РОЗДІЛ ІІІ. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

§ 1. Циліндричні та конічні поверхні

Теоретичні відомості

Циліндричні поверхні

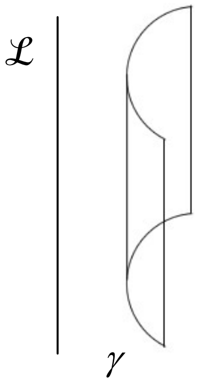


Рис.3.1.

Поверхня S називається ***циліндричною***, якщо вона утворена рухом прямої в просторі, яка переміщається паралельно заданій прямій $\mathcal{L}$, перетинаючи при цьому деяку криву γ. Ця крива γ називається ***напрямною,*** а пряма, яка рухається - ***твірною.***

Теорема 3.1. Рівняння з двома змінними в просторі задає дійсну або уявну циліндричну поверхню з твірною, паралельною тій координатній осі, що відповідає відсутній змінній.

На рис. 3.2 рівняння поверхні має вигляд $F(x;y)=0$, так як твірна паралельна осі oz.

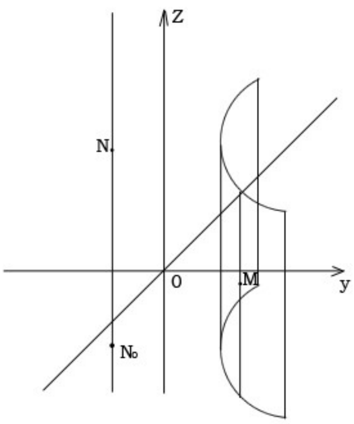


Рис.3.2.

Канонічні рівняння циліндрів другого порядку

Дійсними кривими другого порядку є такі криві:

– коло $$x^2+y^2=r^2 \qquad (3.1)$$

– еліпс $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3.2)$$

– гіпербола $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3.3)$$

– парабола $$y^2=\pm 2px \qquad (3.4)$$

– пара прямих, що перетинаються $$x^2-y^2=0 \qquad (3.5)$$

– пара паралельних прямих $$x^2 - a^2 = 0 \tag{3.6}$$

Відповідно отримаємо в просторі циліндричні поверхні.

Якщо їх твірні паралельні, наприклад, осі oz, то рівняння поверхонь - з двома змінними x, y і відповідають рівнянням кривих, які задають напрямну:

- круговий циліндр (рис.3.3), має рівняння (3.1),
- еліптичний циліндр (рис. 3.3) – рівняння (3.2),
- гіперболічний циліндр (рис.3.4) – рівняння (3.3),
- параболічний циліндр (рис.3.5) – рівняння (3.4),
- пара площин що перетинаються (рис.3.6) – рівняння (3.5),
- пара паралельних площин (рис.3.7) – рівняння (3.6).

На площини також можна дивитися, як на циліндричні поверхні, з напрямною γ, що є пряма.

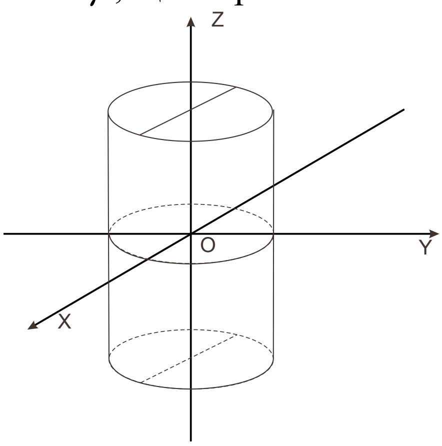


Рис. 3.3

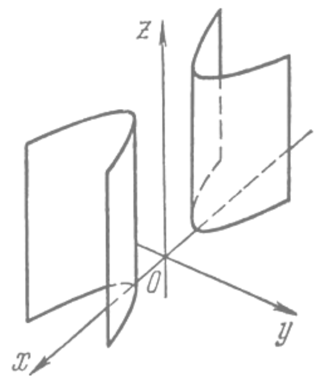


Рис. 3.4

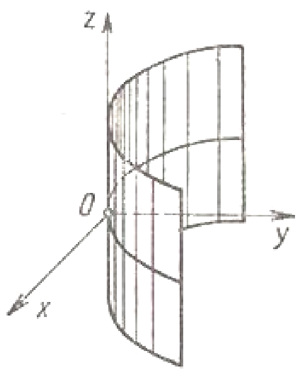


Рис. 3.5

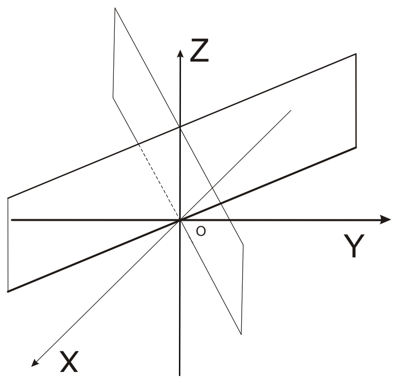


Рис. 3.6

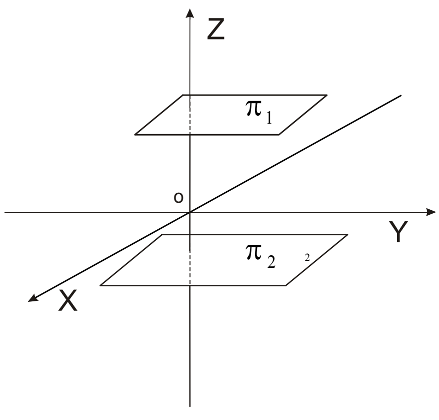


Рис. 3.7

Неканонічне рівняння циліндра

Розглянуті канонічні рівняння еліптичного, кругового, параболічного, гіперболічного циліндрів, коли твірна паралельна координатній осі - це рівняння з двома змінними. Проте, якщо твірна циліндра не паралельна жодній із координатних осей, то рівняння не буде канонічним і міститиме три змінних.

Розглянемо *алгоритм розв'язання задач* на складання рівнянь циліндричної поверхні в таких випадках.

Циліндрична поверхня *S* задана рівнянням напрямної

$$\gamma:\begin{cases}F_1(x;y;z)=0,\\ F_2(x;y;z)=0;\end{cases} \tag{3.3}$$

і напрямним вектором $\vec{p}(l;m;n)$ твірної. Записати рівняння поверхні S.

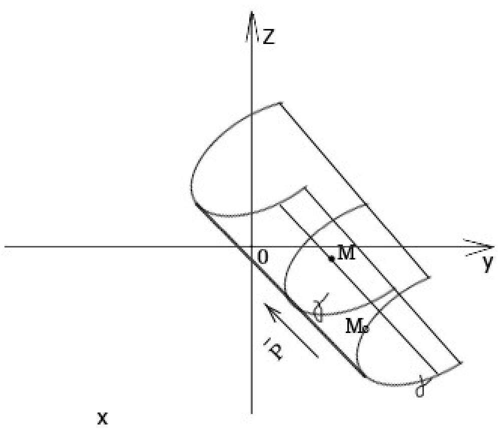


Рис.3.8

Розв'язуємо задачу.

1) На поверхні візьмемо біжучу точку $M(x;y;z)$ і через неї проведемо твірну MM_0 до перетину з напрямною γ в точці M_0 (рис.3.8).
2) Запишемо це у вигляді системи. Так як точка $M_0 \in \gamma$, то отримаємо перші два рівняння системи,

$$\gamma:\begin{cases}F_1(x;y;z)=0,\\ F_2(x;y;z)=0,\\ \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}=t;\end{cases} \tag{3.8}$$

третє рівняння - це рівнянням твірної, що проходить через точку M_0, паралельно заданому напрямному вектору $\vec{p}$.

3) З третього рівняння системи (7.8) визначимо x_0, y_0, z_0 через параметр *t:*

$$\begin{cases} x_0 = x - lt \\ y_0 = y - mt \\ z_0 = z - nt \end{cases} \qquad (3.9)$$

Підставимо значення x_0, y_0, z_0 в одне із простіших рівнянь системи (3.8). Отримаємо рівняння відносно *t*, звідки виразимо параметр *t* через x, y, z.

4) Підставимо значення t в систему (3.9). Знайдемо x_0, y_0, z_0 через x, y, z.
5) Отримані значення x_0, y_0, z_0 підставимо в те рівняння системи (3.8), що залишилося, звідки запишемо рівняння поверхні *S*, що пов'язує три змінні x, y, z певним співвідношенням.

Висновок. Виведення рівняння циліндричної поверхні полягає в тому, що із систем (3.8) потрібно вилучити x_0, y_0, z_0 і пов'язати біжучі x, y, z в одне рівняння.

Конічні поверхні

Конічною називається ***поверхня,*** яка утворена рухом прямої в просторі, що проходить через дану точку C, перетинаючи деяку криву γ (рис.3.9).

Точка C - називається ***вершиною*** конічної поверхні, а крива γ - ***напрямною.***

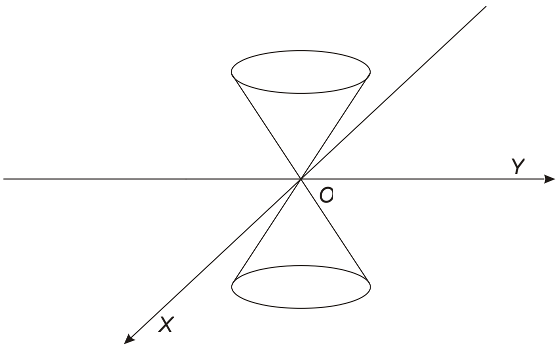


Рис.3.9

Канонічне рівняння конічної поверхні

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \qquad (3.10)$$

Конічна поверхня в загальному випадку задається рівнянням напрямної

$$\gamma : \begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0; \end{cases}$$

і координатами вершини $C(a; b; c)$. Щоб записати рівняння конічної поверхні, скористаємось схемою, розглянутою в аналогічному випадку для циліндричної поверхні. Кожен пункт виконується в повній аналогії, різниця лише в тому, що рівняння твірної конічної поверхні записане через дві точки C і M_0. Тоді система матиме вигляд:

$$\begin{cases} F_1(x;y;z)=0, \\ F_2(x;y;z)=0, \\ \dfrac{x-a}{x_0-a}=\dfrac{y-b}{y_0-b}=\dfrac{z-c}{z_0-c}=t. \end{cases} \qquad (3.11)$$

Загальне рівняння конічної поверхні

Теорема 3.2. Якщо загальне однорідне рівняння другого степеня

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz \qquad (3.12)$$

задає дійсну поверхню, що не розпадається, то це конічна поверхня з вершиною в початку координат.

Поверхні обертання

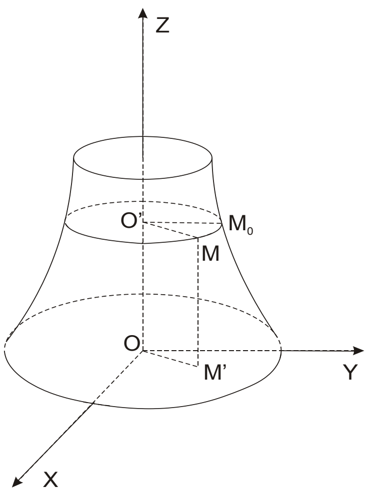


Рис. 3. 10

Поверхня, утворена обертанням кривої γ навколо прямої $\mathcal{L}$, що знаходиться з γ в одній площині, називається ***поверхнею обертання***.

Початкове положення кривої γ називається ***початковим меридіаном***, а пряма $\mathcal{L}$ – ***віссю обертання***.

На рисунку 3.10 початковий меридіан проходить через точку M_0, лежить в площині yoz, вісь обертання – вісь oz.

Зауваження. Якщо крива γ задана в одній із координатних площин і обертається навколо однієї із осей координат цієї ж площини, то рівняння поверхні обертання отримуємо з рівняння кривої γ, підставивши замість змінної, що не відповідає осі обертання, кореня квадратного із суми квадратів двох інших змінних.

Нехай для означеності крива γ, задана в площині xoy: $\begin{cases} F(x;y)=0, \\ z=0 \end{cases}$,

обертається навколо осі oy, то рівняння отриманої поверхні обертання матиме вигляд $F\left(\sqrt{x^2+z^2};y\right)=0$.

Розв'язання задач

І тип

За рівнянням з трьома (двома, однією) змінними ***виявити, яку поверхню задає*** це ***рівняння, зобразити її*** в системі координат, скориставшись методом перерізів.

3.1.1. *Дослідити поверхню* $3x^2-2y^2-6=0$.

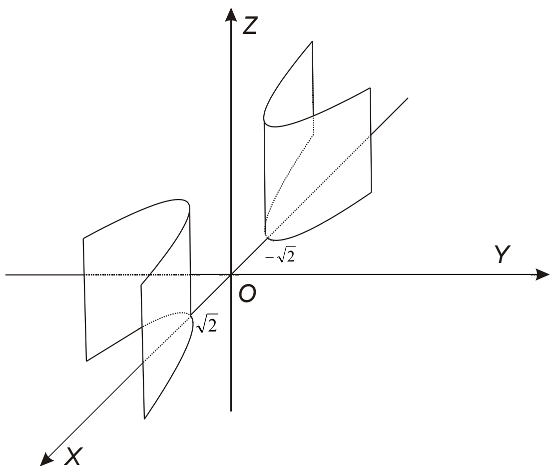


Рис. 3.11

Розв'язання. Запишемо канонічне рівняння даної поверхні $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$.

Скористаємось методом перерізів (рис. 3.11).

При перетині поверхні площиною *yoz*: $\begin{cases} x=0; \\ y^2=-3 \end{cases}$, очевидно не отримуємо точок.

Перетинаємо площиною, паралельною площині *yoz*, тобто $x=\pm h$ отримаємо

$$\begin{cases} x=\pm h; \\ 2y^2=3x^2-6 \end{cases}$$

Звідки
$$y^2=\frac{3h^2-6}{2}=b;$$
$$y=\pm\sqrt{b}$$

Маємо дві прямі, паралельні осі oz: $y=\sqrt{b}$ та $y=-\sqrt{b}$

При перетині поверхні площиною *xoz* матимемо $\begin{cases} y=0; \\ x^2=2 \end{cases}$

Звідси $x=\sqrt{2}$ або $x=-\sqrt{2}$ - дві прямі, паралельні осі *oz* (рис.3.11) .

Перетнемо площиною *xoy*. Отримаємо : $z = 0;\ \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ - це гіпербола.

Отже, дане рівняння задає гіперболічний циліндр.

3.1.2. *Дослідити поверхню* $y^2 - 2y - 2x + 3 = 0;$

Розв'язання. Запишемо ліву частину рівняння у вигляді $y^2 - 2y + 4 - 2x - 1 = 0;$ Звідси $(y-2)^2 = 2(x + \frac{1}{2})$.

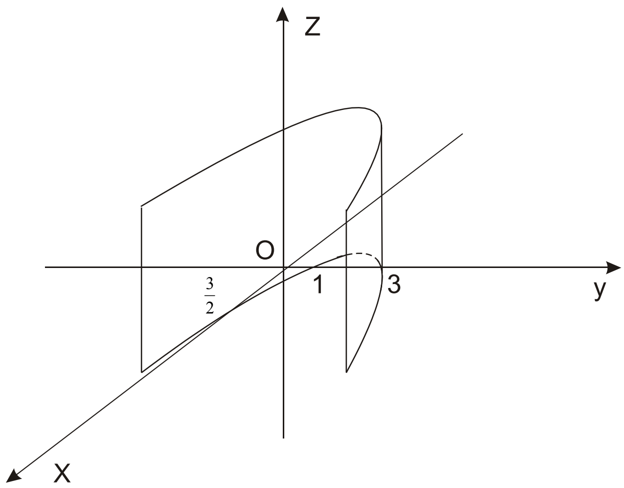


Рис. 3.12.

Отримали рівняння з двома змінними, що задає (теорема 3.12) циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі *oz*, а напрямною є крива, рівняння якої в площині *xoy* $(y-2)^2 = 2(x + \frac{1}{2})$ (рис.3.12)

Для виконання рисунка спочатку зобразимо в площині *xoy* параболу, задану рівнянням, $(y-2)^2 = 2(x + \frac{1}{2})$, а тоді таку ж саму параболу в будь-якій площині, паралельній *xoy* (паралельно переносимо вздовж осі *oz*) і через декілька відповідних точок цих двох парабол проводимо прямі, паралельні осі *oz*

Це - параболічний циліндр.

3.1.3. *Дослідити поверхню* $3x^2 + 2y^2 - 6z^2 = 0$ *методом перерізів.*

Розв'язання. Міркування аналогічні до проведених вище, при розв'язанні попередньої задачі (рис.3.13) :

1. $\begin{cases} z = 0 \\ 3x^2 + 2y^2 = 0 \end{cases}$ - точка $(0;0)$.

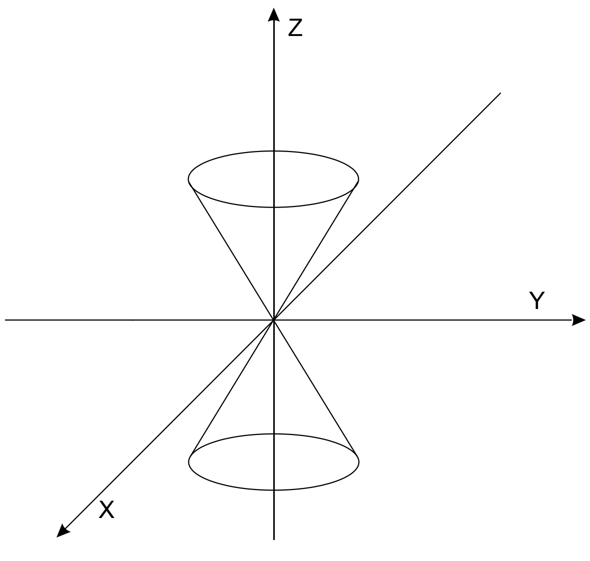


Рис. 3.13.

2. $\begin{cases} z = \pm h \\ 3x^2 + 2y^2 - 6h^2 = 0 \end{cases}$ - еліпс.

3. $\begin{cases} x = 0 \\ 2y^2 - 6z^2 = 0 \end{cases}$ - дві прямі $y = \sqrt{3}z, y = -\sqrt{3}z$

4. $\begin{cases} y = 0 \\ 3x^2 - 6z^2 = 0 \end{cases}$ - дві прямі.

Отже, дане рівняння задає конічну поверхню.

3.1.4. *Знайти множину точок, яка визначається рівнянням* $x^2 + y^2 = 1$.

Розв'язання. Рівняння $x^2 + y^2 = 1$ визначає в прямокутній декартовій системі координат поверхню прямого кругового циліндра, для якого напрямною лініює є коло, що лежить в площині xoy, з центром в початку координат і радіусом 1, твірні паралельні осі oz (теорема 3.1).

Дійсно, ортогональною проекцією точки $M(x; y; z)$ на площину xoy є точка $M_1'(x; y; 0)$. Точка M належить циліндру в тому і лише в тому випадку, коли точка M лежить на вказаному колі, тобто, коли x і y задовольняють рівнянню цього кола у відповідній системі координат на площині xoy.

3.1.5. *Дослідити поверхню, задану рівнянням:* $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Розв'язання. Дослідимо методом перерізів, перетинаючи поверхню координатними площинами:

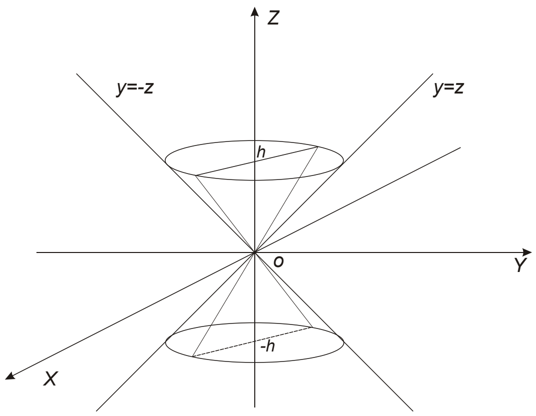


Рис. 3.14.

1) $x = 0$, тоді в площині yoz отримаємо:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 0, \\ y^2 - z^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (y - z)(y + z) = 0$$ -

дві прямі: $\mathcal{L}_1 :\ y - z = 0$ **,** $\mathcal{L}_2 : y + z = 0$**.**

2) В площині $xoy : \gamma_2 : \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ - початок координат. Не маємо уявлення про поверхню.

3) Перетнемо поверхню площинами, паралельними площині xoy.

Отримаємо перерізи $\begin{cases} z = \pm h, \\ x^2 + y^2 = h^2. \end{cases}$ - це кола.

4) При перетині профільною площиною xoz, матимемо; $\gamma_3 : \begin{cases} y = 0, \\ x^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ або

$(x - z)(x + z) = 0$, тобто дві прямі.

Отже, дане рівняння задає конус (рис.3.14).

3.1.6. *Побудувати зображення циліндричної поверхні, заданої рівнянням* $x - y^2 + 4 = 0$.

Розв'язання. Рівняння з двома змінними x і y визначає циліндричну поверхню, твірні якої паралельні до осі oz. За напрямну можна взяти лінію перетину поверхні з площиною xoy.

Почнемо з побудови напрямної лінії, яка задається системою рівнянь:

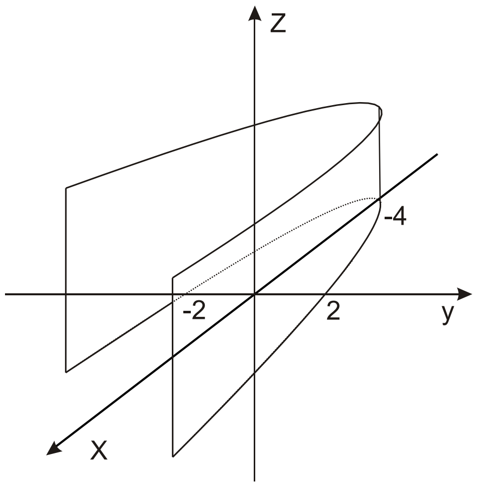


Рис .3.15

$$\begin{cases} x - y^2 + 4 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Рівняння $x - y^2 + 4 = 0$ можна звести до канонічного вигляду за допомогою паралельного перенесення $\begin{cases} x = x' - 4, \\ y = y', \\ z = z', \end{cases}$ при якому початок координат переходить у точку $O'(-4; 0; 0)$.

В нових координатах отримуємо систему рівнянь: $\begin{cases} (y')^2 = x' \\ z' = 0 \end{cases}$

Така система рівнянь визначає параболу, вершина якої розміщена в точці O', а вісь напрямлена по осі ox', яка співпадає з віссю ox (рис.3.15). Для уточнення рисунку корисно побудувати точки перетину цієї параболи з віссю oy.

Розв'язуючи систему рівнянь: $\begin{cases} x - y^2 + 4 = 0, \\ x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$

отримаємо: $x=0,\ y=\pm 2,\ z=0$. Позначимо на рисунку точки $(0;2;0)$ і $(0;-2;0)$ і проведемо через них напрямну параболу.

Щоб зобразити на рисунку циліндричну поверхню, побудуємо ще одну параболу, яка отримується із побудованої в площині xoy, паралельним перенесенням вздовж осі oz. Проведемо декілька твірних, паралельних до осі oz, з'єднуючи відповідні точки цих двох парабол.

3.1.7. *Дослідити методом перерізів поверхню*

$$2x^2-3y^2-2z^2+8x+6y-12z-21=0.$$

Розв'язання. Виконаємо перетворення у лівій частині рівняння:

$$(2x^2-8x+8)+(-3y^2+6y-3)+(2z^2-12z-18)-8+3+18-21=0;$$

або $2(x-2)^2-3(y-1)^2-2(z+3)^2=8;$

звідки $\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{\frac{8}{3}}-\dfrac{(z+3)^2}{4}=1;$

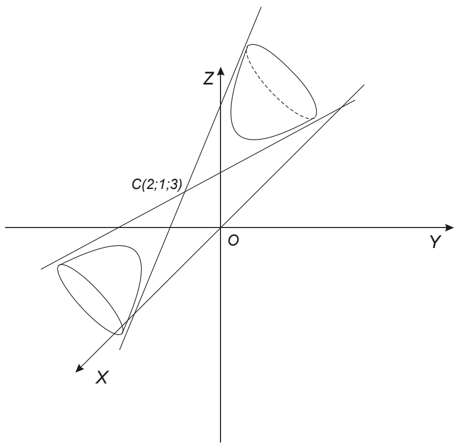


Рис. 3.16

Застосуємо метод перерізів:

при перетині площиною $x=2$ отримуємо уявний еліпс, тому перетнемо площиною, їй паралельною, наприклад, $x=6$. Будемо мати еліпс:

$$\begin{cases} x=6; \\ \dfrac{(y-1)^2}{\frac{8}{3}}+\dfrac{(z+3)^2}{4}=3 \end{cases};$$

у площині $y=1$ маємо гіперболу: $\begin{cases} y=1; \\ \dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(z+3)^2}{4}=1; \end{cases}$

а в площині $z=-3$ гіперболу: $\begin{cases} z=-3; \\ \dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{\frac{8}{3}}=1. \end{cases}$

Отже, дане рівняння задає двопорожнинний гіперболоїд з центром в точці

$C(2;1;-3)$ і дійсною віссю ox (рис.3.16)

II тип

Записати рівняння поверхні обертання

3.1.8. *Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням синусоїди $z = \sin y$ навколо осі OZ.*

Розв'язання: За правилом: замість змінної у підставимо $\sqrt{x^2 + y^2}$. Отже, р-ня поверхні обертання $z = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$.

III тип

Записати рівняння циліндричної чи конічної поверхонь, заданих певними умовами

3.1.9. *Скласти рівняння циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі oz, а напрямною є лінія перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ з площиною $x + y + z = 1$.*

Розв'язання. Рівняння даної циліндричної поверхні можна записати у вигляді: $f(x, y) = 0,$ якщо система рівнянь $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$

задає напрямну циліндра, що лежить в площині xoy. Щоб знайти таку напрямну в нашому випадку, потрібно спроектувати лінію перетину $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ на площину xoy. Ця проекція відшукується виключенням z. Знайшовши із другого рівняння системи $z = 1 - x - y$ і підставивши цей вираз у перше рівняння системи, отримаємо: $x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 = 9$ або $x^2 + y^2 + xy - x - y = 4.$

Шукана напрямна задається системою рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - x - y = 4, \\ z = 0, \end{cases}$

а рівняння циліндричної поверхні має вигляд: $x^2 + y^2 + xy - x - y = 4.$

3.1.10. *Написати рівняння циліндричної поверхні, якщо відоме рівняння напрямної, що лежить в площині xoy $x^2 + 2xy + 3y^2 - x = 0;$ а твірні паралельні вектору $\overrightarrow{p(1;0;1)}$.*

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь, скористашись алгоритмом складання неканонічних рівнянь циліндричних поверхонь і врахувавши, що $\vec{p} = \overrightarrow{(1;0;1)}$; $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \gamma$:

$$\begin{cases} x_0^{\ 2} + 2x_0 y_0 + 3y_0^{\ 2} - x_0 = 0 \\ z_0 = 0; \\ \dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - y_0}{0} = \dfrac{z - z_0}{1} = t, \end{cases}$$

$$z - t = 0; \Rightarrow z = t; \quad \begin{cases} x_0 = x - z; \\ y_0 = y; \\ z_0 = 0, \end{cases} \qquad (x-z)^2 + 2y(x-z) + 3y^2 - (x-z) = 0;$$

3.1.11. *Скласти рівняння циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі* oz*, а напрямною є лінія перетину сфери* $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ *з площиною* $x + y + z = 1$.

Розв'язання. Так як твірні циліндричної поверхні паралельні осі oz, то рівняння її можна записати у вигляді: $f(x, y) = 0$, якщо система рівнянь

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

задає напрямну циліндра, що лежить в площині xoy. Щоб знайти таку напрямну в нашому випадку, потрібно спроектувати лінію перетину

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

на площину xoy. Ця проекція відшукується виключенням z. Знайшовши із другого рівняння системи $z = 1 - x - y$ і підставивши цей вираз в перше рівняння системи, отримаємо: $x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 = 9$ або $x^2 + y^2 + xy - x - y = 4$.

Шукана напрямна задається системою рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - x - y = 4, \\ z = 0, \end{cases}$

а рівняння циліндричної поверхні має вигляд: $x^2 + y^2 + xy - x - y = 4$.

3.1.12. *Скласти рівняння круглої циліндричної поверхні, яка проходить через точку* $M_1(2;-1;0)$ *і рівняння її осі:* $\begin{cases} x = 7+3t; \\ y = 1+4t; \\ z = 3+2t \end{cases}$

Розв'язання. *I спосіб.* Рівняння циліндричної поверхні запишемо, як рівняння *геометричного місця точок*, що знаходяться на певній відстані від даної прямої (осі):

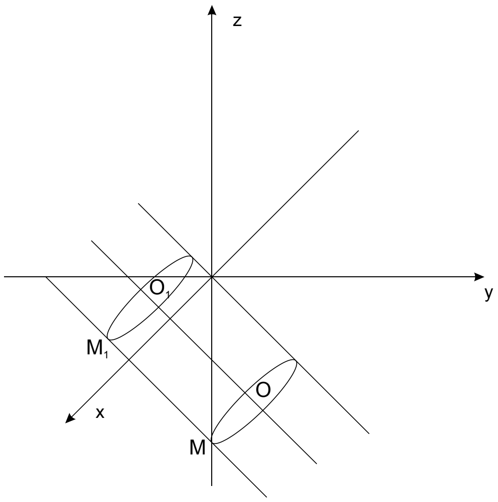


Рис. 3.17

$M_1(7;1;3)$; $\rho(M_1;l)$; $OM = O_1M_1$.(рис.3.17)

Координати точки O знайдемо : $O_1 = l \cap \pi, \pi \perp l$ через M_1.

$$\pi : 3(x-2)+4(y+1)+2(z-0)=0;$$

$$l : \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2} = t;$$

Знайдемо відстань $\rho(M_1;l) = |O_1M_1| = \sqrt{(2-4)^2+(-1+3)^2+1} = \sqrt{4+4+1} = 3;$

M - біжуча. $\rho(M;l) = \rho(M_1;l) = \overrightarrow{O_1M_1}$.

Знайдемо координати точки :

$O_1 : 3(7+3t-2)+4(1+4t+1)+2(3+2t)=0;$

Звідки $t=-1;$

Так як $O_1(4;-3;1)$

Оскільки $\rho(M;l)=3;$

то $\rho(M;l) = \dfrac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ x-7 & y-1 & z-3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{9+16+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{29}}(\mathrm{mod}(\vec{i}(2y-2)+\vec{j}(3z-9)+\vec{k}(4x-28)+$

$+\vec{k}(3-3y)+\vec{i}(12-4z)+\vec{j}(14-2x)) = \dfrac{1}{\sqrt{29}}\mathrm{mod}(\vec{i}(2y-4z+10)+\vec{j}(3z-2x+5)+)$

$+\vec{k}(4x-3y-25)) = \dfrac{1}{\sqrt{29}}\sqrt{(2y-4z+10)^2+(3z-2x+5)^2+(4x-3y-25)^2} = 3;$

Отже, рівняння шуканої поверхні має вигляд

$$(2y-4z+10)^2+(3z-2x+5)^2+(4x-3y-25)^2=261;$$

II спосіб. За загальною схемою складання неканонічного рівняння циліндричної поверхні,.

Запишемо систему рівнянь, врахувавши що напрямною є коло, твірна проходить через точку M_2, паралельно осі.:

$$\begin{cases}\begin{cases}(x_0-4)^2+(y_0+3)^2+(z_0-1)^2=9;\\ 3(x_0-2)+4(y_0+1)+2z_0=0;\end{cases} - \textit{напрямна}\\ \dfrac{x_0-2}{3}=\dfrac{y_0+1}{4}=\dfrac{z_0}{2}=t - \textit{твірна}\end{cases}$$

Далі - за алгоритмом.

3.1.13. *Напрямна циліндричної поверхні задана рівнянням* $\gamma:\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ 2y-z=0;\end{cases}$, *а її твірна перпендикулярна до площини напрямної. Записати рівняння поверхні.*

Розв'язання. Точка (0;2;4) – задовольняє рівняння кривої γ.

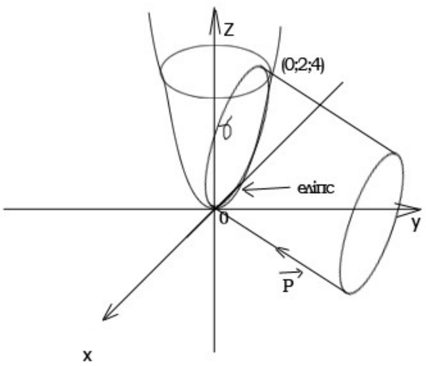


Рис.3.18

$$\vec{p}(0;2;-1),\ M_0\in\gamma:\ \gamma:\begin{cases}z_0=x_0^2+y_0^2\\ 2y_0-z_0=0,\\ \dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{2}=\dfrac{z-z_0}{-1}=t;\end{cases}$$

звідки $x_0=x;y_0=y-2t-1,\ z_0=t+z$

Підставимо ці значення в простіше (друге) рівняння системи: $2y-4t-z-t=;\quad 5t=2y-z$;

$$t=\frac{2y-z}{5}$$

Знайдемо y_0,z_0: $y_0=y-\dfrac{4y-2z}{5}-1=\dfrac{y+2z}{5}-1,\qquad y_0\dfrac{y+2z-5}{5}$

$$z_0=z+t=z+\frac{2y-z}{5}=\frac{4z+2y}{5}$$

Підставимо отримані значення z_0,y_0 в перше рівняння вихідної системи

$$\frac{4z+2y}{5}=x^2+\left(\frac{y+2z-5}{5}\right)^2, \text{ або}$$

$$20z+10y-25x^2-y^2-4yz-4z^2+2y+4z+1=0.$$

Отже, $25x^2+y^2+4z^2+4yz-12y-24z+1=0$ - рівняння шуканої циліндричної поверхні.

3.1.14. *Написати рівняння конічної поверхні з вершиною в точці* $S(1;2;4)$*, твірні якої утворюють з площиною* $2x+2y+z=0$ *кут* $\varphi=45^0$.

Розв'язання. *I спосіб.* Повністю аналогічний до розв'язання задач для циліндричних поверхонь, розглянутих вище.

Записуємо систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x_0-1}=\dfrac{y-2}{y_0-2}=\dfrac{z-4}{z_0-4}=t \\ \begin{cases} \text{сфера} \\ \text{площина} \end{cases} \end{cases}$, а далі все так як вище (наприклад, задача 3.1.19)

II спосіб.

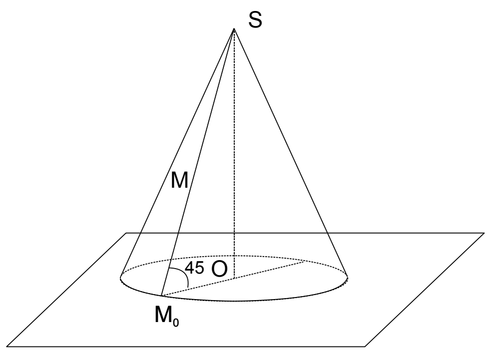


Рис.3.19

Запишемо рівняння конічної поверхні, як геометричного місця точок, які задовольняють умову, що кут між твірною і площиною $\varphi=45^0$ (рис.3.19).

$$\cos(SM \wedge SO)=\cos(\overrightarrow{SM}\wedge\vec{n})=\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

де $M(x;y;z)$- біжуча точка; тоді $\overrightarrow{SM}(x-1;y-2;z-4)$; Якщо $\vec{n}(2;2;1)$ - вектор нормалі даної площини, то

$$\cos(\overrightarrow{SM}\wedge\vec{n})=\frac{2(x-1)+2(y-2)+z-4}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}\sqrt{4+4+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$4(x-1)+4(y-2)+2(z-4)=3\sqrt{2}(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2});$$

$$2(2(x-1)+2(y-2)+(z-4))^2=9((x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2).$$

Отримане рівняння задає конічну поверхню, описану умовами задачі.

3.1.15. *Скласти рівняння конічної поверхні, вершина якої знаходиться в точці* $O(0;\,0;\,0)$*, а напрямна визначається системою рівнянь:* $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0, \\ 5x+4y-z-1=0. \end{cases}$

Розв'язання. Нехай $M_0(X;\,Y;\,Z)$ – деяка точка напрямної. Параметричні рівняння твірної OM_0 мають вигляд: $x=tX,\ y=tY,\ z=tZ,$ звідси, для $t\neq 0$ $X=\frac{1}{t}x,\ \ Y=\frac{1}{t}y,\ \ Z=\frac{1}{t}z,$ або $X=t'x,\ \ Y=t'y,\ \ Z=t'z,$ де $t'=\frac{1}{t}.$

Так як ці координати повинні задовольняти рівняння напрямної лінії, то $5t'x+4t'y-t'z-1=0,$ звідси $t'=\dfrac{1}{5x+4y-z}.$

Отже, $X=\dfrac{x}{5x+4y-z},\ \ Y=\dfrac{y}{5x+4y-z},\ \ Z=\dfrac{z}{5x+4y-z}.$

Після відповідних спрощень приходимо до шуканого рівняння конічної поверхні: $24x^2+15y^2+40xy-10xz-8yz=0.$

3.1.16. *Скласти рівняння конуса, вершина якого лежить в точці* $K(0;\,2;\,3)$*, а напрямною є лінія* $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1, \\ z=-2 \end{cases}$

Розв'язання. Знаючи вершину конічної поверхні та її напрямну, можемо скласти рівняння довільної твірної конічної поверхні як прямої, що проходить через точку K: $\dfrac{x}{l}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z-3}{1}$, де l,m— змінні параметри, значення яких залежать від умови перетину твірної з напрямною. Таким чином, система рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1; \\ z=-2; \\ \dfrac{x}{l}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z-3}{1}, \end{cases}$, де невідомими є x,y,z, є сумісною. Залежність між l,m знайдемо, виключаючи з цієї системи x,y,z: $\dfrac{x}{l}=z-3,$ але $z=-2$, отже, $x=-5l;$

$\frac{y-2}{m}=z-3,$ але $z=-2$, отже, $y=-5m+2;$ Знайдені значення для x та y підставимо у перше рівняння системи: $\frac{25l^2}{25}+\frac{(-5m+2)^2}{16}=1;$ або

$$16l^2+25m^2-20m-12=0 \qquad (1)$$

Це рівняння і виражає залежність між параметрами l і m.

На конічній поверхні виберемо її біжучу точку $M(x;y;z)$. Ця точка знаходиться на будь-якій твірній. Запишемо умову її належності до твірної:

$$\frac{x}{l}=\frac{y-2}{m}=\frac{z-3}{1};$$

Звідси визначимо l і m через біжучі координати поверхні і підставимо ці значення в рівняння (1), яке вони задовольняють:

$$\frac{x}{l}=\frac{z-3}{1};\text{звідки } l=\frac{x}{z-3};$$

$$\frac{y-2}{m}=\frac{z-3}{1};\text{ звідки } m=\frac{y-2}{z-3};$$

$$16\left(\frac{x}{z-3}\right)^2+25\left(\frac{y-2}{z-3}\right)^2-20\frac{y-2}{z-3}-12=0$$

$$16x^2+25y^2-12z^2-20yz-40y+112z-128=0$$

Це і є шукане рівняння конічної поверхні, бо ми пов'язали біжучі координати поверхні з відомими параметрами.

3.1.17. *Написати рівняння конуса, вершина якого співпадає з початком координат, а напрямна задана рівнянням* $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$*, x=a.*

Розв’язання. Розв’язуємо аналогічно до попередньої задачі. Записуємо систему рівнянь $\begin{cases} \frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1 \\ x_0=a \\ \frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}=t \end{cases}$

З третього рівняння знаходимо x_0, y_0, z_0 і з другого рівняння визначимо t: $t=\dfrac{x}{a}$.

Виразимо y_0 та z_0 через x і, підставивши в перше рівняння системи, отримаємо рівняння шуканого конуса.

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Рекомендована література

[2] §62, с. 389-398; [16] Ч. 2. Гл. 6. §§1-3, с. 325-333

[19] §4, с. 242-245, §5, с. 245-249

Задачі для самостійного розв'язання

1.1. Написати рівняння циліндричної поверхні, яка проходить через точки $M_1(1;0;-1)$, $M_2(2;0;2)$, якщо площини π_1: $x+2y+z=0$, π_2: $x-z=0$ є її площинами симетрії, а пряма $l=\pi_1\cap\pi_2$ — її віссю симетрії.

1.2. Написати рівняння конуса обертання, який проходить через прямі:

$$l_1:\ \begin{cases} x=2+t \\ y=2t, \\ z=-1+2 \end{cases}\qquad l_2:\ \begin{cases} x=2+2t, \\ y=t, \\ z=-1+2t \end{cases}\qquad l_3:\ \begin{cases} x=2-t, \\ y=2t, \\ z=-1-2t. \end{cases}$$

1.3. Написати рівняння циліндричної поверхні обертання, якщо рівняння трьох твірних її :

$$l_1:\ \begin{cases} x=t, \\ y=t, \\ z=t \end{cases}\qquad l_2:\ \begin{cases} x=-1+t, \\ y=t, \\ z=t+1 \end{cases}\qquad l_3:\ \begin{cases} x=1+t, \\ y=-1+t, \\ z=2+t \end{cases}$$

1.4. Написати рівняння циліндра обертання, який проходить через точку $M_0(1;-2;1)$, віссю якого є пряма: $x=t,\ y=1+2t,\ z=-3-2t.$

1.5. Параболічний циліндр проходить через точки $M_1(1;1;1)$ і $M_2(1;-1;1)$, його твірні паралельні прямій: $x=t, y=t, z=-2t$, а площина $x+y+z=0$ є його площиною симетрії. Написати рівняння цього циліндра.

1.6. Написати рівняння циліндра, якщо $\vec{a}(5;3;-2)$ напрямний вектор його твірних і рівняння напрямної:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 - z^2 = 4, \\ x = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0. \end{cases}$

1.7. Написати рівняння конуса, описаного навколо сфери: а) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, б) $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 9$.

1.8. Конус заданий рівнянням $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Написати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(0;-2;2)$, $M_2(-1;0;0)$ і перетинає даний конус по параболі.

1.9. Написати рівняння конуса з вершиною S(1;0;-1), який проходить через криву:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

1.10. В площині oyz дано коло з центром в точці $(0;4;0)$ і радіусом $r = 1$. Написати рівняння поверхні, що утворилася в результаті обертання цього кола навколо осі oz.

1.11. Коло, радіус якого r, розміщене на площині oyz так, що дотикається до осі oz в початку координат. Написати рівняння поверхні, утвореної в результаті обертання кола навколо осі oz.

1.12. Записати рівняння поверхні, що утворилася в результаті обертання параболи $z^2 = 10y$, $x = 0$ навколо осі oz.

1.13. Парабола з параметром $p = 5$ розташована на площині oyz так, що директриса співпадає з віссю oz. Записати рівняння поверхні, утвореної в результаті обертання даної параболи навколо осі oz.

1.14. Записати рівняння поверхні, що утворилася в результаті обертання навколо осі oy кожної з наступних кривих, розміщених у площині oxy:

а) еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

б) гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$

в) гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1;$

г) параболи $x^2=2py$.

1.15. Написати рівняння поверхні, що утворилася в результаті обертання синусоїди $z=\sin y$ навколо осі oz.

1.16. Довести, що поверхні, які задаються кожним з наступних рівнянь, є поверхнями обертання. Знайти криві, що обертаються, й осі обертання:

$x^4+2x^2y^2+y^4+x^2+y^2+z=0;$

1.17. Скласти рівняння круглого конуса, який проходить через всі три координатні осі.

1.18. Знайти геометричне місце прямих, які проходять через точку (3; 0; 5) і утворюють з площиною о*xy* кут π/4.

1.19. Записати рівняння циліндра, твірною якого є коло $\begin{cases} x^2+y^2=25; \\ z=0 \end{cases}$ і напрям твірної заданий відношенням *m:n:p*=5:3:2.

1.20. Знайти рівняння циліндра, якщо він проходить через криву $\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25; \\ x+y-z+2=0, \end{cases}$, а твірна його:

1) паралельна осі ox; 2) паралельна прямій $x=y$, $z=c$.

1.21. Напрямна циліндра задана рівняннями: $\begin{cases} x=y^2+z^2 \\ x=2z, \end{cases}$; а твірна його перпендикулярна до площини напрямної. Записати рівняння циліндра.

1.22. Дослідити перерізи еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ площинами, які паралельні координатним площинам.

1.23. Знайти відношення осей двох паралельних перерізів еліпсоїда: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, а саме: перетин площиною *xoz* і площиною, розміщеною від неї на відстані 2 одиниць.

1.24. Зобразити головні перерізи еліптичного параболоїда $z=\frac{x^2}{4}-y^2$ і проекції паралельних їм перерізів на відповідні координатні площини.

§2 Канонічні рівняння поверхонь другого порядку

Теоретичні відомості

Сфера

Геометричне місце точок простору, рівновіддалених від даної точки С(*а;в;с*), називається ***сферою*** і має рівняння

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2, \qquad (3.13)$$

де R – відстань від кожної точки сфери до центра – радіус.

Еліпсоїди

1. Еліпсоїд обертання

Еліпсоїдом обертання називається поверхня, утворена обертанням еліпса навколо однієї із своїх осей (рис.3.20).

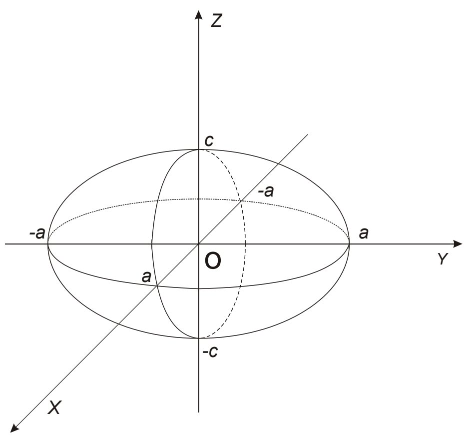


Рис.3.20

Якщо еліпс знаходиться в площині xoz, тоді його рівняння:

$$\begin{cases} y=0, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \qquad (3.14)$$

Обертаючись навколо Oz, еліпс утворить поверхню обертання, рівняння якої запишемо, скориставшись відповідним зауваженням попереднього параграфа: замість змінної x підставимо $\sqrt{x^2+y^2}$.

Тоді отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3.15)$$

Рівняння (3.15) є рівнянням ***еліпсоїда обертання***.

2. Еліпсоїд

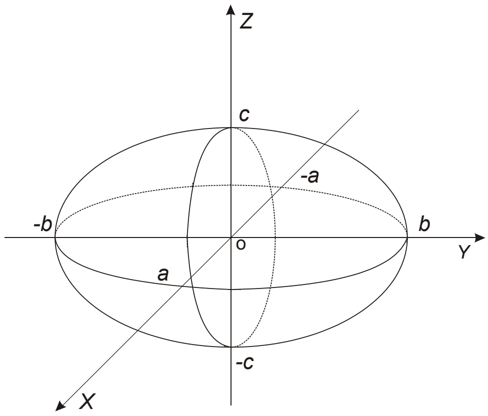


Рис.3.21

Еліпсоїдом називається поверхня, утворена з еліпсоїда обертання шляхом рівномірного розтягу або стиску в напрямку, перпендикулярному до площини початкового меридіана (рис. 3.21).

Рівняння еліпсоїда отримаємо із (3.15) шляхом подібного перетворення з коефіцієнтом k за формулами

$$X = x, \qquad Y = Ky, \qquad Z = z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = x, \\ y = \dfrac{1}{k}Y, \\ z = Z, \end{cases} \qquad (3.16)$$

підставивши в (3.15): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{k^2a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Так як $k^2a^2>0$, то $k^2a^2=b^2$. Остаточно

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3.17)$$

(3.17) – рівняння еліпсоїда.

Властивості

1. Еліпсоїд - поверхня другого порядку.

2. Еліпсоїд знаходиться в середині паралелепіпеда з розмірами 2*a*, 2*b*, 2*c* з центром в початку координат.

3. Точки $(a;0;0)$, $(-a;0;0)$, $(0;b;0)$, $(0;-b;0)$, $(0;0;c)$, $(0;0;-c)$, які належать еліпсоїду, називаються його ***вершинами***, або ***точками заокруглення***.

3. Еліпсоїд має ***один центр*** симетрії, ***три осі*** симетрії і ***три площини*** симетрії.

4. Форма еліпсоїда встановлюється методом перерізів:

у площині yoz: $\gamma_1:\begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$ - еліпс;

у площині xoy: $\gamma_2:\begin{cases} z=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ - еліпс;

у площині xoz: $\gamma_3:\begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$ - еліпс.

Еліпсоїд обертання зображається як і на рисунку3.21, оскільки в горизонтальній площині коло зображається еліпсом.

Гіперболоїди

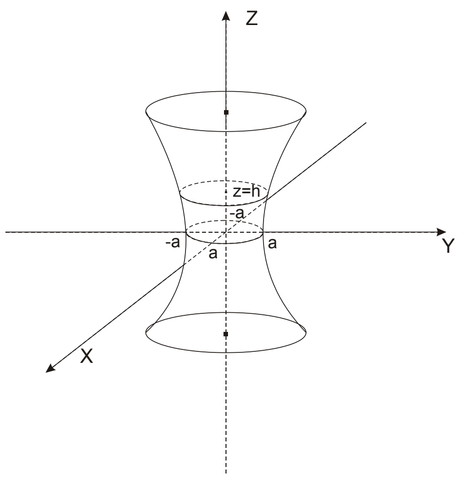


Рис.3.22

1. Однопорожнинний гіперболоїд обертання

Однопорожнинним гіперболоїдом обертання називається поверхня, утворена обертанням гіперболи навколо її уявної осі (рис.3.22).

Якщо рівняння гіперболи в площині xoz : $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$, то рівняння поверхні, утвореної обертанням цієї гіперболи навколо осі oz:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \text{або}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3.18)$$

(3.18) – рівняння ***однопорожнинного гіперболоїда обертання***.

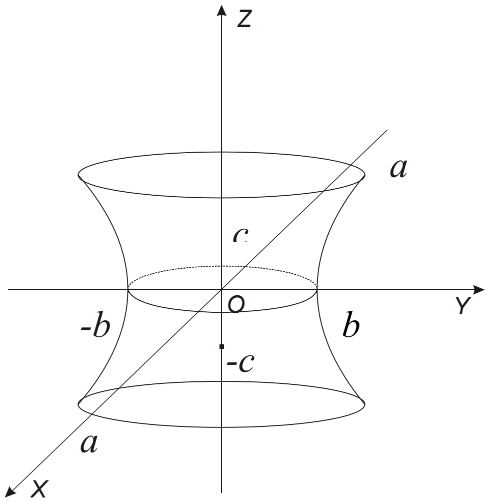


Рис. 7.23

2. Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, утворена з однопорожнинного гіперболоїда обертання шляхом рівномірного розтягу або стиску в напрямку, перпендикулярному до площини початкового меридіана (рис.3.23).

Отримаємо рівняння поверхні з рівняння (3.18) підстановкою формул (3.16). Отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{k^2a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{або}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3.19)$$

(3.19) – рівняння ***однопорожнинного гіперболоїда***.

Властивості

1. Гіперболоїд - поверхня другого порядку.

2. Однопорожнинний гіперболоїд має один центр симетрії, три осі і три площини симетрії.

3. Форму досліджують методом перерізів:

у площині $\gamma_1:\begin{cases} x=0, \\ \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$ - гіпербола,

у площині $xoy\ \gamma_2:\begin{cases} z=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ - еліпс,

$\gamma_3:\begin{cases} z=\pm h, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}>0 \end{cases}$ - еліпс у будь-якій площині, паралельній xoy,

$$\gamma_4 : \begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$ - гіпербола у площині xoz.

3. Двопорожнинний гіперболоїд обертання

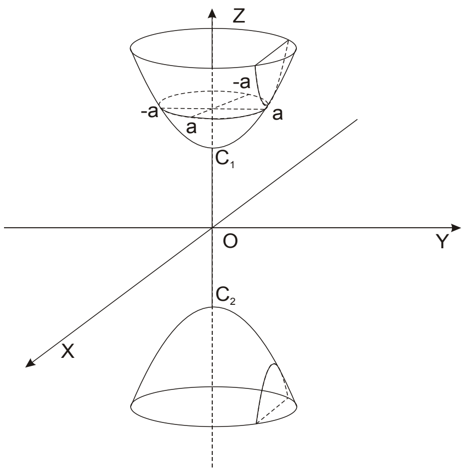


Рис.3.24

Двопорожнинним гіперболоїдом обертання називається поверхня, утворена обертанням гіперболи навколо дійсної осі (рис.3.24).

Якщо початковий меридіан в площині xoz, то його рівняння

$$\gamma : \begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1. \end{cases}$$

При обертанні цього початкового меридіану навколо осі oz утворюється поверхня обертання, рівняння якої має вигляд

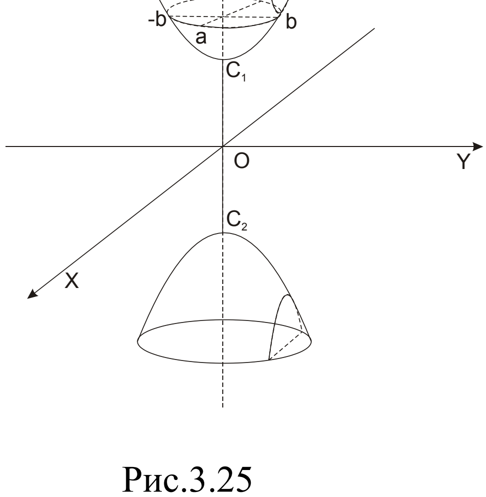
$$S : \frac{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,,$$

або

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (3.20)$$

Рівняння (3.20) – рівняння ***двопорожнинного гіперболоїда обертання***.

4. Двопорожнинний гіперболоїд



Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, утворена з двопорожнинного гіперболоїда обертання шляхом рівномірного розтягу або стиску в напрямку, перпендикулярному площині початкового меридіана (рис.3.25).

Рис.3.25

Рівняння отримаємо з рівняння (3.20) підстановкою замість x, y, z їх значень за формулами (3.16), тоді $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{k^2a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

Остаточно:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (3.21)$$

Рівняння (3.21) – рівняння двопорожнинного гіперболоїда.

Властивості

1. Двопорожнинний гіперболоїд - поверхня другого порядку.
2. Двопорожнинний гіперболоїд має: один центр симетрії, три площини симетрії, три осі симетрії.
3. Точки $(0;0;-c)$ та $(0;0;c)$ - вершини поверхні.
4. Форма поверхні досліджується методом перерізів (аналогічно розглянутим вище поверхням).

Параболоїди

1. Параболоїд обертання

Параболоїдом обертання називається поверхня, утворена обертанням параболи навколо її осі (рис.3.26).

Якщо початковий меридіан розміщений в площині xoz, то його рівняння можна записати у вигляді: $\gamma:\begin{cases}x^2=2pz,\\ y=0\end{cases}$

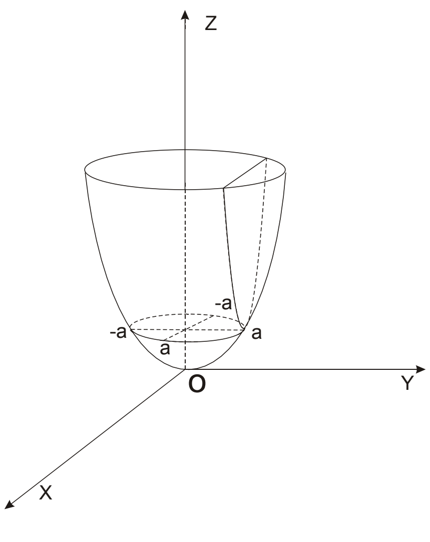


Рис. 3.26

Рівняння поверхні обертання матиме вигляд:

$$\frac{x^2+y^2}{p}=2z \text{ або } \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}=2z, \qquad (3.22)$$

де $p>0$

Рівняння (3.22) – рівняння ***параболоїда обертання***.

Якщо початковий меридіан розміщений в площині xoz, і його рівняння має вигляд:

де

в

$\gamma: \begin{cases} x^2 = -2pz, \\ y = 0 \end{cases}$, то параболоїд обертання розміститься в іншому півпросторі відносно площини xoy

2. Еліптичний параболоїд

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, утворена з параболоїда обертання шляхом рівномірного розтягу, або стиску в напрямку, перпендикулярному площині початкового меридіана (3.27).

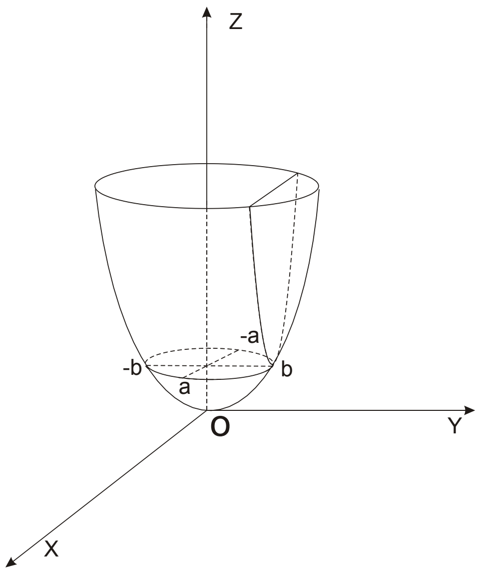


Рис. 3.27

Рівняння поверхні отримаємо шляхом зміни значень x, y, z за формулами (3.16):

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2 p} = 2z$, або

Остаточно:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (3.23)$$

Причому p і q – однакового знаку .

Точка $O(0;0;0)$ - вершина поверхні.

Форма поверхні досліджується методом перерізів.

Еліптичний параболоїд має дві площини симетрії, вісь симетрії, і не має центра симетрії.

3. Гіперболічний параболоїд

Цю поверхню не можна отримати з поверхні обертання.

Гіперболічним параболоїдом (сідлом) називається поверхня, утворена рухом параболи в просторі, яка переміщається паралельно деякій площині, вершина якої, весь час ковзає по іншій нерухомій параболі, яка знаходиться в площині,

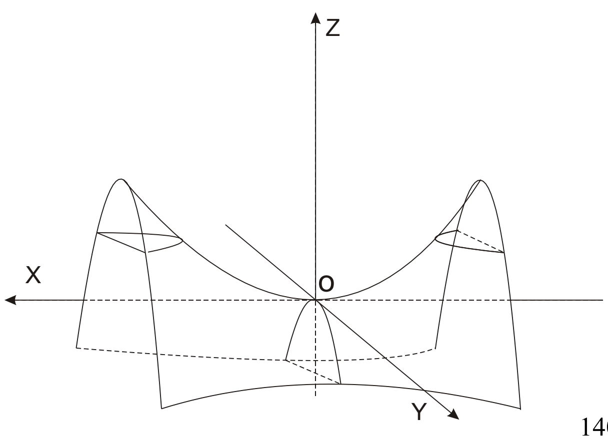


Рис. 3.28

перпендикулярній до площини рухомої параболи. Осі рухомої і нерухомої парабол взаємно протилежно напрямлені (рис.3.28).

Якщо нерухома парабола в площині xoz задана рівнянням:

$\gamma:\begin{cases} x^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$, а рухома парабола в площині xoy - $\gamma_2:\begin{cases} x = d \\ y^2 = 2q(h-7) \end{cases}$,

де p і q однакового знаку (в даному випадку обидва додатні), то рівняння поверхні матиме вигляд

$$y^2 = 2q\left(\frac{d^2}{2p} - z\right) \quad \textit{або} \quad \frac{y^2}{q} = \frac{x^2}{p^2} - 2z$$

Отже, рівняння ***гіперболічного параболоїда***

$$\frac{y^2}{q} - \frac{x^2}{p^2} = 2z \qquad (3.24)$$

Властивості

Як і у випадку еліптичного параболоїда, поверхня не має центру, має дві площини симетрії. (в даному випадку це yoz і xoz); одну вісь симетрії: (в даному випадку oz), по якій перетинаються площини симетрії. Форма досліджується методом перерізів:

у площині xoy:

$\gamma_1:\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0 \end{cases}$ – дві прямі $\dfrac{x}{p} - \dfrac{y}{q} = 0$ та $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 0$,

у площинах, паралельних координатній:

$\gamma_2:\begin{cases} z = h > 0 \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h > 0 \end{cases}$ – гіпербола з дійсною віссю ox

$\gamma_2:\begin{cases} z = -h \\ -\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h \end{cases}$ – гіпербола з дійсною віссю oy

Лінійчасті поверхні

Поверхня називається ***лінійчастою***, якщо через кожну її точку можна провести пряму, яка повністю лежить на поверхні.

Іншими словами: лінійчасту поверхню можна отримати рухом прямої в просторі.

Лінійчастими серед розглянутих поверхонь другого порядку є циліндри, конуси, однопорожнинний гіперболоїд, гіперболічний параболоїд.

Прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда

Теорема 3.3. Однопорожнинний гіперболоїд має дві серії прямолінійних твірних, кожна з яких залежить від одного змінного параметра.

Наслідок: через кожну точку цього гіперболоїда проходить дві прямі різних серій.

Теорема 3.4. Кожні дві прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда однієї серії мимобіжні, різних серій – перетинаються.

Прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда

Теорема 3.5. Гіперболічний параболоїд має дві серії прямолінійних твірних, кожна з яких залежить від одного змінного параметра.

Теорема 3.6. Кожні дві прямолінійні твірні сідла однієї серії мимобіжні, а різних серій – перетинаються.

Розв'язання задач

І тип

Записати рівняння поверхні другого порядку, заданої певними умовами, та встановити її тип

3.2.1. *Записати рівняння сфери з центром в точці* $A(1;-2;3)$*, яка дотикається до площини* $x+4y-5z-20=0$.

Розв'язання. Рівняння сфери з центром в точці A має вигляд: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, де a, b, c – координати її центра A, r – радіус. Радіус r можна знайти як відстань від центра сфери до дотичної площини. Отримуємо:

$$r=\frac{|1+4\cdot(-2)-5\cdot 3-20|}{\sqrt{1^2+4^2+(-5)^2}}=\sqrt{42}.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=42.$$

3.2.2. *Довести, що сфери, які визначаються рівняннями* $x^2+y^2+z^2=1$ *та* $x^2+y^2+z^2-8x+7=0$*, дотикаються одна до одної зовнішнім способом.*

Розв'язання. Центр першої сфери, радіус якої рівний 1, знаходиться в початку координат. Переписуючи рівняння другої сфери у вигляді $(x-4)^2+y^2+z^2=9,$ бачимо, що її центр C має координати $(4;\,0;\,0)$, а радіус рівний 3. Таким чином, відстань між центрами даних сфер

$d=|OC|=4.$

Оскільки сума радіусів також рівна 4, то сфери дотикаються одна до одної зовнішнім способом.

3.2.3. *Написати рівнянняня еліпсоїда, який проходить через точку* $N(1;\sqrt{3};\sqrt{3})$*, осі якого співпадають з осями координат і перетинає площину* oyz *по еліпсу:* $\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{20}=1.$

Розв'язання: Рівняння еліпсоїда, осі якого співпадають з осями координат має вигляд $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

Так як у площині $oyz:$ $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases}$ *або* $\begin{cases}\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{20}=1,\\ x=0\end{cases}$,

то $b^2=5,\quad c^2=20.$

Оскільки еліпсоїд проходить через точку N, то: $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{(\sqrt{3})^2}{5}+\dfrac{(\sqrt{3})^2}{20}=1.$

Звідси $a^2=4$.

Отже, рівняння еліпсоїда $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{20}=1.$

3.2.4. *Осі симетрії гіперболоїда є осями ортонормованого репера. Написати рівняння цієї поверхні, якщо вона проходить через криву*

$$\gamma:\begin{cases}25x^2-16z^2=144\\ x=y\end{cases}$$ *і точку* $M_0(3;\,4;\,3)$.

Розв'язання. Запишемо дану систему у вигляді:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=y\end{cases}\quad\text{або}\quad\begin{cases}\dfrac{(b^2+a^2)x^2}{a^2b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=y\end{cases}$$

Звідси $c^2=\dfrac{144}{16}=9$, $\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\dfrac{25}{144}$.

Тоді $\begin{cases}144a^2+144b^2=25a^2b\\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}-\dfrac{9}{9}=1\end{cases}$, $\begin{cases}144(a^2+b^2)=25a^2b^2\\ 9b^2+16a^2=2a^2b^2,\end{cases}$ Звідси:

$$9\frac{112}{63}a^2+16a^2=2a^2\frac{112}{63}a^2,\ 16a^2+16a^2=\frac{224}{63}a^4,\quad 144a^2+144b^2=25\frac{16a^2+9b^2}{2},$$

$288a^2+288b^2-400a^2-225b^2=0.$ $112a^2=63b^2$. Звідси $b^2=\dfrac{112}{63a^2}=16$.

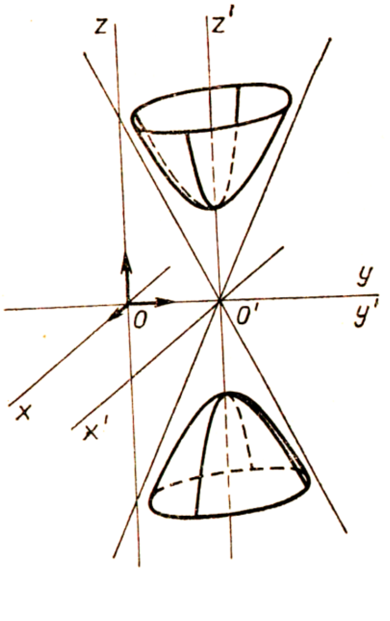
Тоді $\dfrac{224}{63}a^2=63.$ тобто $a^2=9.$

Отже, рівняння шуканої поверхні $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=1$.

3.2.5. *Визначити вид поверхні другого порядку, заданої рівнянням* $4x^2+4y^2-z^2-16y+20=0$. *Побудувати її зображення.*

Розв'язання. Виділивши повний квадрат, запишемо рівняння у вигляді:

$$x^2+(y-2)^2-\frac{1}{4}z^2=-1.$$



Виконаємо паралельне перенесення системи координат, помістивши початок координат в точку $O'(0;\,2;\,0)$. Таке перенесення виражається формулами: $\begin{cases}x=x',\\ y=y'+2,\\ z=z'.\end{cases}$

Рис. 3.29

Після цього перенесення рівняння даної поверхні набуде вигляду: $x'^2 + y'^2 - \frac{z'^2}{4} = -1.$

Дане рівняння визначає двопорожнинний гіперболоїд обертання, зображений на рис.3.29.

3.2.6. *Визначити вид поверхні другого порядку, заданої рівнянням* $z = xy$. *Побудувати її зображення.*

Розв'язання. Виконаємо поворот системи координат навколо осі Oz на кут $45°$. Такий поворот виражається за допомогою формул:

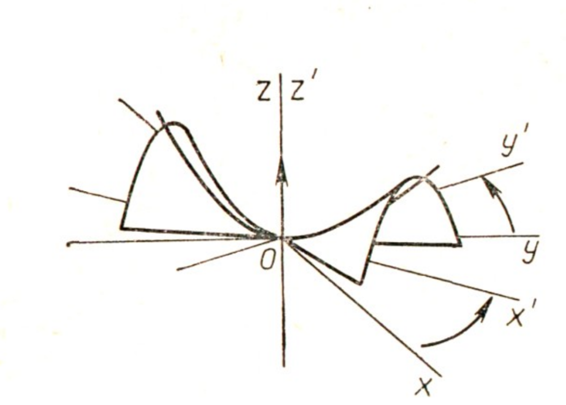


Рис. 3.30

$$\begin{cases} x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z = z'. \end{cases}$$

Після перетворення системи координат рівняння даної поверхні матиме вигляд: $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = z'$ або, що те саме: $\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{1} = 2z'.$

Дане рівняння визначає гіперболічний параболоїд, зображений на рис.3.30.

II тип

Записати рівняння прямолінійних твірних

3.2.7. *Написати рівняння прямолінійних твірних поверхні* $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, *які проходять через точку* $A(5;3;2)$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{z^2}{4}$.

В обох частинах рівняння маємо різниці квадратів, тому

$$\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{3}\right)=\left(1-\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right).$$

Записуємо пропорцію: $\dfrac{\frac{x}{5}-\frac{y}{3}}{1-\frac{z}{2}}=\dfrac{1+\frac{z}{2}}{\frac{x}{5}+\frac{y}{3}}=u$.

Звідси $\begin{cases}\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=u(1-\frac{z}{2}),\\ \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=\frac{1}{u}(1+\frac{z}{2})\end{cases}$ - I серія прямолінійних твірних $\mathcal{L}_1$,

Другу серію прямолінійних твірних запишемо з пропорції:

$$\frac{\frac{x}{5}-\frac{y}{3}}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1-\frac{z}{2}}{\frac{x}{5}+\frac{y}{3}}=v\ .$$

Звідки: $\begin{cases}\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=v(1+\frac{z}{2}),\\ \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=\frac{1}{v}(1-\frac{z}{2})\end{cases}$ - II серія прямолінійних твірних $\mathcal{L}_2$.

Так як твірні проходять через точку A(5;3;2), то

$\mathcal{L}_1$: $\begin{cases}1-1=u(1-1),\\ 1+1=\frac{1}{u}(1+1)\end{cases}$, $\begin{cases}0=u\cdot 0,\\ 2=\frac{1}{u}2\end{cases}$, $\begin{cases}0=u\cdot 0,\\ u=1.\end{cases}$ Звідси $u=1$.

$\mathcal{L}_2$: $\begin{cases}1-1=v(1+1),\\ 1+1=\frac{1}{v}(1-1)\end{cases}$ звідки $v=0$.

Запишемо рівняння тих прямолінійних твірних, що проходять через точку A:

$$\mathcal{L}_1(u=1):\begin{cases}\frac{x}{5}-\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1,\\ \frac{x}{5}+\frac{y}{3}-\frac{z}{2}=1\end{cases},$$

$$\mathcal{L}_2(v=0):\begin{cases}\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{3}=0,\\ 1-\dfrac{z}{2}=0\end{cases} \quad \text{або } \mathcal{L}_2:\begin{cases}3\mathrm{x}-5\mathrm{y}=0,\\ \mathrm{z}=2\end{cases}$$

3.2.8. *На гіперболічному параболоїді* $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{2}=2z$. *Знайти прямолінійні твірні, паралельні площині* $\pi: 6x+4y-8z+1=0.$

Розв'язання. Записуємо дане рівняння у вигляді пропорції:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{8}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{8}}+\frac{y}{\sqrt{2}}\right)=2z.$$

Звідки отримаємо дві серії прямолінійних твірних:

$$I. \quad \left\{\frac{\dfrac{x}{\sqrt{8}}-\dfrac{y}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{z}{\dfrac{x}{\sqrt{8}}+\dfrac{y}{\sqrt{2}}}=u\right.$$

$$II. \quad \left\{\frac{\dfrac{x}{\sqrt{8}}-\dfrac{y}{\sqrt{2}}}{z}=\frac{2}{\dfrac{x}{\sqrt{8}}+\dfrac{y}{\sqrt{2}}}=v\right.$$

Звідси : I – серія прямолінійних твірних $\mathcal{L}_1:\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{8}}-\dfrac{y}{\sqrt{2}}=2u,\\ \dfrac{x}{\sqrt{8}}+\dfrac{y}{\sqrt{2}}=\dfrac{z}{u},\end{cases}$

II – серія прямолінійних твірних $\mathcal{L}_2:\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{8}}-\dfrac{y}{\sqrt{2}}=zv,\\ \dfrac{x}{\sqrt{8}}+\dfrac{y}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{v}.\end{cases}$

Щоб знайти u і v, скористаємось тим, що $\mathcal{L}_1 \parallel \pi$ і $\mathcal{L}_2 \parallel \pi$.

Знайдемо напрямні вектори прямих $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$, які задані як перетин двох площин: $\vec{p}_1 = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$ і запишемо умову паралельності прямої і площини. Для прямої $\mathcal{L}_1$: $\vec{p}_1 = \left(2\sqrt{8}, \sqrt{8}, 4u\right)$ або $\vec{p}_1 = \left(2,1,\sqrt{2}u\right)$.

Тоді $A\ell_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0$, тобто $6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 8 \cdot \sqrt{2}u = 0.$ Звідси $u = \sqrt{2}$, а $\vec{p}_1(2;1;2)$. Значить $\mathcal{L}_1$: $\begin{cases} x - 2y = 8, \\ x + 2y - 2z = 0. \end{cases}$

Аналогічно записуємо рівняння прямолінійних твірних $\mathcal{L}_2$.

Рекомендована література

. [2] §61, с. 383-389; [7] §§31-34; [12] Розділ 13. §69, с. 229-232, §71, с. 237-241 §73, ст. 241-243; [16] Ч. 2. Глава 6. §§4-12, с. 333-342; [19] Розділ 7. §3, с. 240-242, §16, с. 283-293

Задачі для самостійного розв'язання

2.1. Написати рівняння сфери, описаної навколо тетраедра з вершинами в точках $A(2;1;-1)$, $B(0;3;-1)$, $C(0;0;-3)$, $D(0;-1;-1)$.

2.2 Написати рівняння сфери, що дотикається до прямої $x = 1 + 3t, y = -4 + 6t, z = 6 + 4t$ в точці $M_1(1;-4;6)$ і до прямої $x = 4 + 2t, y = -3 + t, z = 2 - 6t$ в точці $M_2(4;-3;2)$.

2.3. Написати рівняння сфери, вписаної в тетраедр з вершинами в точках $S\left(-\frac{11}{3};4;-\frac{22}{3}\right)$, $A(-2;1;1)$, $B(-1;-4;-2)$, $C\left(3;\frac{8}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

2.4. Дано вершини еліпсоїда $A_1(8;0;0)$, $A_2(-2;0;0)$. Написати його рівняння, якщо в перетині його площиною *yoz* отримується еліпс: $x=0$, $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

2.5. Дано рівняння еліпсоїда $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{27} = 1$, прямої l: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ z - 9 = 0 \end{cases}$ і точка $M_0(-3,1,1)$. Написати рівняння тієї дотичної площини до еліпсоїда, яка проходить через пряму l і не перетинає відрізок OM_0.

2.6. Осі симетрії однопорожнинного гіперболоїда є осями ортонормованого репера. Написати рівняння цього гіперболоїда, якщо він проходить через криву $\begin{cases} 25x^2 - 16z^2 = 144 \\ x = y \end{cases}$ і точку $M_0(3;4;3)$.

2.7. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, які проходять через точку $M_0(5;3;2)$.

2.8. Визначити вид перерізу двопорожнинного гіперболоїда, заданого рівнянням $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, площиною $\pi:\ Ax + By + Cz + D = 0$.

2.9. Написати рівняння площини, яка паралельна даній площині $\pi:\ x - y + z - 5 = 0$ і перетинає параболоїд $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 2y$ по двох прямолінійних твірних. Знайти рівняння цих твірних.

2.10. Знайти рівняння прямолінійних твірних параболоїда $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 2z$, які паралельні площині $6x + 4y - 8z + 1 = 0$.

Визначити вид і розміщення поверхні, користуючись перетвореннями повороту і перенесення або групуванням членів в рівнянні поверхні:

2.11. $z = 2x^2 - 4y^2 - 6x + 8y + 1;$

2.12. $z = x^2 + 3y^2 - 6y + 1;$

2.13. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 4y - 6z = 0;$

2.14. $z^2 = 3x + 4y + 5;$

2.15. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 18z - 14 = 0;$

2.16. $x^2 + 4y^2 - z^2 - 10x - 16y + 6z + 14 = 0;$

2.17. $3x^2 + 6x - 8y + 6z - 7 = 0;$

2.18. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 4y - 1 = 0;$

2.19. $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0;$

2.20. $3x^2+3y^2-3z^2-6x+4y+4z+3=0;$

2.21. $4x^2-y^2-4x+4y-3=0.$

2.22. Визначити координати центра і довжину радіуса для кожної з наступних сферичних поверхонь:

а) $x^2+y^2+z^2+2x-10z+22=0;$

б) $x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=0;$

в) $x^2+y^2+z^2+12x-6y+37=0;$

2.23. Записати рівняння поверхні другого порядку, яка проходить через точки (0;0;0), (1;1–1), (0;0;1), для якої площини $x+y+z=0$, $2x-y-z=0$, $y-z+1=0$ є площинами симетрії.

2.24. Записати рівняння кругового конуса, який дотикається до площин *oxz* і *oyz* по прямих *ox* і *oy*?

2.25. Записати рівняння конічної поверхні, яка перетинає площину *oyz* по колу *x*=0, $y^2+z^2=2ry$, а площину *oxz* по параболі *y*=0, $z^2-2px=0.$

2.26. Записати рівняння поверхні другого порядку, якщо, вона перетинає площину *oxy* по колу $x^2+y^2-12x-18y+32=0$, $z=0$, а площини *oxz* і *oyz* по параболах, осі яких паралельні додатному напрямку осі *oz*, причому параметр параболи, яка лежить в площині *oxz*, рівний 1.

2.27. Написати рівняння сферичної поверхні з центром в точці *C*(3; –1; 6) і радіусом *R* = 7.

2.28. Через точку (2; 1; -1) провести таку хорду поверхні $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1,$ яка ділилася б в цій точці навпіл.

2.29. Через точку (5; 1; 2) провести пряму так, щоб вона перетнула поверхню $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$ тільки в одній точці.

2.30. Знайти прямі, які проходять через точку (6;2;8) і лежать цілком на поверхні $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1.$

2.31. На параболоїді $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ знайти прямолінійні твірні, які паралельні площині $3x+2y-4z=0.$

2.32. Довести, що прямолінійні твірні однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ проектуються на координатні площини в дотичні до відповідних головних перерізів.

2.33. Дослідити, як розміщені (в координатних площинах) по відношенню до головних перерізів проекції прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z.$

2.34. Визначити поверхню, яку описує пряма, що ковзається по трьох прямих: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1}$; $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ і $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}$, з яких ніякі дві не лежать в одній площині.

2.35. По двох прямих $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ і $\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$ переміщаються дві точки з однаковою і постійною швидкістю; вони одночасно перетинають площину *xoy*, але в той час як одна піднімається над цією площиною, друга, навпаки, опускається вниз. Знайти поверхню, яку опише пряма, що з’єднує дві рухомі точки.

2.36. Скласти рівняння поверхні, яка утворена прямою, що ковзається по прямих $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ і $\frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$, залишаючись весь час паралельною площині $2x+3y-5=0.$

2.37. Знайти дотичні площини еліпсоїда $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=z,$ які були б паралельні площині $x-y-2z=0.$

2.38. Знайти дотичну площини циліндра $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1,$ знаючи відношення a:b=5:4 відрізків, які вона відтинає на осях оx та оy.

2.39. До однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ провести дотичні площини через кожну із наступних прямих: 1) $\frac{x}{3}=\frac{y+9}{3}=\frac{z}{1}$; 2) $\frac{x-9}{-1}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$; 3) $\frac{x}{6}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$ і дослідити, як ці прямі розміщені відносно гіперболоїда.

2.40. Через пряму $y=0; z=1$ провести дотичні площини до двопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=-1$ і визначити точки їх дотику.

2.41. Дано гіперболічний параболоїд $x^2-\frac{y^2}{4}=z$ і одна з його дотичних площин: $10x-2y-z-21=0$. Знайти рівняння кожної із тих двох прямих, по яких вони перетинаються.

2.42. Знайти діаметральні площини еліпсоїда $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$, які перетинають його по колах.

§3. Загальна теорія поверхонь другого порядку

Теоретичні відомості

Поверхнею другого порядку називається геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють загальне рівняння

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{3.25}$$

Іншими словами: це ті, і тільки ті точки простору, координати яких задовольняють рівняння (3.25)

Коефіцієнти рівняння - дійсні числа, причому $a_{ij}=a_{ji}$, $(i, j = 1, 2, 3, 4)$

Основні позначення

Рівняння (3.24): $2F(x; y; z)=0$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{3.26}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{3.27}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Fx} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \mathrm{Fy} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \mathrm{Fz} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases} \tag{3.28}$$

половини частинних похідних по *x,y,z* лівої частини рівняння

Перетин поверхні з прямою

Теорема 3.7. Пряма перетинає поверхню не більше, ніж у двох точках,або повністю лежить на поверхні.

Щоб знайти точки перетину прямої $\mathcal{L}$: $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$

і поверхні *S*: 2*F*(*x;y;z*)=0, потрібно розв’язати систему рівнянь :

$$\begin{cases} 2F(x;y;z) = 0, \\ x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \tag{3.29}$$

Теорема 3.8. Сукупність прямих, які дотикаються до поверхні в точці $\mathrm{M}_0(x_0;y_0;z_0)$, що їй належить, є площина, яка називається. ***дотичною площиною*** *до поверхні* ***в точці*** $\mathbf{M}_0$**.**

Рівняння ***дотичної площини*** до поверхні в точці $\mathrm{M}_0(x_0;y_0;z_0)$:

$$Fx_0(x - x_0) + Fy_0(y - y_0) + Fz_0(z - z_0) = 0 \tag{3.30}$$

Пряма, перпендикулярна до дотичної площини в точці дотику, називається ***нормаллю*** *до поверхні* в точці M_0: $\vec{n}(Fx_0; Fy_0; Fx_0)$.

Рівняння нормалі

$$\frac{x-x_0}{Fx_0}=\frac{y-y_0}{Fy_0}=\frac{z-z_0}{Fz_0} \qquad (3.31)$$

Зауваження. Якщо задана поверхня і задана точка дотику на ній поверхні, то записати рівняння дотичної площини тривіально: потрібно просто в формулу (3.30) підставити значення координат точки дотику. Якщо точка дотику не задана, то щоб записати рівняння дотичної площини, цю точку потрібно знайти. Для цього необхідно три умови, щоб знайти $x_0; y_0; z_0$. Одна умова завжди відома: координати точки задовольняють рівняння поверхні, дві інші записуємо, виходячи з умови задачі.

Теорема 3.9. Геометричне місце прямих , що проходять через дану точку простору і мають асимптотичний напрям відносно поверхні є дійсний або уявний конус з вершиною в цій точці.

Умова асимптотичності

$$a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{12}\,\mathrm{lm}+2a_{13}\,\mathrm{ln}+2a_{23}mn=0 \qquad (3.32)$$

Центр поверхні

Центром поверхні другого порядку називають центр симетрії поверхні - це та точка, в якій хорди, перетинаючись, діляться навпіл.

Теорема 3.10. Координати центра поверхні $2F(x_0; y_0; z_0)=0$ є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} Fx=0, \\ Fy=0, \\ Fz=0. \end{cases} \qquad (3.33)$$

Можливі випадки:

1. rang A = rang B =3,

$\delta \neq 0$, $\Delta \neq 0$ - поверхня центральна.

2. rang A = rang B =2,

$\delta = 0$, $\Delta \neq 0$ - поверхня має пряму центрів.

3. rang A = rang B =1,

$\delta = 0$, $\Delta = 0$ - поверхня має площину центрів.

4. rang A =2, rang B =3,

$\delta = 0$, $\Delta \neq 0$ - поверхня не має жодного центра.

Система не має жодного розв'язку . Але так як rang A =2, то поверхня має центр в нескінченності. (Наприклад, параболоїди)

5. rang A =1, rang B =2

$\delta = \Delta = 0$ - поверхня має пряму центрів у нескінченності

(Наприклад, параболічний циліндр.)

Геометричне місце середин системи паралельних хорд даного напрямку $\vec{p}\,(l;m;n)$ поверхні S: $2F(x_0;y_0;z_0)$ =0 є площиною, яка називається ***діаметральною площиною***, спряженою з хордою даного напрямку $\vec{p}$.

Рівняння

$$lFx + mFy + nFz=0 \tag{3.34}$$

є рівнянням ***діаметральної площини,*** спряженої з напрямком $\vec{p}$ $(l;\,,m;\ n)$.

В розгорнутому вигляді

$$(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)x+(a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n)y+(a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n)z+S=0 \tag{3.35}$$

Рівняння поверхні відносно нового початку

Нехай поверхня задана рівнянням S: $2F(x_0;y_0;z_0)$ =0 відносно системи $xoyz$. Виконаємо перенесення початку координат за формулами:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \\ z = z' + z_0. \end{cases} \qquad (3.36)$$

Нове рівняння поверхні S: $2F(x';y';z')=0$ отримаємо, підставивши в задане рівняння замість x, y, z їх значення за формулами перенесення початку (3.36):

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{12}x'z' + 2F_{x_0}x' + 2F_{y_0}y' + 2F_{z_0}z' + 2F(x_0;y_0;z_0) = 0$$

Висновок

1. При перенесенні початку група старших членів залишається незмінною.

Отже, перший інваріант перенесення початку

$$I_1 = \delta \qquad (3.37)$$

2. Коефіцієнтами при лінійних членах у новому рівнянні є вирази

$$Fx_0,\ Fy_0, Fz_0$$

3. Вільний член є результатом підстановки в дане рівняння координат нового початку.
4. Як і для випадку кривих, другим інваріантом перенесення початку є Δ:

$$I_2 = \Delta \qquad (3.38)$$

а також:

$$I_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad (3.39)$$

Якщо S: $2F(x;y;z)=0$ - центральна, то її центр є розв′язком рівння системи

$$\begin{cases} Fx = 0, \\ Fy = 0, \\ Fz = 0. \end{cases} \quad \text{тобто } Fx_0 = Fy_0 = Fz = 0.$$

Зауваження. Рівняння центральної поверхні відносно системи координат, початок якої є в центрі поверхні, не містить лінійних членів.

Напрям $\vec{p}\,(l;m;n)$ називається ***головним,*** якщо він перпендикулярний до спряженої з ним діаметральної площини.

Рівняння діаметральної площини

$$lFx + mFy + nFz=0 \qquad (3.40)$$

$$a \quad \underbrace{(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)}_{A}x + \underbrace{(a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n)}_{B}y + \underbrace{(a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n)}_{C}z + S = 0\ . \qquad (3.41)$$

Головні напрями знаходимо, розв'язавши систему:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\ell + a_{12}m + a_{13}n = 0, \\ a_{21}\ell + (a_{22} - \lambda)m + a_{23}n = 0, \\ a_{31}\ell + a_{32}m + (a_{33} - \lambda)n = 0. \end{cases} \qquad (3.42)$$

Рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.43)$$

називається ***характеристичним рівнянням***.

Розв'язавши його, ми знайдемо три значення λ: λ_1, λ_2, λ_3. Підставивши їх по черзі в рівняння (3.42)**,** знайдемо координати головних напрямів поверхні.

Властивості коренів характеристичного рівняння

Теорема 3.11. Головні напрями $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{p_3}$ що відповідають кореням характеристичного рівняння λ_1, λ_2, λ_3, взаємно перпендикулярні.

Теорема 3.12. Корені характеристичного рівняння (3.43) всі три дійсні.

Діаметри, які мають головні напрями називається ***головними діаметрами*** або ***головними осями***.

Теорема 3.13. Якщо осі прямокутної системи координат повернути так, щоб вони мали головні напрями, то відносно нової системи координат в рівнянні поверхні будуть відсутні добутки різнойменних змінних і, навпаки, якщо в рівнянні поверхні відсутні добутки різнойменних змінних, то це означає, що всі осі координат мають головні напрями відносно цієї поверхні.

Іншими словами: Для того, щоб $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, необхідно і достатньо, щоб $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ мали головні напрями.

Зведення рівнянь поверхонь другого порядку до канонічного виду за допомогою перетворення координат

І. Центральні поверхні

План

1. Знайдемо δ: $\delta \neq 0$.

Якщо повернути осі так, щоб вони мали головні напрями, то коефіцієнти при квадратах змінних у новому рівнянні поверхні будуть коренями характеристичного рівняння і так як δ- інваріант, то $\delta = \delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

Для центральної поверхні жоден корінь характеристичного рівняння не рівний нулю, тобто в канонічному рівнянні центральної квадрики наявні квадрати трьох змінних.

2. Знайдемо Δ.

3. Знайдемо центр квадрики, розв'язавши відповідну систему (3.28).

4. Перенесемо початок координат в центр квадрики. Отримаємо рівняння:

$a_{11}x^{12} + a_{22}y^{12} + \ldots + 2a_{32}x'z' + 2F(x_0; y_0; z_0) = 0$, де $(x_0; y_0; z_0)$ - центр квадрики.

Користуючись інваріантом Δ, можна знайти $2F(x_0; y_0; z_0)$, якщо повернути осі так, щоб вони мали головний напрям: $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + 2F(x_0; y_0; z_0) = 0$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 2F(x_0; y_0; z_0) = \delta 2F(x_0; y_0; z_0).\ 2F(x_0; y_0; z_0) = \frac{\Delta}{\delta}$$

Остаточно, при перенесенні початку координат в центр поверхні рівняння поверхні набере вигляду:

$$a_{11}x^{12} + a_{22}y^{12} + \ldots + 2a_{32}x'y' + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \qquad (3.44)$$

5. Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння.

6. Знайдемо корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

7. Знайдемо головні напрямки $\overrightarrow{p_1}; \overrightarrow{p_2}; \overrightarrow{p_3}$.

8. Користуючись головними напрямками, знайдемо орти нової системи координат:

$$\vec{i}'\left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}};\frac{m_1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}};\frac{n_1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}\right) \qquad (3.45)$$

$$\vec{j}'\left(\frac{l_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}};\frac{m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}};\frac{n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}\right) \qquad (3.46)$$

$$\vec{k}'\left(\frac{l_3}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}};\frac{m_3}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}};\frac{n_3}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}\right) \qquad (3.47)$$

За координатами нових ортів запишемо формули повороту осей.

$$x'=\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}x''+\frac{l_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}y''+\frac{l_3}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}z'' ;$$

$$y''=\frac{m_1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}x''+\frac{l_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}y''+\frac{m_3}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}z'';$$

$$z'=\frac{n_1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}x''+\frac{n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}y''+\frac{n_3}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}z''.$$

Ці формули підставимо у рівняння поверхні і отримаємо її канонічне рівняння.

II . Поверхня з безліччю центрів

$\delta=0$, система рівнянь $\begin{cases} Fx=0, \\ Fy=0, \\ Fz=0. \end{cases}$ має безліч розв'язків.

Тут можливі два випадки.

а) пряма центрів,

б) площина центрів.

На прямій чи площині центрів візьмемо довільну точку M_0.

$M_0(0;y_0;z_0)$– на прямій, $M_0(0;0;z_0)$– на площині.

Перенесемо початок координат в цю точку. Отримаємо рівняння:

$$a_{11}x'^2+...+2a_{23}y'z'+2F(M_0)=0$$

Як і в попередньому випадку: знаходимо головні напрями, нові орти формули повороту.

III. Поверхня без жодного центра

$\delta = 0$, rang $A \neq$ rang B системи $\begin{cases} Fx = 0, \\ Fy = 0, \\ Fz = 0. \end{cases}$

Перший крок: заходимо головні напрями, координати нових ортів, виконуємо поворот системи координат.

Другий крок: виділяємо повні квадрати і знаходимо точку, в яку треба перенести початок координат, щоб позбутися лінійних членів, яких можна (так як це робили при зведенні до канонічного виду рівняння параболи).

Розв'язання задач

3.3.1. *Поверхня задана рівнянням* $4x^2+6y^2+4z^2+4xz+4yz-8y-4z+3=0$. *Обчислити* δ, Δ *Fx, Fy, Fz.*

Розв'язання. Підставляючи значення коефіцієнтів a_{ij} $(i=\overline{1,4},\ j=\overline{1,4})$, за формулами (3.26), (3.27) обчислимо:

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 56; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

за формулами (3.26) запишемо

$F_x = 4x + 2z$,

$F_y = 6y + 2z - 4$,

$F_z = 2x + 2y + 4z - 2$.

7.3.2. *Знайти дотичні площини до поверхні*

$4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z = 0$, *які паралельні площині* $\pi: x + 2y + z = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини у вигляді (3.30) $(4x_0 + 2z_0)(x - x_0) + (6y_0 - 4)(y - y_0) + (2x_0 + 4z_0 - z)(z - z_0) = 0$.

Так як ця площина паралельна π, то коефіцієнти при змінних пропорційні, тобто: $\frac{A}{1}=\frac{B}{2}=\frac{C}{1}$. Отримаємо $\frac{4x_0+2z_0}{1}=\frac{6y_0-4}{2}=\frac{2x_0+4z_0-z}{1}=t$

Звідси $\begin{cases} 4x_0+2z_0=t \\ 6y_0-4=t \\ 2x_0+4z_0-z=t \end{cases}$ або $\begin{cases} x_0=\dfrac{t-2}{6} \\ y_0=\dfrac{2t+4}{6} \\ z_0=\dfrac{t+4}{6} \end{cases}$.

Підставимо ці значення в задане рівняння поверхні, отримаємо квадратне рівняння, звідки $t=\pm 1$. Значить, маємо дві точки дотику :

$M_{01}\left(\frac{-1}{6};1;\frac{5}{6}\right)$ і $M_{02}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

Підставимо координати цих точок дотику у рівняння шуканої площини, отримаємо дві дотичні площини.

Отже, шукані площини мають рівняння: π_1: 3x+6y+3z-8=0 та

π_2: 3x+6y+3z+2=0.

3.3.3. *Для поверхні* $6x^2+9y^2+z^2+4xz+6yz-2y-4z-3=0$ *знайти діаметральну площину, паралельну* $\pi: x+3y-z+5=0$

Розв'язання. Виясним чи поверхня центральна і чи не розпадається, обчисливши δ і Δ.

$$\delta=\begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=9\neq 0$$ - поверхня центральна,

$$\Delta=\begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-29$$ – не розпадається (дійсний еліпсоїд).

Щоб записати рівняння площини, нам потрібно знати l, m, n. Скористаємось тим, що шукана площина паралельна даній.

Тобто $$\pi : \frac{6l+3m-2n}{1} = \frac{3l+9m}{3} = \frac{-2l+n}{-1}.$$

Тоді $\underbrace{(6l+3m-2n)}_{A}x + \underbrace{(3l+9m)}_{B}y + \underbrace{(-2l+n)}_{C}z=0$. Запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3(6l+3m+2n) = 3l+9m; \\ -3l-9m = -6l+3n. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 15l-n=0, \\ l-3n-n=0 \end{cases}.$$

Звідки $$\begin{cases} m = \frac{5}{2}l \\ m = -\frac{2}{2}l \end{cases}$$

Можемо записати відношення $\ell : m : n = 2 : -1 : 5$.

Отже, рівняння площини $\pi_1 : x+3y-z-1=0$.

3.3.4. *Записати рівняння діаметра, спряженого з діаметральною площиною із задачі* **3.3.3.**

Розв'язання*:* Оскільки $L: m: n = 2:(-1): 5$, то залишилось знайти центр поверхні, розв'язавши систему: $\begin{cases} 6x+3y-2z=0 \\ 3x+9y-1=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$. Звідси $0^1(-\frac{1}{3};\frac{2}{9};-\frac{2}{5})$

Отже, рівняння діаметра, спряженого з даною площиною: $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{2} = \dfrac{y-\frac{2}{9}}{-1} = \dfrac{z-\frac{2}{5}}{5}$.

3.3.5 *Поверхня задана рівнянням*

$$7x^2+6y^2+5z^2-4yz-4xz-6x-4z-24y+18z+30=0.$$

Знайти її головні напрями і головні осі.

Розв'язання. Обчислимо спочатку

$$\delta=\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}=162, \quad \Delta=\begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & -2 & -12 \\ 0 & -2 & 5 & 9 \\ -3 & -12 & 9 & 30 \end{vmatrix}= -6*162.$$

Знайдемо центр, розв’язавши систему:

$$\begin{cases} 7x-2y-6=0, \\ -2x+6y-2z-12=0 \\ -2y+5z+9=0; \end{cases}$$

Звідси $0'(1; 2; -1)$. Знайдемо головні напрями:

а) запишемо і розв’яжемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0$$

Звідки $\lambda^3+\lambda^2-\lambda\,162=0$.

Розв’язками цього рівняння є: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$

б) підставимо по черзі ці значення λ в систему (3.42), яка для нашого випадку

має вигляд:
$$\begin{cases} (7-\lambda)l-2m=0, \\ -2l+(6-\lambda)-2n=0, \\ -2m+(5-\lambda)n=0. \end{cases}$$

Для $\lambda_1=3$:
$$\begin{cases} 4l-2m=0, \\ -2l+3m-2n=0, \\ -2m+2n=0; \end{cases} \quad \text{Звідки } \overrightarrow{p_1}\ (1;2;2)$$

Аналогічно, $\lambda_2=6$:
$$\begin{cases} l-2m=0, \\ -2l-2n=0, \\ -2m-n=0; \end{cases}$$

Звідки $\overrightarrow{p_2}$ (2;1;-2).

$\overrightarrow{p_3}$ (2;-2;1) знаходимо із системи для $\lambda_3=9$.

Отже, рівняння головних осей.

$\mathcal{L}_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{2}$

$\mathcal{L}_2 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$

$\mathcal{L}_3 : \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$

3.3.6. *Звести до канонічного виду рівняння поверхні*

$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$

Розв'язання. Обчислимо δ і Δ: $\delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162$ - поверхня є центральною. $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & 2 & -12 \\ 0 & -2 & 5 & 9 \\ -3 & -12 & 9 & 30 \end{vmatrix} = 2604$

Знайдемо центр, розв’язавши систему:

$$\begin{cases} 7x \quad -2y - 3 = 0, \\ -2x + 6y + 2z - 12 = 0, \\ -2y + 5z + 9 = 0. \end{cases}$$

Звідки $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$. Тобто центр поверхні $O'(1;2;-1)$.

Рівняння відносно центра матиме вигляд: $7x'^2 + 6y'^2 + 5z'^2 - 4y'z' - 4x'y' - 6 = 0$, так як $\Delta/\delta = \dfrac{-6\cdot 162}{162} =$- 6.

Запишемо характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$, тобто $-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda +`162 = 0$. Звідки $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 9$.

Запишемо систему для визначення головних напрямів:

$$\lambda = 3: \qquad \begin{cases} 4\ell - 2m = 0, \\ -2\ell + 3m - 2n = 0, \\ \quad -2m + 2n = 0. \end{cases}$$

Звідси $m = 2\ell,\ n = 2\ell$. Тоді $\overrightarrow{p_1}$ (1;2;2), $\vec{i}=(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3})$.

$$\lambda = 6: \qquad \begin{cases} \ell - 2m = 0, \\ -2\ell - 2n = 0, \\ -2m - n = 0. \end{cases}$$

Звідси $\overrightarrow{p_2}$ (2;1;-2), $\vec{j}=(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{-2}{3})$

$$\lambda = 9: \qquad \begin{cases} -2\ell - 2m = 0, \\ -2\ell - 3m - 2n = 0, \\ -2m - 4n = 0. \end{cases}$$

Звідси $\overrightarrow{p_3}$ (2;-2;1), $\vec{k}=(\frac{2}{3};\frac{-2}{3};\frac{1}{3})$

Запишемо формули повороту:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x'' + 2y'' + 2z''), \\ y' = \frac{1}{3}(2x'' + y'' - 2z''), \\ z' = \frac{1}{3}(2x'' - 2y'' + z''). \end{cases}$$

Підставимо ці значення у рівняння поверхні відносно центра. Виконавши перетворення, отримаємо рівняння:

$3x''^2 + 6y''^2 + 9z''^2 - 6 = 0$ або $\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{1} + \frac{z''^2}{\frac{2}{3}} = 1$.

3.3.7, *Дослідити і спростити рівняння поверхні:*

$$4x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 2yz - 2y + 2z - 4 = 0;$$

Розв’язання. Знайдемо δ: $\delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, отже, поверхня нецентральна.

Дослідимо, має вона лінію центрів або площину центрів чи не має жодного центра. Для цього складемо систему рівнянь для знаходження центра поверхні:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0; \\ -2x + 2y - z - 1 = 0; \\ -y + z + 1 = 0, \end{cases}$$

Звідси основна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

та розширена

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

мають ранги: $r(A) = r(B) = 2$ тобто маємо поверхню з лінією центрів:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0; \\ -2x + 2y - z - 1 = 0; \end{cases}$$

Якщо перенести початок координат а один з центрів, хоча а б у точку $O_1(0;0;-1)$, і осі координат сумістити з головними напрямами, то рівняння даної поверхні запишеться так:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \lambda_3 z'^2 + 2F(a,b,c) = 0,$$

Де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$— корені характеристичного рівняння, а a,b,c— координати центра. Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ або $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 9\lambda = 0$, звідки $\lambda_3 = 0, \lambda_1 = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2}, \lambda_2 = \dfrac{7\sqrt{13}}{2}$

Спрощене рівняння поверхні: $\frac{7+\sqrt{13}}{2}x'^2+\frac{7-\sqrt{13}}{2}y'^2-5=0$

Це є рівняння еліптичного циліндра, твірна якого паралельна осі oz.

Рекомендована література

[2] Ч. III, Р. VIII, § 162-165, Ч.IV, Р.VIII, § 205-210, [4] Гл. VIII, §2-5

Завдання для самостійного розв'язання

3.1. Знайти діаметральну площину поверхні $x^2+2y^2-z^2-2xy-2yz-2xz-4x-1=0$, паралельну площині $x+y+z=0$.

3.2. Записати рівняння діаметральної площини поверхні $x^2+2y^2-z^2-2xy-2yz+2xz-4x-1=0$, яка проходить через точки $O(0;0;0)$ і $M(1;1;0)$, і знайти вектор, паралельний спряженим їй хордам.

3.3. Записати рівняння діаметральної площини, спряженої до прямої, паралельної до площини oxy поверхні $x^2-xy+2yz+x-z=0$, яка проходить через точку (1;1;1)

3.4. Записати рівняння площин , спряжених діаметру x=1, y=z поверхні $x^2+y^2+z^2-2yz-2x-y+1=0$.

3.5. Записати рівняння діаметра поверхні $4x^2+6y^2+4z^2+4xz+8y-4z+3=0$, паралельного осі oy.

3.6. Знайти центр лінії перетину поверхні $x^2+5y^2+z^2+2xy+2xz+2yz+2x+6y+2z=0$ з площиною $x+2y+z-1=0$.

3.7. Довести, що площина $x+y+2z+5=0$ перетинає поверхню $z^2-2xy-4x-2y+2z-3=0$ по парі прямих, і знайти рівняння цих прямих.

3.8. Знайти прямолінійні твірні поверхні $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-yz+4x+3y-5z+4=0$, які проходять через точку (–1;–1;1) поверхні.

3.9. Знайти дотичну площину до поверхні $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0$, паралельну площині $x+2y+2=0$.

3.10. Через пряму $4x-5y=0,\ z-1=0$ провести площину, дотичну до поверхні $2x^2+5y^2+2z^2-2xy+6z-4x-y-2z=0$.

Визначити вид і розміщення поверхні, користуючись перетвореннями повороту і перенесення або групуванням членів у рівнянні поверхні:

3.11. $x^2+2xy+y^2-z^2=0$;

3.12. $z=x^2+2xy+y^2+1$;

3.13. $z^2=x^2+2xy+y^2+1$;

3.14. $2xy+z^2-2z+1=0$;

3.15. $x^2+y^2-z^2-2xy+2z+1=0$;

3.16. $2xy+2x+2y+2z-1=0$;

3.17. $x^2+y^2+2z^2+2xy+4z=0$;

3.18. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0.$

3.19. $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0.$

3.20. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8zx-4yz-14x-4y+14z+16=0.$

3.21. $5x^2-y^2+z^2+4xy+6xz+2x+4y+6z-8=0.$

Звести до канонічного виду рівняння поверхонь другого порядку і записати формули перетворення:

3.2.. $3x^2+2y-4z=0$.

3.23. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-12=0$.

$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{2}{\sqrt{6}}y'$, $z=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{6}}y'-\frac{1}{\sqrt{2}}z'$.

3.24. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-24=0$.

3.25. $5x^2+5y^2+3z^2+8xy-9=0$.

3.26. $x^2-6y^2+2z^2-2x+12y+4z+9=0$.

3.27. $3x^2-2z^2+12x-2y+4z+6=0$.

3.28. $y^2+2z^2-4y+12z+10=0$.

3.29. $2x^2+y^2+4z^2-4x+6y+16z-1=0$.

3.30. $x^2+2z^2-6x+4y+8z+13=0$.

3.31. $2x^2+3y^2-4x+12y-12z+2=0$.

3.32. $x^2-2z^2+6x+4y+4z+3=0$.

3.33. $x^2-y^2+z^2-2x+4y-3=0$.

3.34. $x^2-3y^2+10x+12y+13=0$.

3.35. $5x^2+10y^2+2z^2-40y+50=0$.

3.36. $5x^2+3y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz+4x+8y+12z-4=0$.

3.37. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz+8x+4y-5=0$.

3.38. $2xz+4x+6y+8z-2=0$.

3.39. $6x^2+4y^2+5z^2+4xz-4yz+4x+4y+6z-27=0$.

3.40. $5x^2+5y^2+8xy-4xz+4yz-36x+36y-18z-18=0$

3.41. $4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz+8x-4y+8z=0$

3.42. $5y^2-2x+10y-4z+1=0$.

3.43. $3x^2+2yz-6x+4y-4z+1=0$.

3.44. $2x^2-3y^2+2z^2-8xz-2yz+4x-6y+8z-\dfrac{35}{3}=0$.

3.45. Визначити точки перетину поверхні другого порядку $x^2-2xy+2z^2+xz-x-y=0$ з прямою $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-3}{4}$.

3.46. Дана поверхня другого порядку $x^2-3xy+xz+y^2-x-2y+1=0$. Вияснити, які з векторів $\vec{a}(1;0;0)$, $\vec{b}(2;2;2)$, $\vec{c}(1;2;0)$, $\vec{d}(0;0;5)$ мають асимптотичні напрями відносно даної поверхні.

3.47. Знайти прямолінійні твірні поверхні $x^2+y^2+z^2=1$, які проходять через точку (1;1;1).

3.48. Знайти прямолінійні твірні поверхні $x^2+y^2+z^2-2xz-yz+4x+3y-5z+4=0$, які проходять через точку (-1;-1;1).

3.49. Нехай поверхня задана рівнянням $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{14}x + 2a_{34}z + a_{44} = 0$.

Знайти умови, при яких ця поверхня:

а) має тільки однин асимптотичний напрям, що співпадає з напрямом осі Оx;

б) Немає асимптотичних направлень.

3.50. Знайти рівняння діаметральної площини поверхні $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy - 4xz - 2y - 3 = 0$, яка паралельна площині $x + 3y - z + 5 = 0$.

3.51. Знайти центр наступних поверхонь другого порядку:

а) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz + 2x - 6y - 2z = 0$;

б) $3x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 4yz - 4x - 8z - 8 = 0$;

в) $2x^2 + 12y^2 + 4z^2 + 8xy - 4xz + 12yz - 10x + 14z + 7 = 0$.

3.52. Знайти геометричне місце центрів та визначити тип кожної з даних поверхонь другого порядку:

а) $9x^2 + 5y^2 + 9z^2 - 12xy - 6yz + 12y - 36z = 0$;

б) $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y - 8z - 1 = 0$;

в) $x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xz - 2yz = 0$;

г) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy - 4xz - 4yz + 5x + 5y - 5z + 2 = 0$.

3.53. Звести до канонічного виду рівняння таких центральних поверхонь:

а) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z - 3 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0$;

в) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$.

3.54. Знайти ті прямолінійні твірні поверхні $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2yz - 2zx - 12 = 0$, які паралельні прямій $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

3.55. Через пряму $4x - 5y = 0$, $z - 1 = 0$ провести площину, яка дотикається до поверхні $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 6yz - 4x - y - 2z = 0$.

3.56. Знайти головні осі поверхні

$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2zx + 2yz - 6x + 6y - 6z + 9 = 0$.

3.57. Знайти головні діаметральні площини поверхні $x^2+y^2-3z^2-6yz-6zx-2xy+2x+2y+4z=0$.

3.58. Звести рівняння поверхні до канонічного виду $5x^2+8y^2+5z^2+4xy-8zx+4zy-27=0$.

3.59. Спростити рівняння поверхні $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2zx+2yz-4x+6y-2z+3=0$.

3.60. Записати рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох прямих, які перетинаються: $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$; $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$. Дослідити отримане рівняння.