УДК 512.534
Т. Жуковська, асп,
E-Mail: t.zhukovska@ukr.net

ВІДНОШЕННЯ ҐРІНА НА ДЕЯКИХ НАПІВГРУПАХ ЧАСТКОВИХ ІН'ЄКТИВНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ БУЛЕАНУ

Вивчається будова відношень Ґріна на напівгрупі $IF(B_n)$ стискуючих, напівгрупі $IO(B_n)$ монотонних та напівгрупі $IC(B_n)$ стискуючих монотонних ін'єктивних перетворень впорядкованого за включенням булеану B_n множини $N=\{1,2,\dots,n\}$. Показано, що для напівгруп $IF(B_n)$ і $IC(B_n)$ усі відношення Ґріна збігаються з відношенням рівності.

T. Zhukovska

GREEN'S RELATIONS ON SOME SEMIGROUPS OF PARTIAL INJECTIVE TRANSFORMATIONS OF THE BOOLEAN
The structure of Green's relations on the semigroup $IF(B_n)$ of order-decreasing injective transformations, on the semigroup $IO(B_n)$ of order-preserving injective transformations and on the semigroup $IC(B_n)$ of order-decreasing order-preserving injective transformations of ordered by inclusion boolean B_n of a set $N=\{1,2,\dots,n\}$ is studied. We proved that all Green's relations for semigroups $IF(B_n)$ and $IC(B_n)$ are coinciding with the identity relation.

ВСТУП

Для кожної частково впорядкованої множини $(M,\leq)$ природно виділяються два типи перетворень цієї множини (у загальному випадку також часткові, тобто визначені на деякій підмножині з M), у певному сенсі узгоджені з даним частковим порядком. Часткове перетворення α множини M називається *стискуючим* (або *з пониженням порядку*) (англ.: order–decreasing), якщо для довільного x із області визначення $dom\alpha$ перетворення α виконується нерівність $\alpha(x)\leq x$, і називається *монотонним* (або *із збереженням порядку*) (англ.: order–preserving), якщо для довільних $x,y\in dom\alpha$ із $x\leq y$ випливає $\alpha(x)\leq\alpha(y)$.

Як монотонні, так і стискуючі часткові перетворення множини $(M,\leq)$ утворюють відносно композиції перетворень напівгрупи, які позначаються відповідно $PO(M,\leq)$ і $PF(M,\leq)$ (або просто $PO(M)$ і $PF(M)$, якщо відомо, про який частковий порядок йдеться). Зрозуміло, що кожна з них є піднапівгрупою напівгрупи $PT(M)$ усіх часткових перетворень множини M. Виділимо ще напівгрупу $PC(M)=PO(M)\bigcap PF(M)$ всіх *стискуючих часткових перетворень із збереженням порядку*. Зрозуміло, що напівгрупи перетворень множини M, узгоджених із частковим порядком на M, почали вивчатися з найпростішого випадку – коли M є скінченним ланцюгом. Так, напівгрупа O_n монотонних скрізь визначених перетворень n –елементного ланцюга вперше з'явилася ще в роботі [1], а напівгрупа F_n скрізь визначених перетворень такого ланцюга – у книзі [9]. Комбінаторика напівгрупи F_n ґрунтовно вивчена в [7]. Особливо інтенсивно вивчення напівгруп перетворень скінченного ланцюга йшло протягом останніх двадцяти років (див. останню главу книги [5] і наведену там бібліографію). Але для інших часткових порядків такі напівгрупи почали вивчатися лише зовсім недавно (див. [2; 10]).

На перетворення множини M можуть накладатися додаткові обмеження. Зокрема, досить глибоко вивчена напівгрупа IO_n монотонних часткових ін’єктивних перетворень n –елементного ланцюга (виділимо тут роботи [4; 7]).

Елементи a і b напівгрупи S називаються L*–еквівалентними*, якщо вони породжують один і той же лівий головний ідеал (тобто aLb тоді й лише тоді, коли $S^1a=S^1b$). Аналогічно – за допомогою рівності $aS^1=bS^1$ – визначається R –відношення. Через породжених елементами a і b двосторонніх головних ідеалів визначається J – відношення (тобто aJb тоді й лише тоді, коли $S^1aS^1=S^1bS^1$). Крім того, через H позначається перетин відношень L і R, а через D – найменше з відношень еквівалентності, яке містить кожне з відношень L і R (воно збігається з деморганівським добутком $L\circ R=R\circ L$ відношень L і R).

Ці п'ять відношень – L, R, J, H і D –- називаються відношеннями Ґріна на напівгрупі S. Усі вони є відношенням еквівалентності. Для скінченних напівгруп відношення J і D збігаються. Відношення Ґріна дозволяють визначити на напівгрупі щось на кшталт локальної системи координат, тому вони відіграють велику роль при вивченні будови напівгруп. Вивченню цих відношень для конкретних напівгруп присвячена величезна література (серед робіт, які безпосередньо примикають до теми нашої роботи, вкажемо лише [3; 6; 8], де вивчалися відношення Ґріна для напівгруп монотонних перетворень скінченного ланцюга).

Нагадаємо, що рангом $rank\alpha$ елемента α напівгрупи перетворень (S,M) називається потужність $|\alpha(M)|$ його образу $\alpha(M)$. Перетворення ми виконуємо зліва направо, тобто $(\varphi\psi)(x)=\psi(\varphi(x))$.

Через B_n позначимо булеан множини $N=\{1,2,\dots,n\}$ – впорядковану за включенням множину всіх підмножин множини N, а через $IS(B_n)$ – напівгрупу всіх часткових ін'єктивних перетворень множини B_n.

У роботі вивчаються відношення Ґріна на трьох напівгрупах перетворень булеану: $IF(B_n)=PF(B_n)\bigcap IS(B_n)$, $IO(B_n)=PO(B_n)\bigcap IS(B_n)$ та $IC(B_n)=PC(B_n)\bigcap IS(B_n)$.

Ми дотримуємося позначень із [5]. Зокрема, через $im\alpha$ позначається образ елемента α тобто множина його значень.

НАПІВГРУПА $IF(B_n)$

Теорема 1. *Усі R –класи напівгрупи $IF(B_n)$ одноелементні.*

Доведення. Припустимо, що елементи α і β належать до одного R –класу напівгрупи $IF(B_n)$. Тоді $\alpha IF(B_n) = \beta IF(B_n)$, а тому повинні існувати такі елементи γ і γ', для яких виконуються рівності

$$\beta = \alpha\gamma, \quad \alpha = \beta\gamma' \qquad (1)$$

Зокрема, α і β будуть належати і до одного R –класу напівгрупи $IS(B_n)$, а тому $dom\alpha = dom\beta$. Візьмемо тепер довільний елемент A із $dom\alpha$. Із першої з рівностей (1) випливає, що $\beta(A) = \gamma(\alpha(A))$, а позаяк перетворення γ – стискуюче, то $\beta(A) \subseteq \alpha(A)$. Аналогічно з другої з рівностей (1) випливає, що $\alpha(A) \subseteq \beta(A)$. Тому $\beta(A) = \alpha(A)$. Оскільки елемент $A \in dom\alpha$ – довільний, то $\alpha = \beta$.

Теорема 2. *Всі L –класи напівгрупи $IF(B_n)$ одноелементні.*

Доведення. Припустимо, що елементи α і β належать до одного L –класу напівгрупи $IF(B_n)$. Подібно як у доведенні попередньої теореми звідси випливає рівність $im\alpha = im\beta$ та існування таких елементів δ і δ', для яких виконуються рівності

$$\beta = \delta\alpha, \quad \alpha = \delta'\beta \qquad (2)$$

Оскільки елементи напівгрупи $IF(B_n)$ є частковими ін'єкціями, то для довільних $\mu \in IF(B_n)$ та $A' \in im\mu$ однозначно визначений прообраз $\mu^{-1}(A')$. Тоді для кожного $A \in im\alpha$ з першої з рівностей (2) випливає, що $\delta^{-1}(\alpha^{-1}(A)) = \beta^{-1}(A)$ і $\delta^{-1}(\beta^{-1}(A)) = \alpha^{-1}(A)$. Позаяк перетворення δ є стискуючим, то $\beta^{-1}(A) \supseteq \alpha^{-1}(A)$. Аналогічно з другої з рівностей (2) впливає, що $\beta^{-1}(A) \subseteq \alpha^{-1}(A)$. Тому $\beta^{-1}(A) = \alpha^{-1}(A)$. Звідси і з рівності $im\alpha = im\beta$ випливає, що $\alpha = \beta$.

З теорем 1 і 2 безпосередньо випливають такі наслідки:

Наслідок 1. *Усі D –класи напівгрупи $IF(B_n)$ є одноелементними.*

Наслідок 2. *Усі відношення Ґріна на напівгрупі $IF(B_n)$ збігаються з відношенням рівності.*

НАПІВГРУПА $IO(B_n)$

Теорема 3. *Для того, щоб елементи α і β напівгрупи $IO(B_n)$ належали до одного R –класу, необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність $dom\alpha = dom\beta$ і для довільних A_1, A_2 із $dom\alpha$ виконувалася умова:*

$$\alpha(A_1) \subset \alpha(A_2) \text{ тоді й лише тоді, коли } \beta(A_1) \subset \beta(A_2). \qquad (3)$$

Доведення. Необхідність. Нехай елементи α і β належать до одного R –класу напівгрупи $IO(B_n)$. Тоді повинні існувати такі елементи γ і γ', для яких виконуються рівності

$$\beta = \alpha\gamma, \quad \alpha = \beta\gamma' \qquad (4)$$

Тому α і β будуть належать і до одного R –класу напівгрупи $IS(B_n)$, звідки випливає рівність $dom\alpha = dom\beta$.

Припустимо тепер, що для елементів $A_1, A_2 \in dom\alpha$ виконується включення $\alpha(A_1) \subset \alpha(A_2)$. Тоді з першої з рівностей (4) та монотонності перетворення γ випливає, що

$$\beta(A_1) = \gamma(\alpha(A_1)) \subset \gamma(\alpha(A_2)) = \beta(A_2).$$

Аналогічно з другої з рівностей (4) та монотонності перетворення γ' випливає, що коли $\beta(A_1) \subset \beta(A_2)$, то $\alpha(A_1) \subset \alpha(A_2)$. Тому $\alpha(A_1) \subset \alpha(A_2)$ тоді й лише тоді, коли $\beta(A_1) \subset \beta(A_2)$.

Достатність. Із рівності $dom\alpha = dom\beta$ та ін'єктивності перетворень α і β випливає, що $|im\alpha| = |im\beta|$. Тому кожне з перетворень

$$\gamma: im\alpha \to im\beta, \quad \alpha(A) \mapsto \beta(A),$$

та

$$\gamma': im\beta \to im\alpha, \quad \beta(A) \mapsto \alpha(A),$$

є ін'єктивним. Крім того, з умови (3) випливає, що кожне з цих перетворень є монотонним. Тому γ і γ' належать напівгрупі $IO(B_n)$. Оскільки ці перетворення задовольняють рівності (4), то α і β належать до одного R –класу.

Наслідок 3. *Нехай $\alpha \in IO(B_n)$, а φ – довільний автоморфізм $im\alpha$ як частково впорядкованої за включенням множини. Тоді $\alpha R \alpha\varphi$.*

Зауважимо, що елементи напівгрупи $IO(B_n)$ є частковими ін'єкціями. Тому для довільних $\mu \in IO(B_n)$ та $A \in im\mu$ однозначно визначений прообраз $\mu^{-1}(A)$.

Теорема 4. *Елементи α і β напівгрупи $IO(B_n)$ належать до одного L –класу тоді й лише тоді, коли виконується рівність $im\alpha = im\beta$ і для довільних A_1, A_2 із $im\alpha$ виконується умова:*

$$\alpha(A_1) \subset \alpha(A_2) \text{ тоді й лише тоді, коли } \beta(A_1) \subset \beta(A_2). \tag{5}$$

Доведення. Необхідність. Нехай елементи α і β належать до одного L–класу. Подібно як у доведенні попередньої теореми звідси випливає рівність $im\alpha = im\beta$ та існування таких елементів δ і δ', для яких виконуються рівності

$$\beta = \delta\alpha \qquad \alpha = \delta'\beta \tag{6}$$

Нехай $im\alpha = \{A_1,\ldots,A_k\}$. Позначимо $P_i = \alpha^{-1}(A_i)$, $Q_i = \beta^{-1}(A_i)$, $i = 1,\ldots,k$. Тоді $dom\alpha = \{P_1,\ldots,P_k\}$, $dom\beta = \{Q_1,\ldots,Q_k\}$.

Із рівностей (6) та ін'єктивності перетворень випливає, що для всіх i

$$\delta(P_i) = Q_i, \quad \delta'(Q_i) = P_i. \tag{7}$$

У свою чергу з рівностей (7) та монотонності перетворень δ і δ' випливає, що $P_i \subset P_j$ тоді і тільки тоді, коли $Q_i \subset Q_j$. Отже, умова (5) виконується.

Достатність. Нехай

$$im\alpha = im\beta = \{A_1,\ldots,A_k\}, \quad P_i = \alpha^{-1}(A_i), \quad Q_i = \beta^{-1}(A_i), \quad i = 1,\ldots,k.$$

Тоді $dom\alpha = \{P_1,\ldots,P_k\}$, $dom\beta = \{Q_1,\ldots,Q_k\}$. Із умови (5) випливає, що кожне з ін'єктивних відображень

$$\delta : dom\beta \to dom\alpha \qquad Q_i \mapsto P_i, \quad i = 1,\ldots,k,$$

та

$$\delta' : dom\alpha \to dom\beta \qquad P_i \mapsto Q_i, \quad i = 1,\ldots,k,$$

є монотонним, а тому належить напівгрупі $IO(B_n)$. Безпосередньо перевіряється, що δ і δ' задовольняють рівності (6). Тому α і β належать до одного R–класу.

Наслідок 4. *Нехай $\alpha \in IO(B_n)$, а ψ – довільний автоморфізм $dom\alpha$ як частково впорядкованої за включенням множини. Тоді $\psi\alpha R\alpha$*

Наслідок 5. *Елементи α і β напівгрупи $IO(B_n)$ будуть належати до одного H–класу тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

1) $dom\alpha = dom\beta$

2) $im\alpha = im\beta$

3) $\alpha(A_1) \subset \alpha(A_2) \Leftrightarrow \beta(A_1) \subset \beta(A_2)$ *для довільних* $A_1, A_2 \in dom\alpha$

4) $\alpha^{-1}(A'_1) \subset \alpha^{-1}(A'_2) \Leftrightarrow \beta^{-1}(A'_1) \subset \beta^{-1}(A'_2)$ *для довільних* $A'_1, A'_2 \in im\alpha$

Доведення. Це безпосередньо випливає з рівності $H = L \cap R$ та теорем 3 і 4.

Теорема 5. *Якщо елементи α і β напівгрупи $IO(B_n)$ належать до одного D–класу, то $dom\alpha \cong dom\beta$ і $im\alpha \cong im\beta$ як частково впорядковані за включенням множини.*

Доведення. Оскільки $D = R \circ L$, то $\alpha D\beta$ тоді й лише тоді, коли існує такий елемент μ що $\alpha R\mu$ і $\mu L\beta$ Із теорем (3) і (4) тепер випливає, зокрема, що елементи α β і μ мають однаковий ранг. Нехай

$$dom\alpha = \{A_1,\ldots,A_k\}, \qquad im\alpha = \{C_1,\ldots,C_k\},$$
$$dom\beta = \{A'_1,\ldots,A'_k\}, \qquad im\beta = \{C'_1,\ldots,C'_k\},$$
$$dom\mu = \{A''_1,\ldots,A''_k\}, \qquad im\mu = \{C''_1,\ldots,C''_k\},$$

причому

$$\alpha(A_i) = C_i, \quad \beta(A'_i) = C'_i, \quad \mu(A''_i) = C''_i \qquad i = 1,\ldots,k.$$

На підставі теореми (3) можемо покласти $A_i = A''_i$ ($i = 1,\ldots,k$) і матимемо, що $C_i \subset C_j$ тоді й лише тоді, коли $C''_i \subset C''_j$. З другого боку на підставі теореми (4) можемо покласти $C'_i = C''_i$ ($i = 1,\ldots,k$) і матимемо, що $A''_i \subset A''_j$ тоді й лише тоді, коли $A'_i \subset A'_j$. Таким чином, $A_i \subset A_j$ тоді й лише тоді, коли $A'_i \subset A'_j$, тобто $dom\alpha$ і $dom\beta$ ізоморфні як частково впорядковані за включенням множини. Аналогічно $C_i \subset C_j$ тоді й лише тоді, коли $C'_i \subset C'_j$, тобто $im\alpha$ і $im\beta$ також ізоморфні.

Зауваження. Умови теореми (5) не є достатніми для належності елементів α і β напівгрупи $IO(B_n)$ до одного D–класу. Справді, для елементів

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{1\} & \{3\} & \emptyset \\ \{1,2,3\} & \{1,2\} & \{1\} & \emptyset \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \beta = \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{1\} & \{3\} & \emptyset \\ \{1,2,3\} & \{1\} & \{1,2\} & \emptyset \end{pmatrix}$$

напівгрупи $IO(B_3)$ маємо навіть $dom\alpha = dom\beta$ і $im\alpha = im\beta$ Однак легко перевіряється, що ці елементи не належать до одного D–класу.

НАПІВГРУПА $IC(B_n)$

Теорема 6. *Усі відношення Ґріна на напівгрупі $IC(B_n)$ збігаються з відношенням рівності.*

Доведення. Оскільки $IC(B_n)$ є піднапівгрупою $IF(B_n)$, то з рівностей (1) випливає, що кожен R–клас напівгрупи $IC(B_n)$ буде міститися в деякому R–класі напівгрупи $IF(B_n)$. Але тоді з теореми (1) випливає, що на напівгрупі

$IC(B_n)$ R –відношення збігається з відношенням рівності. Аналогічно з теореми (2) випливає, що L –відношення також збігається з відношенням рівності. Для решти відношень Ґріна твердження теореми випливає з рівностей $H = L \cap R$, $D = L \circ R$ і $J = D$.

ВИСНОВКИ

В роботі розглянуто відношення Ґріна на трьох напівгрупах часткових ін'єктивних перетворень булеану: $IF(B_n)$, $IO(B_n)$ та $IC(B_n)$. Показано, що для напівгруп $IF(B_n)$ і $IC(B_n)$ усі відношення Ґріна збігаються з відношенням рівності. Для відношень Ґріна L, R і H на напівгрупі $IO(B_n)$ знайдено необхідні і достатні умови належності елементів до одного класу та встановлено необхідні умови належності елементів даної напівгрупи до одного D – класу.

1. *Айзенштат А.Я.* Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейно упорядоченного множества // Сиб. матем. ж. – 1962. – Т. 3, № 4. – С. 161-169. 2. *Стронська Г.О.* Напівгрупа стискуючих перетворень булеану скінченної множини // Вісник Київського університету. Серія: Фіз.–мат. науки. – 2006. – № 2. – С. 57-62. 3. *Fernandes V.H.* Semigroups of order-preserving mapping on a finite chain: a new class of divisors // Semigroup Forum. – 1997. – Vol. 54, № 2. – P. 230-236. 4. *Fernandes V.H.* The monoid of all injective order-preserving partial transformations on a finite chain // Semigroup Forum. – 2001. – № 62. – P. 178-204. 5. *Ganyushkin O., Mazorchuk V.* Classical Finite Transformation Semigroups. An Introduction. – Algebra and Applications. – London: Springer–Verlag, 2009. – № 9. – XII, 314 p. 6. *Ganyushkin O., Mazorchuk V.* On the Structure of IO_n // Semigroup Forum. – 2003. – № 66. – P. 455-483. 7. *Howie J.* Combinatorial and arithmetical aspects of the theory of transformation semigroups // Seminario do Centro de Algebra, University of Lisbon. – 1992. – P. 1-14. 8. *Laragji A., Umar A.* Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations // J. Alg. – 2004. – Vol. 278. № 1. – P. 342-359. 9. *Pin J.* Variétés de langages formels. – Paris: Masson,1984. – 160 p. 10. *Stronska A.* Nilpotent subsemigroups of a semigroup of order-decreasing transformations of a rooted tree // Algebra and Discrete Mathematics. – 2006. – № 4. – P. 126-140.

Надійшла до редколегії 31.10.11