищепити студентам уміння підходити до розв'язування будь-якого питання чи проблеми різними шляхами, оцінювати їх, а потім вибирати оптимальний шлях розв'язку;
- прищепити студентам навички розв'язування математичних задач;
- прищепити студентам уміння використовувати математичні методи для розв'язання творчих задач та обробки даних наукових досліджень;
- формувати вміння здійснювати аналіз, контроль і оцінку результатів своєї праці.

Практичні:

- сформувати у студентів навички комплексного розв'язування математичних задач;
- сформувати у студентів бачення тісного дидактичного зв'язку між змістом математики та лінгвістики;
- виробити у студентів критерій раціонального підходу при розв'язуванні будь-яких задач;
- виховання загальної культури студентів;
- розвиток культури мови, вміння висловлювати свої міркування перед аудиторією.

1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Дано матриці A, B та C . Знайти:

- 1) $(2A+3C)^T$;
- 2) Довести, що переставний закон добутку двох матриць не виконується. Тобто $A \cdot C \neq C \cdot A$.
- 3) $A^T \times B$;
- 4) визначник C методом безпосереднього обчислення;
- 5) визначник C , розклавши його за елементами третього стовпця;
- 6) визначник C , розклавши його за елементами другого рядка;
- 7) C^{-1} (виконати перевірку).

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$9. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 9 \\ 8 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$14. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 5 & 9 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 7 & -1 \\ 2 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 6 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:**а) за формулами Крамера;****б) матричним методом (з допомогою оберненої матриці);****в) методом Гаусса;****г) дослідити систему на сумісність та визначеність.**

1.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases} ;$	11.	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases} ;$	12.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -54 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases} ;$	13.	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases} ;$	14.	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} ;$	15.	$\begin{cases} x + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$
6.	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases} ;$	16.	$\begin{cases} x + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} ;$	17.	$\begin{cases} x + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -9 \end{cases}$
8.	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} ;$	18.	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} ;$	19.	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$
10.	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$	20.	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$

2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

2.1. Побудувати чотирикутник, обмежений лініями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $x = a$ і $y = b$. Для виконання побудов загальні рівняння прямих перетворити до вигляду рівняння прямої у відрізках на осях. Отриману фігуру заштрихувати.

2.2 Знайти координати вершин утвореного чотирикутника.

1. $7x + 3y + 21 = 0$, $x + 3y - 3 = 0$, $x = 0$, $y = -2$
2. $x - y + 4 = 0$, $4x + y - 4 = 0$, $x = -2$, $y = 0$.
3. $5x + 3y + 15 = 0$, $2x - y - 2 = 0$, $x = 0$, $y = 1$.
4. $5x - 4y - 20 = 0$, $x + y + 2 = 0$, $x = 2$, $y = 0$.
5. $3x + y + 3 = 0$, $5x - 3y - 15 = 0$, $x = 0$, $y = -1$.
6. $2x + 3y - 6 = 0$, $6x - 5y + 30 = 0$, $x = 0$, $y = -7$.
7. $x - y + 6 = 0$, $5x + y - 5 = 0$, $x = -2$, $y = 0$.
8. $4x - 5y - 20 = 0$, $x + y + 1 = 0$, $x = 3$, $y = 0$.
9. $x + 3y + 9 = 0$, $3x - 2y - 6 = 0$, $x = 0$, $y = 2$.
10. $7x + 2y + 14 = 0$, $5x - 4y + 20 = 0$, $x = -1$, $y = 0$.
11. $5x + 4y + 20 = 0$, $x + 4y - 4 = 0$, $x = 0$, $y = -2$
12. $4x - 3y - 12 = 0$, $x + y + 4 = 0$, $x = 1$, $y = 0$.
13. $5x + 2y + 10 = 0$, $2x + 2y - 4 = 0$, $x = 0$, $y = -3$
14. $8x + 3y + 24 = 0$, $x + 5y - 5 = 0$, $x = 0$, $y = -2$.
15. $x - y - 1 = 0$, $3x + y + 24 = 0$, $x = -3$, $y = 0$.
16. $2x + y + 2 = 0$, $2x - y - 8 = 0$, $x = 0$, $y = 4$.
17. $4x + 3y + 12 = 0$, $-3x + 2y + 6 = 0$, $x = 0$, $y = 2$.
18. $5x - 3y - 15 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $x = 1$, $y = 0$.
19. $x - y + 5 = 0$, $4x + y - 3 = 0$, $x = -3$, $y = 0$.
20. $6x + 3y + 18 = 0$, $x + 5y - 5 = 0$, $x = 0$, $y = -1$

2.3. Задані вершини $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ трикутника. Знайти:

- 1) рівняння та довжину сторони BC ;
- 2) рівняння та довжину висоти AD . Записати рівняння висоти у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом та у відрізках на осях;
- 3) рівняння та довжину медіани CE ;
- 4) величину кута BCE .

- | | | | | | |
|------------------|---------------|---------------|------------------|---------------|---------------|
| 1. $A(2; 5)$, | $B(-3; 4)$, | $C(1; -2)$. | 11. $A(1; 4)$, | $B(-2; 3)$, | $C(1; -1)$. |
| 2. $A(3; -1)$, | $B(-5; 5)$, | $C(-4; 0)$. | 12. $A(2; -2)$, | $B(-1; 4)$, | $C(-3; 0)$. |
| 3. $A(10; -1)$, | $B(2; 5)$, | $C(3; 0)$. | 13. $A(7; -1)$, | $B(1; 3)$, | $C(2; 1)$. |
| 4. $A(9; 1)$, | $B(1; 7)$, | $C(-2; -2)$. | 14. $A(2; 3)$, | $B(0; 7)$, | $C(-2; -1)$. |
| 5. $A(4; -2)$, | $B(-4; 4)$, | $C(2; 3)$. | 15. $A(3; -3)$, | $B(-2; 4)$, | $C(3; 1)$. |
| 6. $A(5; 1)$, | $B(-3; 7)$, | $C(-2; 2)$. | 16. $A(4; 2)$, | $B(-3; 5)$, | $C(2; -3)$. |
| 7. $A(1; 3)$, | $B(-2; -3)$, | $C(-6; 4)$. | 17. $A(2; 5)$, | $B(-1; -3)$, | $C(-3; 2)$. |
| 8. $A(2; 10)$, | $B(-7; 8)$, | $C(2; -1)$. | 18. $A(1; 9)$, | $B(-3; 8)$, | $C(1; -3)$. |
| 9. $A(2; 1)$, | $B(-6; -3)$, | $C(0; -4)$. | 19. $A(1; 0)$, | $B(-3; -3)$, | $C(0; 4)$. |
| 10. $A(3; 4)$, | $B(6; 0)$, | $C(2; 5)$. | 20. $A(2; 6)$, | $B(5; 0)$, | $C(-1; -5)$. |

2.4. Дано координати вершин трикутної піраміди $ABCD$. Знайти:

- 1) Координати векторів \vec{AB} , \vec{AC} , і \vec{AD} та їх абсолютні величини;
- 2) Координати вектора $3\vec{AC} - \vec{AD} + 4\vec{AB}$;
- 3) Проекцію вектора \vec{AD} на вектор \vec{AB} ;
- 4) Площу грані ABC ;
- 5) Об'єм піраміди $ABCD$ та її висоту;
- 6) Загальне рівняння площини ABC та координати її нормального вектора;
- 7) Рівняння площини ABC у відрізках на осях;
- 8) Канонічне та параметричне рівняння прямої AB ;
- 9) Кут між площинами ABC та ABD ;
- 10) Відстань від точки D до грані ABC ;
- 11) Кут між прямими AB і AC ;
- 12) Канонічне рівняння висоти DH піраміди $ABCD$;
- 13) Координати точки перетину висоти DH з гранню ABC ;
- 14) Кут між ребром AD і гранню ABC .

- | | | | |
|---------------------|-----------------|-----------------|----------------|
| 1. $A(0; -3; 2);$ | $B(4; -2; 3);$ | $C(1; -5; 2);$ | $D(3; -4; 4).$ |
| 2. $A(-5; 2; 0);$ | $B(3; -4; 0);$ | $C(6; 2; 3);$ | $D(2; 1; -4).$ |
| 3. $A(-5; 2; -3);$ | $B(-4; 4; -5);$ | $C(6; -2; -1);$ | $D(3; 1; 3).$ |
| 4. $A(-1; -4; -1)$ | $B(0; -2; -3)$ | $C(2; -3; 1),$ | $D(7; 3; 4).$ |
| 5. $A(0; -2; 1);$ | $B(1; 0; -1);$ | $C(2; 8; 3);$ | $D(8; 6; 5).$ |
| 6. $A(-2; -1; 8);$ | $B(-4; 0; 6);$ | $C(0; 1; -2);$ | $D(0; -2; 1).$ |
| 7. $A(-2; 1; 0);$ | $B(3; -6; 0);$ | $C(4; 3; 2);$ | $D(2; 5; -3).$ |
| 8. $A(1; 6; -1);$ | $B(0; 3; 1);$ | $C(2; 13; 4);$ | $D(6; 2; 0).$ |
| 9. $A(0; -2; 1);$ | $B(2; -3; 1);$ | $C(4; -5; 2);$ | $D(2; -4; 3).$ |
| 10. $A(-4; 4; -5);$ | $B(0; -2; 1);$ | $C(6; -1; 7);$ | $D(4; 1; -2).$ |
| 11. $A(2; -3; 1);$ | $B(-2; -1; 8);$ | $C(2; -3; 1);$ | $D(-1; 2; 5).$ |
| 12. $A(4; 2; -3);$ | $B(4; -2; 5);$ | $C(-5; 2; 1);$ | $D(3; 1; 3).$ |
| 13. $A(-5; 2; -3);$ | $B(-4; 4; -5);$ | $C(6; -2; -1);$ | $D(3; 1; 3).$ |
| 14. $A(-3; 1; 0);$ | $B(4; -5; 0);$ | $C(5; 3; 3);$ | $D(2; 4; -4).$ |
| 15. $A(3; 2; -4);$ | $B(5; -4; 3);$ | $C(-6; 3; -1);$ | $D(4; 2; 3).$ |
| 16. $A(3; 3; 4);$ | $B(2; 0; -9);$ | $C(5; 2; 1);$ | $D(1; 6; 2).$ |
| 17. $A(3; 2; -4);$ | $B(4; -4; 5);$ | $C(-7; 2; 2);$ | $D(2; 1; 3).$ |
| 18. $A(0; -1; 2);$ | $B(2; -3; 1);$ | $C(3; 5; 5);$ | $D(2; 4; -4).$ |
| 19. $A(-4; 2; 0);$ | $B(3; -4; 0);$ | $C(6; 2; 3);$ | $D(2; 3; -4).$ |
| 20. $A(2; 2; -3);$ | $B(5; -3; 4);$ | $C(-4; 2; -2);$ | $D(4; 1; 5).$ |

3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

3.1. Знайти границі:

1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x^3 - 3x}{2 - x^2 + 8x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+6} - \sqrt{8-x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 4x \operatorname{ctg} 2x$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^{x-4}$
2. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6 + x^4 - 7}{7x^6 - 3x^2 + x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{x \operatorname{tg} 2x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+2}{4x-3} \right)^{-2x+3}$
3. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x - 4}{2x^4 + 5x + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{x+4}$
4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{4 - x^4 + 2x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{2 \sin^2 3x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x-2}{-x+4} \right)^{4x+4}$
5. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^2 + 4x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 - x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-7} \right)^{x+3}$
6. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \operatorname{tg} 5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5+2x}{2x-3} \right)^{x+5}$
7. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^2 + 3x + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{-2-x}}{x+4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{\sin^2 4x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5+x}{x-3} \right)^{3x-2}$
8. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+4}{4x^4 + 2x^2 + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x \operatorname{tg} x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3} \right)^{x^2+4}$
9. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - 3}{x - 4x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{\operatorname{tg}^2 5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{3x+2}$
10. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^2 + 1}{3x^4 + x^3 + 5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \sin 2x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-1} \right)^{2x-7}$
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x + 1}{8x^2 + 3x + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{8-x}}{x-5}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}^2 3x}{\operatorname{ctg}^2 6x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4+x}{x-2} \right)^{3x+4}$
12. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x + 1}{4 + 3x^2 + 2x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 + 5x + 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2 5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+2}{2x-3} \right)^{5x+3}$
13. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x^3 - x}{3 + 3x^2 + 4x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{10 + 3x - x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+4}{4x+3} \right)^{4x+5}$
14. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{5 - x^2 + 2x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{\sqrt{x+8} - \sqrt{-x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{1 - \cos 6x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x-4} \right)^{5-2x}$
15. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 7}{2 - 4x + 3x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} 8x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+5}{5x-3} \right)^{x+3}$
16. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 6x^2 + 5}{4 - x + 3x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{-2-x}}{x+4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg}^2 2x \cdot \sin^2 6x)$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4} \right)^{4x-1}$
17. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 + 6x^3 - 7}{5x^3 - 3x^5 + 3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{7x - 3x^2 - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 5x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-2}{7x-1} \right)^{4-3x}$
18. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x}{1 - 4x^2 + 6x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 6x$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-x}{5-x} \right)^{x+2}$
19. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 6x^3 - 7}{5x^3 - 3x^5 + 3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{\cos 2x - 1}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-2}{7x-1} \right)^{4-3x}$

$$20. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 12x^3}{3x^3 - x^5 + 7x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{-1-x}}{2+x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+4}{6x-3} \right)^{5x-2}$$

3.2. Дослідити функцію на неперервність вияснити характер точок розриву, побудувати графік:

$$\begin{array}{ll}
 1. f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases} & 11. f(x) = \begin{cases} -3, & \text{якщо } x < -2, \\ -x^2 + 1, & \text{якщо } -2 \leq x < 2, \\ 3, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases} \\
 2. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ 3x^2 + 1, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases} & 12. f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & \text{якщо } x \leq 2; \\ x, & \text{якщо } x > 2. \end{cases} \\
 3. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 2, \\ x^3 + 2, & \text{якщо } x > 2. \end{cases} & 13. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1; \\ 2 - x, & \text{якщо } 1 < x \leq 2. \end{cases} \\
 4. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & \text{якщо } x < 3, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases} & 14. f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{якщо } x \leq 0; \\ 4-x^2, & \text{якщо } 0 < x < 2; \\ x-2, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases} \\
 5. f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{якщо } x \leq 1, \\ -x^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases} & 15. f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \leq 1; \\ 3-x^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases} \\
 6. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ -x+3, & \text{якщо } x > 1. \end{cases} & 16. f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x < -2, \\ -x+1, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 1, \\ x^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases} \\
 7. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 < x \leq 2, \\ -x+3, & \text{якщо } x > 2. \end{cases} & 17. f(x) = \begin{cases} -4, & \text{якщо } x \leq -2; \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 2; \\ 2x-7, & \text{якщо } 2 \leq x < \infty. \end{cases} \\
 8. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases} & 18. f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1; \\ 4-2x, & \text{якщо } 1 < x < 2,5; \\ 2x-7, & \text{якщо } 2,5 \leq x < \infty. \end{cases} \\
 9. f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{якщо } x < -1, \\ x^2 + 2, & \text{якщо } -1 \leq x < 1, \\ 2x, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases} & 19. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1; \\ 2, & \text{якщо } 1 < x < 3; \\ x, & \text{якщо } 3 \leq x < \infty. \end{cases} \\
 10. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 < x \leq 2, \\ x+1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases} & 20. f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{якщо } x < 0; \\ (x-1)^2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2; \\ 4-x, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}
 \end{array}$$

3.3. Знайти похідну заданих функцій:

1. а) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; б) $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x^2}}$; в) $x \sin y - y \cos x = 0$; г) $y = x^{\frac{2}{x}}$
2. а) $y = \frac{3x}{\sqrt[3]{2+x}} - 6\sqrt{2+x}$; б) $y = \sin^3 \sqrt{2x+1}$; в) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$; г) $y = (\arccos x)^x$
3. а) $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; б) $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$; в) $y \sin x + \cos(x-y) = 6$; г) $y = x^{\arcsin x}$
4. а) $y = \sqrt[3]{x^4+5x} - \sqrt[4]{(5x-1)^3}$; б) $y = \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$; в) $\cos(x-y) - 2x + 4y = 0$; г) $y = x^{\cos^2 x}$
5. а) $y = x + \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$; б) $y = \sin \sqrt{x^2+x}$; в) $xe^y + ye^x = xy$; г) $y = x^{\frac{1}{x^2}}$
6. а) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{5}{\sqrt[4]{(x^3+2)^3}}$; б) $y = (e^{\sin x} - x)^2$; в) $\cos(xy) = \frac{y}{x}$; г) $y = 2x^{\sqrt{x}}$
7. а) $y = x^3 \sqrt{\frac{2}{1+x}}$; б) $y = (3x^8 + 5\sqrt{x^2} - 3)^5$; в) $xy + \ln y - 2 \ln x = 0$; г) $y = (\ln x)^x$
8. а) $y = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$; б) $y = 7^{\operatorname{arctg} 2x} + x \cdot \ln 2x$; в) $e^{x+y} = \sin \frac{y}{x}$; г) $y = (\sin x)^{\cos x}$
9. а) $y = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$; б) $y = x \arcsin \frac{2x+1}{3}$; в) $y^2 - \operatorname{tg} xy = 5 + x^7$; г) $y = \arccos x^{\arcsin \frac{1}{x}}$
10. а) $y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$; б) $y = e^{-x^2} \cos^3(2x+3)$; в) $y \ln x - x \ln y = x + y$; г) $y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}$
11. а) $y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{3x-4}{3x+1}\right)^4}$; б) $y = \frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$; в) $(x+y)^2 = (x-2y)^3$; г) $y = x^{\frac{\cos \frac{1}{x}}{x}}$
12. а) $y = \ln \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x}}{1-x} + x^2$; б) $y = 4^{\cos 2x} - x \cdot \sin 2x$; в) $y^5 + x^7 - \sqrt{xy} = 3$; г) $y = x^{\lg x}$
13. а) $y = \ln \sqrt[5]{\left(\frac{1-5x}{1+5x}\right)^3}$; б) $y = \left(3x^4 - \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}} + 2\right)^5$; в) $3x^2 + 2y^5 = \operatorname{ctg} xy$; г) $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin 3x}$
14. а) $y = \ln \arccos \frac{1}{\sqrt{2x}} + \sqrt[3]{x^2}$; б) $y = 3^{\operatorname{ctg} 5x} + x \cdot \sin 5x$; в) $\sqrt[5]{yx^2} = \frac{x}{y} + \operatorname{tg} y$; г) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$
15. а) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} + 4x^3$; б) $y = \ln \sqrt{\left(\frac{x^6-3}{6x+2}\right)^3}$; в) $7^{\frac{x}{y}} + 3^{xy} = 2 + \sin x$; г) $y = x^{\sin x}$
16. а) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - x \cdot \cos^2 x$; б) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$; в) $\ln(x+y) = y^3 + \sin x$; г) $y = x^{\arcsin \frac{1}{x}}$
17. а) $y = \ln \sqrt[4]{\left(\frac{2x^3-3}{2x^3+3}\right)^3}$; б) $y = 4^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + x \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$; в) $7 + \operatorname{arctg} xy = x + \ln y$; г) $y = (2-x)^{\arccos \frac{1}{x}}$
18. а) $y = \left(\frac{3x^8}{8} - 6x \cdot \sqrt[3]{x} - 6\right)^7$; б) $y = \operatorname{tg} 3x + 2^{x-2}$; в) $\frac{y}{x-3} + \cos y = \ln x$; г) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$
19. а) $y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{7x-4}{x^7-2}\right)}$; б) $y = 4^{\cos^2 2x} - x \cdot \sin 2x$; в) $5^{\operatorname{tg} y} = y^2 + \sqrt{xy}$; г) $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$

20. а) $y = \ln^3 \sqrt[3]{\left(\frac{2x^2 + 4}{2x^2 - 4}\right)^5}$; б) $y = \left(3x^7 - \frac{2}{3x \cdot \sqrt{x}} + 1\right)^7$; в) $7x^7 - 5y^5 = \cos \frac{x}{y}$; г) $y = x^{\cos \frac{1}{x}}$;

3.4. Знайти $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$:

1.
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 + t + 1 \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t \end{cases};$$

11.
$$\begin{cases} x = \ln \cos^2 t \\ y = \ln \sin^2 t \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4t \\ y = \frac{1}{4}t^4 + 8t - 1 \end{cases};$$

12.
$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} \end{cases};$$

13.
$$\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1} \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x = t + \frac{1}{2} \sin 2t \\ y = \cos^3 t \end{cases};$$

14.
$$\begin{cases} x = \sqrt{\cos t} \\ y = \sqrt{\sin t} \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \sqrt{2t - 1} \\ y = \sqrt{2t - 1} \end{cases};$$

15.
$$\begin{cases} x = \frac{2 - t}{2 + t^2} \\ y = \frac{t^2}{2 + t^2} \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1) \\ y = \arccos(2t) \end{cases};$$

16.
$$\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^3 t \end{cases};$$

17.
$$\begin{cases} x = \sin t \cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x = ctgt \\ y = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases};$$

18.
$$\begin{cases} x = t + \ln \cos t \\ y = t - \ln \sin t \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sin^2 t} \\ y = tgt \end{cases};$$

19.
$$\begin{cases} x = \ln(2t) \\ y = \ln(t^2 - 1) \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x = 3t - \sin 3t \\ y = t - \frac{1}{3} \sin 3t \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} x = ctg \frac{t}{3} \\ y = tg \frac{t}{3} \end{cases}$$

3.5. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$:

- $y = x^4 - 2x^2 + 3, [-1; 3];$
- $y = \frac{10x}{1+x^2}, [0; 3];$
- $y = \frac{x-3}{x^2+16}, [-5; 5];$
- $y = \frac{x+6}{x^2+13}, [-5; 5];$
- $y = \frac{4-x^2}{4+x^2}, [-1; 3];$
- $y = 4-x-\frac{4}{x^2}, [1; 4];$
- $y = \frac{8x+4}{x^2-15}, \left[\frac{1}{2}; 2\right];$
- $y = \frac{1}{2}x - \sin x, \left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right];$
- $y = \frac{1}{2}x + \cos x, \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right];$
- $y = \frac{1}{2}x + \cos x, \left[-2\pi; -\frac{3}{2}\pi\right];$
- $y = 2\sqrt{x} - x, [0; 4];$
- $y = x - 4\sqrt{x} + 5, [1; 9];$
- $y = x - 2\ln x, [1; e];$
- $y = \ln(x^2 - 2x + 2), [0; 3];$
- $y = 4 - e^{-x}, [0; 1];$
- $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}, [-1; 2];$
- $y = e^{4x-x^2}, [1; 3];$
- $y = \frac{\ln x}{x}, [1; 4];$
- $y = \sqrt{x-x^3}, [0; 1];$
- $y = x^3 e^{x+1}, [-4; 0];$

3.6. Дослідити методами диференціального числення функцію та побудувати її графік:

- $y = \frac{x^3 - 4}{4x^2};$
- $y = \frac{2x^3 + 1}{x^2};$
- $y = \frac{x^2 - 11}{4x - 3};$
- $y = \frac{x^2}{x^2 - 1};$
- $y = \frac{x-1}{x^2 - 4};$
- $y = \frac{3-x^2}{x+2};$
- $y = \frac{x^3 + 16}{x};$
- $y = \frac{x^3}{3-x^2};$
- $y = \frac{12x}{9+x^2};$
- $y = \frac{1}{x^2 - 9};$
- $y = \frac{x}{x^2 + x - 2};$
- $y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2};$
- $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1};$
- $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2;$
- $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2};$
- $y = \frac{3-x^2}{x^2};$
- $y = \frac{x^2}{2x+2};$
- $y = \frac{2x^2 + 8}{x};$
- $y = \frac{3-x^2}{x+2};$
- $y = \frac{x^2 + 1}{x-1};$

3.7. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

- $z = -2x^2 + xy - 2y^2 + 5x - 5y - 8;$
- $z = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 10x + 8y + 7;$
- $z = x^2 + 6xy + 2y^2 - 4x + 2y + 5;$
- $z = 3x^2 - 2xy + 4y^2 - 8x + 10y - 3;$
- $z = -3x^2 + 4xy - 2y^2 + 10x - 8y + 2;$
- $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 2;$
- $z = x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 5y + 3;$
- $z = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 6y + 5;$
- $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 5;$
- $z = 2x^2 + 3xy + y^2 + 7x + 5y - 7$
- $z = x^2 + xy + y^2 + 6x - 9y + 9$
- $z = x - y(3 - x - y) + 5$
- $z = x(x + y - 3) + y(-6 + y)$
- $z = 2x^2 - y^2 - 8x - 12y - 7$
- $z = (x + y)^2 - xy + x - y + 1$
- $z = -(x + y)^2 + xy + 3x$
- $z = -x^2 - xy - y^2 + 3x + 6y + 5$
- $z = x^3 + y^3 - 3xy$
- $z = x^2 y(4 - x - y)$
- $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

4. ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

4.1. Методом безпосереднього інтегрування знайти інтеграли:

- $\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10) dx$
- $\int \frac{2x - x\sqrt{x} + 7x^3}{\sqrt{x}} dx$
- $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[5]{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^5}} dx;$
- $\int \frac{\sqrt{x^3} - 5x}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} dx$
- $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx$
- $\int (x^2 + 1)(x - 3) dx$
- $\int (\sqrt{x} - x + 1)(1 + \sqrt{x}) dx$
- $\int \frac{\sqrt{x} - x^2 e^x + x^5}{x^2} dx$
- $\int \frac{1}{(5x + 2)^2} dx$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + 4x^2}}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{7 - x^2}}$
- $\int \frac{dx}{3x^2 - 25}$
- $\int \frac{x^2}{x^2 + 4} dx$
- $\int \frac{dx}{x^2(1 + x^2)}$
- $\int \frac{x^2 dx}{(4x^3 + 9)^4}$
- $\int (1 + e^{3x})^2 \cdot e^{3x} dx$
- $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$
- $\int \sqrt[3]{(5x - 7)^2} dx$
- $\int \operatorname{tg}^2 x dx$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$

4.2. Методом інтегрування частинами знайти інтеграли:

1. $\int x \sin x dx$

2. $\int (x^2 - 2x) \cos 5x dx,$

3. $\int x e^{-x} dx$

4. $\int x 5^x dx$

5. $\int x^2 e^{3x} dx$

6. $\int \operatorname{arctg} x dx$

7. $\int (x-3) \cdot \arcsin x dx,$

8. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

9. $\int e^{2x} \cos x dx.$

10. $\int \ln x dx.$

11. $\int 3x \cos x dx$

12. $\int x^2 \cos x dx$

13. $\int x \ln x dx$

14. $\int e^{2x} \cdot \cos 2x dx$

15. $\int e^{3x} \cdot \sin 3x dx$

16. $\int (x+2)^2 \cdot e^{-3x} dx$

17. $\int (2x-1)^2 \arcsin 3x dx$

18. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

19. $\int x \cdot \ln(x^2 + 1) dx$

20. $\int e^{-2x} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$

4.3. Методом заміни змінних знайти інтеграли:

1. $\int e^{\sin x} \cos x dx$

2. $\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

3. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

4. $\int (3+7x^2)^5 x dx$

5. $\int \frac{e^{2x} dx}{(e^{2x} + 1)^2}$

6. $\int \frac{3x^6}{\sqrt[6]{1-x^7}} dx$

7. $\int x^2 3^{x^3} dx$

8. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

11. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx$

12. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$

13. $\int \frac{x^2 dx}{(4x^3 + 9)^4}$

14. $\int \frac{dx}{x \ln^4 x}$

15. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

16. $\int e^{\sin 5x} \cdot \cos 5x dx$

17. $\int x^2 \cdot \sqrt{2x^3 + 8} dx$

18. $\int \frac{5^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$

$$9. \int \frac{\ln x dx}{x(1-\ln^2 x)}.$$

$$10. \int \frac{1+\cos x}{\sqrt{x+\sin x}} dx$$

$$19. \int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{4x^2+1} dx$$

$$20. \int \frac{\operatorname{tg}^3 5x}{\cos^2 5x} dx$$

4.4. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

$$1. \int \frac{dx}{(x^2-4)(x+3)}$$

$$2. \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$3. \int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$$

$$4. \int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx$$

$$5. \int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$$

$$6. \int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$$

$$7. \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$$

$$8. \int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6} dx$$

$$9. \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$$

$$10. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+1)}$$

$$11. \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

$$12. \int \frac{dx}{x^4-x^2}$$

$$13. \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$$

$$14. \int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$$

$$15. \int \frac{3-4x}{(x-1)(x^2-3x+2)} dx$$

$$16. \int \frac{3x^3-2x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$$

$$17. \int \frac{x^3+7x-15}{(x-2)^2(x^2+x+1)} dx$$

$$18. \int \frac{3x^3+10x^2+14x+5}{(x+1)^2(x^2+3x+4)} dx$$

$$19. \int \frac{4x^3-12x^2+12x-36}{(x-1)^2(x^2+7)} dx$$

$$20. \int \frac{3x^3-2x^2+6x-7}{(x^2-x+4)(2x^2-x+1)} dx$$

4.5. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

$$1. \int \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[8]{x}}{x(\sqrt[4]{x}+1)} dx$$

$$2. \int \frac{xdx}{1+\sqrt{2x+1}}$$

$$3. \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$$

$$4. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$11. \int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$$

$$12. \int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$$

$$13. \int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x} dx$$

$$14. \int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-1} dx$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}-1}$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-10)^3}}$$

$$7. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$8. \int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx$$

$$9. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$$

$$10. \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}-\sqrt{5x+1}}$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2+3x}-\sqrt{2+3x}}$$

$$18. \int \frac{1+\sqrt[4]{5-2x}}{\sqrt{5-2x}} dx,$$

$$19. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$$

$$20. \int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx,$$

4.6. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

$$1. \int \sin^3 x \cos^5 x dx$$

$$2. \int \cos^4 x \sin^3 x dx$$

$$3. \int \sin^5 x dx$$

$$4. \int \cos^5 x dx$$

$$5. \int \operatorname{tg}^5 x dx$$

$$6. \int (1 - \sin 2x)^2 dx$$

$$7. \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^3 x}$$

$$9. \int \sin 5x \cdot \sin 6x dx$$

$$10. \int \cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) dx$$

$$11. \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$$

$$12. \int \frac{\sin x dx}{(1 - 3 \cdot \cos x)^2}$$

$$13. \int \frac{dx}{4 + \cos x}$$

$$14. \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$$

$$15. \int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x}$$

$$16. \int \frac{1 + \sin^3 x}{\cos^2 x} dx$$

$$17. \int \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\sin 2x} dx$$

$$18. \int (1 + \cos 3x)^3 dx;$$

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x};$$

$$20. \int \frac{dx}{\cos^3 x};$$

4.7. Обчислити означений інтеграл:

$$1. \int_{-1}^2 (x^3 - 6x^2 + x) dx$$

$$2. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx$$

$$11. \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$12. \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$3. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 4x dx$$

$$4. \int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}},$$

$$5. \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4},$$

$$6. \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx,$$

$$7. \int_{-1}^1 x \operatorname{arctg} x dx,$$

$$8. \int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx,$$

$$9. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx,$$

$$10. \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x dx$$

$$13. \int_0^{\pi/4} x \cos x dx$$

$$14. \int_0^{\pi/4} \sin x \sin 7x dx$$

$$15. \int_1^3 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$16. \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx,$$

$$17. \int_0^{2\pi} (3-7x^2) \cos 2x dx,$$

$$18. \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx,$$

$$19. \int_0^1 x^3 \sqrt{x^4+1} dx$$

$$20. \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^3 x} \sin x dx$$

4.8. Обчислити невластний інтеграл, або довести його розбіжність:

$$1. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+4x+5},$$

$$3. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x},$$

$$5. \int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2},$$

$$7. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}},$$

$$9. \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx,$$

$$2. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}},$$

$$4. \int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2},$$

$$6. \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2},$$

$$8. \int_{-\infty}^{-3} \frac{xdx}{(x^2+1)^2},$$

$$10. \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

4.9. За допомогою визначеного інтегралу обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (зробити рисунок):

$$1. y = -(x+1)^2 + 1, \quad x = -y,$$

$$2. y = -x^2 + 2x + 3, \quad y = 0, \quad y = \frac{2}{3}x, \quad x \geq 0,$$

$$3. y = -x^2 + 4, \quad y = 2x + 4, \quad y = 0,$$

4. $xy = 4, \quad x + y - 5 = 0, \quad x = 0, \quad x = 4, \quad y = 0,$
5. $y = x^2, \quad y = (x - 6)^2 - 4, \quad y = 0,$
6. $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 3x - \frac{1}{2}x^2, \quad y = 0,$
7. $y = \sqrt{x}, \quad y = -x + 2, \quad y = 0,$
8. $y = -x^2 + 4, \quad y = -(x + 3)^2 + 9, \quad y = 0,$
9. $y = 12 + 6x - x^2, \quad y = x^2 - 2x + 2,$
10. $x^2 - 6x - 4y + 9 = 0, \quad x - 2y + 9 = 0,$
11. $x^2 - 4x - 2y + 4 = 0, \quad x - y + 10 = 0,$
12. $x^2 - 6x - 2y + 9 = 0, \quad 3x - y - 9 = 0,$
13. $x^2 - 2x - 4y + 5 = 0, \quad x - 2y + 13 = 0,$
14. $x^2 - 6x - 3y + 12 = 0, \quad 2x - y - 5 = 0,$
15. $x^2 - 2x + y - 9 = 0, \quad x + y - 5 = 0,$
16. $x^2 - 3x - y + 4 = 0, \quad 5x + y - 7 = 0,$
17. $x^2 - 2x + y + 1 = 0, \quad x - y - 3 = 0,$
18. $x^2 - 8x - 2y + 18 = 0, \quad x - y + 9 = 0,$
19. $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0, \quad x - 2y + 12 = 0,$
20. $x^2 - 8x - 2y + 14 = 0, \quad x - y + 7 = 0.$

4. РЯДИ

5.1. Довести збіжність числового ряду та знайти його суму

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}$
12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{21^n}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n}$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

5.2. Дослідити збіжність числових рядів:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + 2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 4}{5n^4 + 3n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{5n+7}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{2+5n} \right)^n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n^3+4}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^2+2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(2n+1)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+4}{3+2n^2} \right)^{n^3}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^2+5n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+4}{3n+7}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+2)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{3+8n} \right)^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^{n^2}+3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+8}{2n^3+3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+4}{2n+5} \right)^{n^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n+2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+1}{2n+4}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{2n+5}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{7^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{7+n} \right)^n$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{7^n+3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n^3+4}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+4}{2n^2+7}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+2)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+2}{n^2+5} \right)^{n^2}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ln(n+2)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4+5}{n^6+4n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+4}{5n+7}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{3^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right)^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{n^3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}+5}{2n+4}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+7}{2n^2+7}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{2n+2}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{3+4n} \right)^n$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{13n^2+4}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{4n^3+5}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{4n+2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{4^{n+2}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{n^2}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{7^n+2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+4}{5n^2+5}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+7}{4n^3+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n+5}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+2}{n+4} \right)^{n^3}$

6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

6.1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

1. а) $2x^2 y dy = (3 + y^2) dx$; б) $xy' + y = x + 1$;
2. а) $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy$; б) $y'(1 + x^2) - 2xy = (1 + x^2)^2$;
3. а) $y(2 + e^x) dy = e^x dx$; б) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$;
4. а) $y \sin x dx + (\cos x - 1) dy = 0$; б) $xy' - 3y = x^4 e^x$;
5. а) $dy - 3x dy - \sqrt{y} dx = 0$; б) $y' + y \cos x = \cos x$;

6. a) $y(1 + e^x)dy = e^x dx$;

б) $y' - \frac{1}{x}y = x \ln x$;

7. a) $y' \cos x = y \ln y$;

б) $y' - \frac{1}{x}y = e^{x^3} x^3$;

8. a) $(x+1)y' - x = 0$;

б) $xy' - 2y = x + 1$;

9. a) $(1 + x^2)dy + xydx = 0$;

б) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$;

10. a) $y' - \frac{4xy}{x^2 - 1} = 0$

б) $y' - y \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

7. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

1. Інвестиційна кампанія має k пакетів акцій, серед яких z пакетів кондитерських фабрик. Визначити ймовірність, що серед навмання вибраних m пакетів акцій є рівно l пакетів кондитерських фабрик.

Задачу розв'язати за даними таблиці (N – номер варіанта):

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
k	10	10	10	10	9	11	11	11	10	9	11	10	9	11	12	10	14
m	6	5	7	8	7	8	7	6	5	6	7	6	8	8	5	6	9
l	3	2	4	4	4	3	2	3	4	4	2	3	2	2	3	4	4
z	4	4	5	6	5	4	3	5	5	5	4	6	5	4	4	7	7

N	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
k	15	12	10	10	9	10	11	12	10	9	11	9	12
m	6	5	7	7	7	8	8	6	5	6	7	5	8
l	3	2	4	4	4	3	2	3	4	4	2	3	2
z	4	4	5	6	5	4	3	5	5	5	4	6	4

5. В двох партіях відповідно $k_1\%$ і $k_2\%$ якісних виробів. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність того, що серед відібраних виробів: а) хоча б один бракований; б) обидва браковані; в) один бракований і один якісний?

Задачу розв'язати за даними таблиці (N – номер варіанта):

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
k_1	76	83	75	84	36	44	33	81	73	32	82	43	76	82	85	55	80
k_2	42	35	43	34	82	74	85	37	45	86	36	75	42	36	35	65	50

N	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
k_1	75	83	65	89	36	40	35	80	75	37	86	45	86
k_2	45	33	43	39	76	72	75	35	35	77	36	65	36

3. У магазин надходять однотипні вироби з трьох заводів, причому з i -го заводу надходить $m_i\%$ виробів ($i=1,2,3$). Серед виробів i -го заводу $n_i\%$ якісних. Куплено один виріб. Він виявився якісним. Визначити ймовірність того, що куплений виріб виготовлено j -им заводом.

Задачу розв'язати за даними таблиці (N – номер варіанта):

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
m_1	50	50	30	60	40	70	60	50	20	10	30	70	60	20	35	40	45
m_2	30	20	50	20	30	20	10	30	40	50	40	10	30	70	25	30	35
m_3	20	30	20	20	30	10	30	20	40	40	30	20	10	10	40	30	20
n_1	70	80	70	70	80	70	80	90	90	70	90	70	80	80	60	60	70
n_2	80	70	80	80	80	80	90	80	70	90	80	90	80	70	70	60	90
n_3	90	90	90	90	90	90	80	90	80	80	90	80	90	90	80	70	80
j	1	2	3	1	1	2	2	2	3	1	3	2	1	2	1	2	3

N	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m_1	60	50	30	50	45	70	30	30	25	50	40	65	10
m_2	30	25	40	20	30	15	10	50	35	10	30	15	30

m_3	10	25	30	30	25	15	60	20	40	40	30	20	60
n_1	50	80	70	70	80	70	80	90	90	70	90	70	80
n_2	80	70	80	80	80	80	90	80	70	90	80	90	80
n_3	90	80	90	90	90	90	70	90	80	80	90	80	90
j	1	2	3	1	1	2	2	2	3	1	3	2	1

4. Внаслідок маркетингових досліджень встановлено, що ймовірність реалізації одиниці продукції складає p . Знайти ймовірність, що з n вироблених одиниць продукції буде реалізовано: а) рівно k ; б) не більше $m\%$ з n ; в) від k_1 до k_2 ; г) обчислити найімовірніше число реалізованих одиниць.

Задачу розв'язати за даними таблиці (N – номер варіанта):

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	0,7	0,5	0,5	0,6	0,5	0,4	0,9	0,7	0,1	0,7	0,6	0,4	0,7	0,8	0,5
n	8	400	40	500	8	10	400	80	100	50	300	60	200	350	450
k	5	38	38	400	4	5	360	56	19	8	40	20	50	100	150
$m\%$	80	60	60	80	80	80	60	85	45	10	25	40	80	60	40
k_1	1	200	20	400	0	0	0	0	79	10	100	40	150	0	100
k_2	4	400	40	500	4	4	320	12	100	40	200	60	200	200	200

N	16	127	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p	0,7	0,6	0,5	0,6	0,4	0,5	0,4	0,7	0,6	0,4	0,2	0,7	0,8	0,7	0,4
n	90	60	80	70	90	100	150	200	300	50	400	350	250	300	350
k	30	50	40	50	40	60	60	60	100	10	150	200	100	250	150
$m\%$	80	60	60	80	70	80	60	40	50	30	25	80	75	65	55
k_1	10	20	30	40	20	40	90	0	150	0	150	100	0	0	120
k_2	40	40	60	50	40	60	120	150	300	40	250	300	200	300	240

5. Ймовірність виконання договору для кожного з n підприємств дорівнює p . Скласти закон розподілу числа підприємств, які виконують договір.

Задачу розв'язати за даними таблиці (N – номер варіанта):

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
n	3	5	6	6	4	4	3	5	5	4	6	5	3	4	3	5	6
p	0,8	0,7	0,8	0,7	0,6	0,8	0,6	0,8	0,6	0,7	0,6	0,9	0,9	0,5	0,4	0,7	0,5

N	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	4	5	6	6	4	4	3	5	5	4	6	5	3
p	0,8	0,6	0,8	0,7	0,6	0,8	0,6	0,8	0,6	0,7	0,6	0,5	0,4

6. Випадкова величина X задається функцією розподілу $F(X)$. Потрібно визначити:

а) математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X ;

б) ймовірність, що випадкова величина прийме значення з інтервалу $(\alpha; \beta)$.

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq N; \\ \frac{1}{36}(x - N), & \text{якщо } N \leq x \leq N + 4; \\ 1, & \text{якщо } x > N + 4, \end{cases}$$

де N – номер варіанта, $\alpha = N + 1$, $\beta = N + 3$.

7. Задана генеральна сукупність 16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 14, 16, 18, 15, 9, 14, 16, 12, 13, 17, 19, 13, 17, 14, 11, 12, 13, 8, 10, 9, 11, 10, 17, 13, 18, 16, 21, 9, 14, 15, 16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 14, 16, 18, 15, 9, 14, 16, 12, 13, 17, 19, 13, 17, 14, 11, 12, 13, 8, 10, 9, 11, 10, 17, 13, 18, 16, 21, 9, 14, 15, 16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 14, 16, 18, 15, 9, 14, 16, 12, 13, 17, 19, 13, 17, 14, 11, 12, 13, 8, 10, 9, 11, 10, 17, 13, 18, 16, 21, 9, 14, 15, 16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 14, 16, 18, 15, 9, 14, 16, 12, 13, 17, 19, 13, 17, 14, 11, 12, 13, 8, 10, 9, 11, 10, 17, 13, 18, 16, 21, 9, 14, 15, 11, 10, 17, 13, 18, 16, 21, 9, 14, 15, 16, 12, 9, 11, 8, 16, 18.

Зробити вибірку з 20 елементів, починаючи з номера $N + 1$. Потрібно:

а) побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n};$$

б) обчислити числові характеристики вибірки;

в) побудувати полігон частот та гістограму, розбивши інтервал на 5 рівних підінтервалів;

г) знайти моду, медіану, розмах та коефіцієнт варіації.

8. Знайти вибіркове рівняння прямої $y_x - \bar{y} = r_s \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$ регресії Y на X за

даними кореляційної таблиці (N – номер варіанта).

x	$N + 2$	$N + 10$	$N + 18$	$N + 26$
$N + 5$	$N + 1$	–	$N + 1$	–
$N + 14$	–	$N + 1$	$N + 7$	–
$N + 23$	–	$N + 4$	$N + 2$	$N + 15$
$N + 32$	–	$N + 2$	–	$N + 5$
$N + 41$	–	–	–	$N + 1$
n_x	$N + 1$	$3N + 7$	$3N + 10$	$2N + 10$

$N + 34$	$N + 42$	n_y
–	–	$2N + 2$
–	–	$2N + 8$
–	–	$3N + 21$
$N + 7$	–	$3N + 14$
$N + 3$	$N + 2$	$3N + 6$
$2N + 10$	$N + 2$	$n = 13N + 51$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Інвестиційна кампанія має 12 пакетів акцій, серед яких 7 пакетів кондитерських фабрик. Визначити ймовірність, що серед навмання вибраних 5 пакетів акцій є рівно 3 пакети кондитерських фабрик.

Розв'язування:

Подія A – серед навмання вибраних 5 пакетів акцій є 3 пакети цукрових заводів.

Використовуємо класичне означення ймовірності:

$$p(A) = \frac{m}{n}, \text{ де } n = C_{12}^5 = \frac{12!}{5!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792,$$

$$m = C_7^3 \cdot C_5^2 = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{5!}{2!3!} = 350, \text{ (12-7=5 – пакети не кондитерських фабрик).}$$

$$\text{Отже, } p(A) = \frac{350}{792} \approx 0,44.$$

2. У двох партіях відповідно 82% і 45% якісних виробів. Навмання вибирають по одному виробу із кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них: а) хоча б один бракований виріб; б) два бракованих вироби; в) один бракований та один якісний вироби?

Розв'язування:

$p_1 = 0,82$ – ймовірність того, що виріб якісний, якщо він з першої партії;

$p_2 = 0,45$ – ймовірність того, що виріб якісний, якщо він з другої партії.

Ймовірності того, що вироби браковані, відповідно дорівнюють:
 $q_1 = 1 - 0,82 = 0,18$; $q_2 = 1 - 0,45 = 0,55$.

а) подія A – серед двох виробів хоча б один бракований;

протилежна подія \bar{A} – обидва вироби якісні, тоді

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - p_1 \cdot p_2 = 1 - 0,82 \cdot 0,45 = 0,631.$$

б) подія B – обидва вироби браковані:

$$P(B) = q_1 \cdot q_2 = 0,18 \cdot 0,55 = 0,099.$$

в) подія C – один виріб бракований і один якісний:

$$P(C) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0,82 \cdot 0,55 + 0,18 \cdot 0,45 = 0,532.$$

3. У магазин надходять однотипні вироби з трьох заводів: 30% – з першого заводу, 60% – з другого, 10% – з третього. Серед виробів першого заводу 70% виробів першого сорту, серед виробів другого і третього заводів відповідно 90% і 80% виробів першого сорту. Куплено один виріб. Він виявився виробом першого сорту. Знайти ймовірність того, що куплений виріб виготовлений на другому заводі.

Розв'язування:

Для знаходження відповідної ймовірності потрібно використати формулу Байєса.

Описуємо гіпотези: $H_i, i = 1, 2, 3$.

H_i – виріб, виготовлений на i -ому заводі.

Ймовірності гіпотез відповідно дорівнюють:

$$P(H_1) = \frac{30}{100} = 0,3; \quad P(H_2) = \frac{60}{100} = 0,6; \quad P(H_3) = \frac{10}{100} = 0,1.$$

Подія A – куплений виріб є виробом першого сорту. Обчислюємо умовні ймовірності:

$$P(A/H_1) = \frac{70}{100} = 0,7, \quad P(A/H_2) = \frac{90}{100} = 0,9, \quad P(A/H_3) = \frac{80}{100} = 0,8$$

Згідно з умовою задачі, потрібно знайти $P(H_2 / A)$ – ймовірність того, що куплений виріб першого сорту виготовлений на другому заводі. За формулою Байеса:

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A / H_2)}{\sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A / H_i)} = \frac{0,6 \cdot 0,9}{0,3 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,9 + 0,1 \cdot 0,8} = \frac{0,54}{0,83} \approx 0,65.$$

4. Внаслідок маркетингових досліджень встановлено, що ймовірність реалізації одиниці продукції становить 0,6. Знайти ймовірність, що з 200 вироблених одиниць продукції буде реалізовано: а) рівно 130; б) не більше 70% з 200 одиниць; в) від 120 до 150 одиниць; г) обчислити найімовірніше число реалізованих одиниць.

Розв'язування:

Для знаходження відповідних ймовірностей використовуємо локальну та інтегральну теореми Лапласа (їх значення шукають за відповідними таблицями):

а) за умовою задачі $n = 200, k = 130, p = 0,6, q = 0,4$

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ де } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \text{ Функція } \varphi(x) \text{ – парна: } \varphi(-x) = \varphi(x)$$

Обчислюємо значення x :

$$x = \frac{130 - 200 \cdot 0,6}{\sqrt{200 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = \frac{10}{\sqrt{48}} \approx 1,44.$$

Використовуючи таблицю значень функції $\varphi(x)$, знаходимо $\varphi(1,44) = 0,1415$, тоді

$$P_{200}(130) = \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} \varphi(1,44) = 0,14 \cdot 0,1415 \approx 0,02.$$

б) Подія A – буде реалізовано не більше 70% продукції (140 одиниць становить 70%), $P(A) = P_{200}(0; 140)$.

Згідно з інтегральною теоремою Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'), \text{ де } x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ (функція протабульована).}$$

Інтегральна функція Лапласа непарна: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, для значень $x > 5$ приймають $\Phi(x) = 0,5$.

У даному випадку $k_1 = 0, k_2 = 140, n = 200$.

Обчислюємо значення x', x'' :

$$x' = \frac{0 - 200 \cdot 0,6}{\sqrt{200 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -\frac{120}{6,93} = -17,32;$$

$$x'' = \frac{140 - 200 \cdot 0,6}{\sqrt{200 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = \frac{20}{6,93} = 2,89,$$

тоді: $P_{200}(0; 140) = \Phi(2,89) - \Phi(-17,32) = 0,498 + 0,5 = 0,998$.

в) За допомогою інтегральної теореми Лапласа знаходимо

$$P_{200}(120; 150): x' = \frac{120 - 200 \cdot 0,6}{\sqrt{200 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = 0, x'' = \frac{150 - 200 \cdot 0,6}{\sqrt{200 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} \approx 4,33,$$

тоді:

$$P_{200}(120,150) = \Phi(4,33) - \Phi(0) = 0,4999 - 0 \approx 0,5.$$

г) Найімовірніше число реалізованих одиниць продукції k_0 знаходимо з нерівності:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p,$$

$$200 \cdot 0,6 - 0,4 \leq k_0 \leq 200 \cdot 0,6 + 0,6,$$

$$119,6 \leq k_0 \leq 120,6,$$

отже, $k_0 = 120$.

Зауваження: Якщо $n < 10$ потрібно використовувати формулу

Бернуллі: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

5. Ймовірність виконання договору для кожного з трьох ($n=3$) підприємств дорівнює 0,9. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа підприємств, які виконують договір.

Розв'язування:

Закон розподілу випадкової величини X запишемо у вигляді таблиці, ймовірності p_i обчислюємо за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad (p=0,9; q=1-p=0,1), \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

x_i	0	1	2	3
p_i	0,001	0,027	0,243	0,729

$$P(X=0) = P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,9^0 \cdot 0,1^3 = 0,001,$$

$$P(X=1) = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,9^1 \cdot 0,1^2 = 0,027,$$

$$P(X=2) = P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^1 = 0,243,$$

$$P(X=3) = P_3(3) = C_3^3 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^0 = 0,729.$$

Контроль: $\sum p_i = 1$.

6. Задана функція розподілу ймовірностей прибутку підприємця:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 2, \\ \frac{(x-2)^3}{64}, & \text{якщо } 2 < x \leq 6, \\ 1, & \text{якщо } x > 6. \end{cases}$$

Потрібно знайти: а) математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення прибутку підприємця; б) ймовірність, що прибуток підприємця прийме значення з інтервалу (3;4).

Розв'язування:

Знаходимо густину розподілу ймовірностей $f(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 2, \\ \frac{3}{64}(x-2)^2, & \text{якщо } 2 < x \leq 6, \\ 0, & \text{якщо } x > 6. \end{cases}$$

а) Математичне сподівання обчислюємо за формулою: $M(x) = \int_a^b x \cdot f(x) dx$.

$$M(x) = \int_2^6 \frac{3}{64} (x-2)^2 x dx = \frac{3}{64} \int_2^6 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx = \frac{3}{64} \left(\frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_2^6 =$$

$$= \frac{3}{64} \left(324 - 288 + 72 - 4 + \frac{32}{3} - 8 \right) = 4,5.$$

Обчислюємо дисперсію $D(x) = \int_a^b x^2 f(x) dx - M^2(x)$

$$D(x) = \frac{3}{64} \int_2^6 x^2 (x-2)^2 dx - (4,5)^2 = \frac{3}{64} \int_2^6 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx - 20,25 =$$

$$= \frac{3}{64} \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + 4 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^6 - 20,25 = 25,9 - 20,25.$$

Середнє квадратичне відхилення прибутку підприємця $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$, отже, $\sigma(x) = \sqrt{5,65} \approx 2,38$.

б) Ймовірність того, що прибуток підприємця набуде значення із заданого інтервалу, обчислюємо за формулою:

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

В даному випадку:

$$P(3 < x < 4) = \int_3^4 \frac{3}{64} (x-2)^2 dx = \frac{3}{64} \cdot \frac{(x-2)^3}{3} \Big|_3^4 = \frac{1}{64} (8-1) \approx 0,11.$$

7. Задана генеральна сукупність. Знайти вибірку з 20 елементів підряд, починаючи з першого, та виконати такі вправи:

- 1) побудувати статистичний розподіл вибірки та його емпіричну функцію розподілу;
- 2) обчислити числові характеристики вибірки;
- 3) побудувати полігон частот та гістограму, розбивши інтервал на 5 рівних підінтервалів;
- 4) знайти моду, медіану, розмах та коефіцієнт варіації.

16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 14, 16, 18, 15, 9, 14, 16, 12, 13, 17, 19, 13, 17, 14, 11, 12, 13, 8, 10, 9, 11, 10, 17, 13, 18, 16, 21, 9, 14, 15.

Розв'язування:

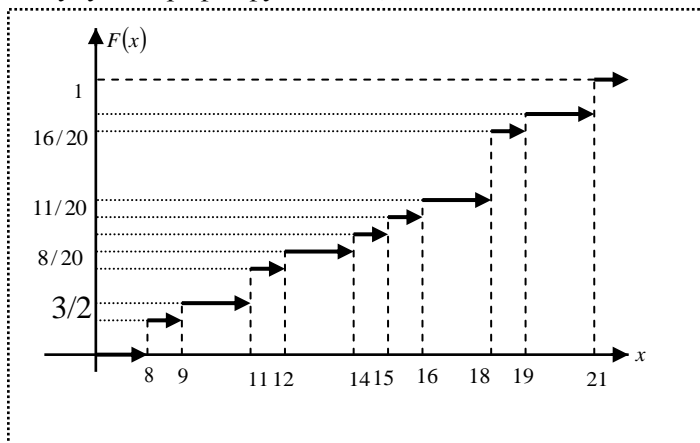
Утворюємо вибірку, що складається з 20 елементів генеральної сукупності 16, 12, 9, 11, 8, 16, 18, 12, 8, 18, 14, 16, 11, 15, 21, 19, 11, 15, 21, 19 і за нею будемо статистичний розподіл:

X_i	8	9	11	12	14	15	16	18	19	21
N_i	2	1	3	2	1	2	3	2	2	2

з якого і будемо емпіричну функцію розподілу, яка визначається за формулою $F(x) = \frac{n_x}{n}$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 8 \\ \frac{2}{20}, & \text{якщо } 8 < x \leq 9 \\ \frac{3}{20}, & \text{якщо } 9 < x \leq 11 \\ \frac{6}{20}, & \text{якщо } 11 < x \leq 12 \\ \frac{8}{20}, & \text{якщо } 12 < x \leq 14 \\ \frac{9}{20}, & \text{якщо } 14 < x \leq 15 \\ \frac{11}{20}, & \text{якщо } 15 < x \leq 16 \\ \frac{14}{20}, & \text{якщо } 16 < x \leq 18 \\ \frac{16}{20}, & \text{якщо } 18 < x \leq 19 \\ \frac{18}{20}, & \text{якщо } 19 < x \leq 21 \\ 1, & \text{якщо } x > 21 \end{cases}$$

Побудуємо графік функції $F(x)$



2) Обчислюємо числові характеристики за формулами:

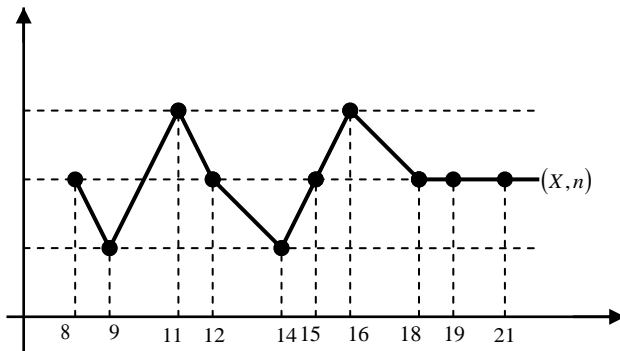
$$\bar{X}_g = \sum \frac{x_i \cdot n_i}{n}, \quad D_g = \bar{X}_g^2 - (\bar{X}_g)^2, \quad \sigma_g = \sqrt{D_g}$$

$$\bar{X}_g = \frac{8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 11 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 18 \cdot 2 + 19 \cdot 2 + 2 \cdot 2}{20} = 14,5$$

$$\bar{X}_g^2 = \frac{64 \cdot 2 + 81 \cdot 1 + 121 \cdot 3 + 144 \cdot 2 + 196 \cdot 1 + 225 \cdot 2 + 256 \cdot 3 + 324 \cdot 2 + 361 \cdot 2 + 441 \cdot 2}{20} = 226,3$$

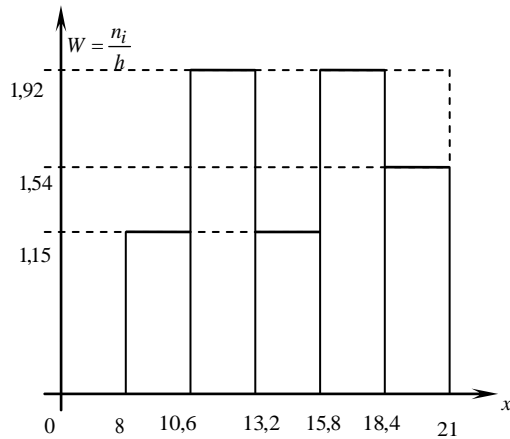
$$D_g = 226,3 - (14,5)^2 = 16,05; \quad \sigma_g = \sqrt{16,05} = 4,01.$$

3) Будуємо полігон частот:



Гістограму будемо з кроком $h = \frac{21-8}{5} = 2,6$. Для цього спочатку запишемо інтервальний ряд

X	8 ÷ 10,6	10,6 ÷ 13,2	13,2 ÷ 15,8	15,8 ÷ 18,4	18,4 ÷ 21
n	3	5	3	5	4
$\frac{n_i}{h}$	$\frac{3}{2,6} = 1,15$	$\frac{5}{2,6} = 1,92$	$\frac{3}{2,6} = 1,15$	$\frac{5}{2,6} = 1,92$	$\frac{4}{2,6} = 1,54$



- 4) Мода (варіанта, яка має найбільшу частоту): $M'_o = 11, M''_o = 16$.
 Медіана (варіанта, яка ділить варіаційний ряд навпіл): $M_D = 14,5$.
 Розмах варіації: $R = 21 - 8 = 13$.

Коефіцієнт варіації: $V = \frac{\sigma_\epsilon}{X_\epsilon} \cdot 100\% = 27,66\%$.

8. Зв'язок ознак X та Y подається кореляційною таблицею:

X	30	35	40	45	50	55	n_y
Y							
18	4	6	-	-	-	-	10
28	-	8	10	-	-	-	18
38	-	-	4	35	5	-	44
48	-	-	4	12	6	-	22
58	-	-	-	1	3	2	6
N_x	4	14	18	48	14	2	100

Записати рівняння прямої регресії.

Розв'язування:

$$y_x - \bar{y} = r_6 \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

Для того, щоб записати рівняння прямої регресії нам необхідно знайти: $\bar{y}, \bar{x}, r_6, \sigma_x, \sigma_y$.

Для спрощення підрахунків переходимо до умовних варіант $u_i = \frac{x_i - 45}{5}, v_j = \frac{y_j - 38}{10}$, тобто $C_1=45, C_2=38, h_1=5, h_2=10$ (C_1, C_2 – варіанти, що мають найбільшу частоту 35).

U	-3	-2	-1	0	1	2	n_v
V							
-2	4	6	-	-	-	-	10
-1	-	8	10	-	-	-	18
0	-	-	4	35	5	-	44
1	-	-	4	12	6	-	22
2	-	-	-	1	3	2	6
N_u	4	14	18	48	14	2	100

Послідовно знаходимо: $\bar{x} = h_1 \bar{u} + C_1$

$$\bar{u} = \frac{1}{100} (4(-3) + 14(-2) + 18(-1) + 48 \cdot 0 + 14 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = -0,4;$$

Тоді підставляємо у формулу: $\bar{x} = h_1 \bar{u} + C_1$;

$$\bar{x} = 5(-0,4) + 45 = 43;$$

Далі шукаємо $\bar{y} = h_2 \bar{v} + C_2$

$$\bar{v} = \frac{1}{100} (10(-2) + 18(-1) + 44 \cdot 0 + 22 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = 0,04;$$

Підставляємо у формулу $\bar{y} = h_2 \bar{v} + C_2$;

$$\bar{y} = 10(0,04) + 38 = 37,6$$

Далі знаходимо σ_x, σ_y : $\sigma_x = h_1 \sigma_u$; $\sigma_y = h_2 \sigma_v$

А для цього спочатку обчислюємо величини:

$$\overline{u^2} = \frac{1}{100} (4(-3)^2 + 14(-2)^2 + 18(-1)^2 + 48 \cdot 0^2 + 14 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2) = 1,32;$$

$$\overline{u^2} = 1,32; \sigma_u = \sqrt{1,32 - (-0,4)^2} = 1,077,$$

$$\sigma_x = 5 \cdot 1,077 = 5,385$$

$$\overline{v^2} = 1,04; \sigma_v = \sqrt{1,04 - (0,04)^2} = 1,019$$

$$\sigma_y = 10 \cdot 1,019 = 10,19$$

$$\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^5 n_{ij} u_i v_j = 4(-2)(-3) + 6(-2)(-2) + 8(-1)(-2) + 10(-1)(-1) + 4(-4) \cdot 0 + 35 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \cdot 0 + 4(-1) \cdot 1 + 12 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 90;$$

$$\bar{r}_6 = \frac{90 - 100(-0,4)(0,04)}{100 \cdot 1,077 \cdot 1,019} = 0,806;$$

Рівняння прямої регресії Y та X має вигляд:

$$y_x - 37,6 = 0,806 \frac{10,19}{5,385} (x - 43) \quad \text{або} \quad y_x = 1,525x - 27,975.$$

Додаток А

Комплексні числа та дії над ними

Алгебраїчна форма: $z = x + iy$

Модуль комплексного числа: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Аргумент комплексного числа: $\varphi = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \text{ якщо } a > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, \text{ якщо } a < 0, \\ \frac{\pi}{2}, \text{ якщо } a = 0, b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, \text{ якщо } a = 0, b < 0. \end{cases}$

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі:

- 1) $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;
- 2) $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$;
- 3) $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;
- 4) $\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$, при умові, що $x_2 + iy_2 \neq 0$.

Тригонометрична форма: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі:

- 1) $r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;
- 2) $[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$;
- 3) $\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$;
- 4) $\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$.

Показникова форма: $z = re^{i\varphi}$

Дії над комплексними числами в показниковій формі:

- 1) $r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$;
- 2) $\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$;
- 3) $(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$;

Додаток Б
Векторна алгебра

Координати вектора: $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), \overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$;

Довжина вектора: $|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$;

Кут між векторами: $\overline{A_1A_2} = (x_1, y_1, z_1), \overline{A_1A_3} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\cos\left(\overline{A_1A_2} \wedge \overline{A_1A_3}\right) = \cos\alpha = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3}}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_3}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Множення вектора на число: $\overline{a} = (x, y, z), c \cdot \overline{a} = (cx, cy, cz)$.

Додавання двох векторів: $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Віднімання двох векторів: $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Виразення скалярного добутку через координати співмножників:

$$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Виразення векторного добутку через координати співмножників:

$$\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}, \overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}, [\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Застосування векторного добутку: $[\overline{AB}, \overline{AC}]$ – це площа паралелограма

$ABCD$, побудованого на векторах \overline{AB} і \overline{AC} , тобто

$$S = |[\overline{AB}, \overline{AC}]|.$$

Тоді

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]|.$$

Додаток В

Аналітична геометрія в просторі

Загальне рівняння прямої:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Канонічні рівняння прямої: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, $\vec{s}(m, n, p)$ – напрямний вектор, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка в просторі.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$,

$$AB: \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Кут між двома прямими: $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$, $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$,

$$\cos \theta = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності прямих: $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

Умова паралельності прямих: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Рівняння площини, яка проходить через три точки:

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Додаток Г
Диференціальне числення
Таблиця похідних

1. $(const)' = 0$.
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$.
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
4. $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(e^x)' = e^x$.
6. $(a^x)' = a^x \ln a$.
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
9. $(\sin x)' = \cos x$.
10. $(\cos x)' = -\sin x$.
11. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Правила диференціювання

Якщо $u(x)$ та $v(x)$ - диференційовані функції, то

$$1. \quad (u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$$

$$2. \quad (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$3. \quad \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

$$4. \quad (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

Похідна складної функції

Похідна складної функції $y = f(u(x))$ дорівнює добутку похідної цієї функції за проміжною змінною u на похідну проміжної змінної u за змінною x . Тобто,

$$y' = f'(u) \cdot u'(x) \quad y' = f'(u) \cdot u'(x)$$

Додаток Д
Інтегральне числення

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int 1 \cdot dx = x + c$	10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
2. $\int 0 \cdot dx = c$	11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$
3. $\int x^\alpha \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c (\alpha \neq -1)$	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + c$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$	13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
5. $\int \alpha^x \cdot dx = \frac{\alpha^x}{\ln a} + c$	14. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$
6. $\int e^x \cdot dx = e^x + c$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$
7. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$
8. $\int \cos x \cdot dx = \sin x + c$	17. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} + a^2 \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right \right) + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$	18. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} \right) + C$

Властивості: $F(x)$ - первісна для функції $f(x)$.

- 1) $\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$;
- 2) $d \int f(x) dx = f(x) dx$;
- 3) $\int dF(x) = F(x) + c$;
- 4) $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$;
- 5) $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

Формула інтегрування частинами: $\int u dv = uv - \int v du$.

Формула Ньютона-Лейбніца для обчислення визначених інтегралів:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Бабак В.П., Білецький А.Я. та інші. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики / В. П. Бабак, А.Я. Білецький та інші. – К., 2003. – 86 с.
2. Барановська Л. В. Завдання для практичних занять з "Вищої математики": Методичний посібник / Л.В.Барановська. – К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003. – 62 с.
3. Бугір М.К. Посібник з теорії ймовірностей та математичної статистики / М.К.Бугір. – Тернопіль, 1998. – 176 с.
4. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник / Т.І.Бубняк. – Львів: Новий світ, 2007. – 436 с.
5. Васильченко У.П., Данилов В.Я., Лобаков А.У., Таран С.Ю. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навч. посібник. У двох книгах. Кн. 2. / У.П.Васильченко, В.Я. Данилов, А.У. Лобаков, С.Ю. Таран. – К: Либідь, 1994. – 208 с.
6. Вища математика: Зб. задач у 2 ч., ч.1. Лінійна і векторна алгебра / За заг. ред. П.П.Овчинникова. – К: Техніка, 2004. – 280 с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І.Юрик. – К: А.С.К., 2005. – 648 с.
8. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Т.Й. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навч. Посібник У двох книгах. Кн.1. / Г.Л.Кулініч, Л.О.Максименко, В.В.Плахотник,Т.Й. Призва. – К: Либідь, 1994. – 312 с.
9. Ройко Л.Л.Завдання для практичних занять з курсу “Вища математика” / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Твердиня. – 2006. – 52 с.
10. Ройко Л.Л. Завдання для самостійної та індивідуальної роботи з курсу “Вища математика” / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Твердиня. – 2007. – 56 с.
11. РойкоЛ.Л. Методичні рекомендації з курсу “Вища математика”. Частина 3. Диференціальне та інтегральне числення / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Вежа, 2014. – 94 с.
12. Ройко Л.Л. Основи вищої математики: навч. посібник / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Вежа, 2014. – 148 с.
13. Ройко Л.Л.Вища математика і теорія ймовірностей: практичні завдання до першого змістового модуля з навчального курсу / Л.Л.Ройко. – Луцьк: Вежа, 2016. – 38 с.
14. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Ю.К.Рудавський, П.П.Костробій, Х.П.Луник, Д.В.Уханська. – Львів: Бескид Біт, 2002. – 262 с.
15. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Уханська Д.В. та інші. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / Ю.К.Рудавський, П.П.Костробій, Д.В.Уханська та інші. – Львів: "Бескид Біт", 2002. – 256 с.
16. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика. Підручник у 3 кн.: Книга 1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М.Котлова. – К: Либідь, 1994. – 280 с.
17. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика. Підручник у 3 кн.: Книга 2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М.Котлова. – К: Либідь. 1994. – 352 с.
18. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика. Підручник у 3 кн.: Книга 3. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М.Котлова. – К.: Либідь, 1994. – 352 с.