УДК 517.5

К.В. Соліч (Інститут математики НАН України, Київ)
K.V. Solich

Найкращі білінійні наближення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій багатьох змінних

Best bilinear approximations of classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ of periodic functions of many variables

Одержано точні за порядком оцінки найкращих білінійних наближень класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p, q, θ.

Получены точные по порядку оценки наилучших билинейных приближений классов $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q для некоторых соотношений между параметрами p, q, θ.

We are obtained exact-order estimates of the best bilinear approximations of classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ of periodic functions of many variables in the space L_q for some relations between parameters p, q, θ.

Вступ. Робота присвячена дослідженню найкращих білінійних наближень періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q при деяких співвідношеннях між праметрами p, q, θ. Вона складається зі вступу та двох пунктів. У вступі наводяться необхідні позначення і дається означення класів, що досліджуються. Перший пункт має допоміжний характер. В ньому, зокрема, формулюється та доводиться теорема про оцінки найкращих M–членних тригонометричних наближень. Отримані результати використовуються у другому пункті для встановлення оцінок зверху найкращих білінійних наближень функцій $2d$ змінних вигляду $f(x-y)$, $x, y \in \pi_d$, що породжуються з функцій $f(x) \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$.

Наведемо необхідні означення та позначення.

Нехай $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, означає d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi;\pi]$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p, $1 \leq p < \infty$, (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$) функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$. Норма в цьому просторі визначається наступним чином:

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Підмножину функцій $f \in L_p(\pi_d)$, для яких виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1,d},$$

позначимо через $L^\circ_p(\pi_d)$.

Означимо простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B \subset L_p(\pi_d)$, властивості яких визначаються за допомогою: $\Omega(t)$, $t = (t_1, ..., t_d) \in \mathbb{R}^d_+$, — мажорантної функції для мішаного модуля неперервності l–го порядку ($l \in \mathbb{N}$) функції $f \in L_p(\pi_d)$; числових параметрів p і θ, $1 \leq p, \theta \leq \infty$.

Отже, для довільної функції $f \in L_p(\pi_d)$ покладемо

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=\overline{1,d}}} \|\Delta^l_h f(\cdot)\|_p$$

— мішаний модуль неперервності порядку l функції f, де $\Delta^l_h f(x) = \Delta^l_{h_d} ... \Delta^l_{h_1} f(x) = \Delta^l_{h_d}(...(\Delta^l_{h_1} f(x)))$, $h = (h_1, ..., h_d)$, - мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j, $j = \overline{1,d}$, і

$$\Delta^l_{h_j} f(x) = \sum_{n=o}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + n h_j, x_{j+1}, ... x_d).$$

Нехай далі $\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє наступні умови:

1) $\Omega(t)>0$, $t_j>0$, $j=\overline{1,d}$; $\Omega(t)=0$, $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j=0$;

2) $\Omega(t)$ неперервна на $\mathbb{R}_+^d$;

3) $\Omega(t)$ неспадає по кожній змінній $t_j\ge 0$, $j=\overline{1,d}$, при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i\neq j$;

4) $\Omega(m_1t_1,...,m_dt_d)\le C\left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j\right)^l\Omega(t)$, $m_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,d}$, $C>0$ — деяка стала.

Множину таких функцій Ω позначимо через $\Psi_{l,d}$. У випадку $d=1$ пишемо — Ψ_l. Зауважимо, що якщо $f\in L_p(\pi_d)$, то $\Omega_l(f,\cdot)\in\Psi_{l,d}$.

Підпорядкуємо функції $\Omega\in\Psi_{l,d}$ додатковим умовам, які опишемо в термінах двох понять, запроваджених С.Н. Бернштейном [1]:

а) невід'ємна функція $\varphi(\tau)$, $\tau\in[0;\infty)$ майже зростає, якщо існує стала $C_1>0$ така, що $\varphi(\tau_1)\le C_1\varphi(\tau_2)$, для будь-яких τ_1,τ_2, $0\le\tau_1<\tau_2$;

б) додатна функція $\varphi(\tau)$, $\tau\in(0;\infty)$ майже спадає, якщо існує стала $C_2>0$ така, що $\varphi(\tau_1)\ge C_2\varphi(\tau_2)$, для будь-яких τ_1,τ_2, $0<\tau_1<\tau_2$.

Нехай $d=1$ і $\Omega\in\Psi_l^{(1,2)}$, тобто для $\Omega(t)$, $t\ge 0$, виконуються, принаймі, умови 1) і 2).

Будемо писати:

i) $\Omega\in S^\alpha$ $(\alpha>0)$, якщо функція $\frac{\Omega(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при $\tau>0$;

ii) $\Omega\in S_l$, якщо існує γ, $0<\gamma<l$, таке, що функція $\frac{\Omega(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при $\tau>0$.

Умови належності функції Ω до множин S^α і S_l часто називають в літературі умовами Барі-Стєчкіна [2].

При $d>1$ для функції $\Omega\in\Psi_{l,d}^{(1,2)}$ будемо вважати, що $\Omega\in S^\alpha$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_d)$, $\alpha_j>0$, $j=\overline{1,d}$ (відповідно $\Omega\in S_l$, $l\in\mathbb{N}$), якщо $\Omega(t_1,...,t_d)$ як функція змінної t_j, $j=\overline{1,d}$, при будь-яких значеннях інших змінних t_i, $i\neq j$, належить до множини S^{α_j} (відповідно S_l).

Покладемо також $\Phi_{\alpha,l}^d=\Psi_{l,d}\cap S^\alpha\cap S_l$.

Отже, нехай $1\le p,\theta\le\infty$ і $\Omega\in\Phi_{\alpha,l}^d$. Тоді

$$S_{p,\theta}^\Omega B=\left\{f\in L_p(\pi_d):|f|_{S_{p,\theta}^\Omega B}<\infty\right\},$$

де напівнорма $|f|_{S_{p,\theta}^\Omega B}$ визначається співвідношенням

$$|f|_{S_{p,\theta}^\Omega B}=\begin{cases}\left(\int\limits_{\pi_d}\left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}\right)^\theta\prod\limits_{j=1}^{d}\frac{dt_j}{t_j}\right)^{1/\theta}, & 1\le\theta<\infty,\\ \sup\limits_{t\ge 0}\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta=\infty.\end{cases}\tag{1}$$

Визначимо норму в просторі $S_{p,\theta}^\Omega B$ наступним чином

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^\Omega B}:=\|f\|_p+|f|_{S_{p,\theta}^\Omega B},\quad 1\le p,\theta\le\infty.$$

Наведене означення просторів $S_{p,\theta}^\Omega B$ (з незначною модифікацією) взяте із роботи [3]. При $\theta=\infty$ простори $S_{p,\theta}^\Omega B$ (з позначенням $S_p^\Omega H$) запроваджені і вивчались в роботі [4].

Шкала просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ є природнім узагальненням шкали просторів Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}$, $r=(r_1,...,r_d)$, $r_j>0$, $j=\overline{1,d}$, (див., наприклад, [5]) і $S^{\Omega}_{p,\theta}B \equiv B^r_{p,\theta}$ при $\Omega(t)=\prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j<l$, $j=\overline{1,d}$, (зазначимо, що при $\theta=\infty$, $B^r_{p,\theta}$ — це простори Нікольського H^r_p [6]).

В наступних міркуваннях ми будемо використовувати порядкові співвідношення. Запис $A \asymp B$ означає двохсторонню нерівність між виразами A і B, тобто $C_3B \le A \le C_4B$, де $C_3,\ C_4>0$— сталі, значення яких можуть бути різними в різних місцях. Також, якщо $A \le C_5B$, $C_5>0$, та $A \ge C_6B$, $C_6>0$, будемо писати $A \ll B$ і $A \gg B$ відповідно. Із контексту буде зрозуміло, від яких параметрів ці сталі не залежать. Ми не будемо акцентувати на цьому увагу щоразу при використанні символів "$\asymp$", "$\ll$", "$\gg$".

Сформулюємо необхідні при доведенні одержаних у роботі результатів відомі твердження, що стосуються еквівалентного зображення норми $\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B}$ функцій $f\in S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1\le p,\theta\le\infty$, $\Omega\in\Phi^d_{\alpha,l}$.

Ці зображення подаються в термінах визначеного порядку росту p-норм деяких тригонометричних поліномів, які будуються на основі розкладу функції $f\in L_p(\pi_d)$ в ряд Фур'є за тригонометричною системою.

Отже, нехай $f\in L_p(\pi_d)$ і

$$\delta_s(f,x)=\sum_{k\in\rho(s)}\hat f(k)e^{i(k,x)},\quad (k,x)=k_1x_1+...+k_dx_d,$$

де $\hat f(k)=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d} f(t)e^{-i(k,t)}dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f і для кожного вектора $s=(s_1,...,s_d)$, $s_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,d}$,

$$\rho(s):=\{k=(k_1,...,k_d)\in\mathbb{Z}^d: 2^{s_j-1}\le|k_j|<2^{s_j},\ j=\overline{1,d}\}.$$

В роботі [3] встановлено, що при $1<p<\infty$, $1\le\theta\le\infty$, $\Omega\in\Phi^d_{\alpha,l}$ для $f\in S^{\Omega}_{p,\theta}B\cap L^{\circ}_p(\pi_d)$

$$\|f\|_{SB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_s \Omega(2^{-s})^{-\theta}\|\delta_s(f,\cdot)\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta}, & 1\le\theta<\infty,\\ \sup\limits_s \frac{\|\delta_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta=\infty,\end{cases} \tag{2}$$

де $\Omega(2^{-s})=\Omega(2^{-s_1},...,2^{-s_d})$, $s_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,d}$.

Як бачимо, таке зображення норми не охоплює випадки $p=1$ і $p=\infty$. Деяка модифікація правої частини (2) дозволяє встановити подібне зображення і в цих випадках. Для цього введемо необхідні позначення.

Нехай

$$V_n(t)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kt+2\sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(\frac{2n-k}{n}\right)\cos kt$$

— ядро Валле–Пуссена порядку $2n$ і в точці $x = (x_1, ..., x_d)$

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)), \quad s = (s_1, ..., s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1, d}. \tag{3}$$

Якщо $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, то покладемо

$$A_s(f, x) := f * A_s.$$

В роботі [7] встановлено, що при $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ і $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$ для $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d)$ має місце співвідношення

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_{s} \Omega(2^{-s})^{-\theta} \|A_s(f, \cdot)\|^{\theta}_p \right)^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \tag{4}$$

і відповідно в [4] при $\theta = \infty$ —

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_{s} \frac{\|A_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \tag{5}$$

В подальшому, в формулюваннях тверджень задіяні простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ у випадку, коли функція Ω має спеціальний вигляд

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j \right), \quad \omega \in \Phi^1_{\alpha,l}, \ \alpha > 0. \tag{6}$$

Отже, тут $\omega(\cdot)$ — довільна функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l і $\omega \in \Phi^1_{\alpha,l}$. Згідно попередніх означень зрозуміло, що

$$\omega \in \Phi^1_{\alpha,l} \Longrightarrow \Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}, \quad \alpha = (\underbrace{\alpha, ..., \alpha}_{d}).$$

Зауважимо, що до множини $\Phi^1_{\alpha,l}$, $l \in \mathbb{N}$, належить, наприклад, функція

$$\omega(u) = \begin{cases} \frac{u^r}{(\log^+ \frac{1}{u})^{\beta}}, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases}$$

де $\log^+ \tau = \max\{1, \log \tau\}$, $0 < r < l$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Надалі, для одиничної кулі в просторі $S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d)$ будемо використовувати те ж позначення, що і для самого простору $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, тобто

$$S^{\Omega}_{p,\theta}B := \{f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d) \ : \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \leq 1\}.$$

1. Допоміжні твердження. В цьому пункті наведемо деякі допоміжні твердження, які будемо використовувати при доведенні основних результатів. Спочатку встановимо точні за порядком оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень функцій з класів $S^{\Omega}_{\infty,\theta}B$.

Для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, покладемо

$$e_M(f)_q := \inf_{k^j,\ c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,\cdot)} \right\|_q, \tag{7}$$

де $\{k^j\}_{j=1}^M$ — система векторів $k^j = (k_1^j, ..., k_d^j)$ з цілочисловими координатами, c_j — довільні комплексні числа. Величину (7) називають найкращим M-членним тригонометричним наближенням функції f в просторі L_q. Якщо $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас, то позначимо

$$e_M(F)_q := \sup_{f \in F} e_M(f)_q. \tag{8}$$

Величина $e_M(f)_2$ для функції однієї змінної була введена С.Б. Стєчкіним [8] при формулюванні критерію абсолютної збіжності тригонометричних рядів. Пізніше величини $e_M(f)_q$ і $e_M(F)_q$ досліджувалися вже з точки зору апроксимації. Зокрема поведінка величини (8) для деяких класів функцій багатьох змінних досліджувалась в роботах [9] і [10], де можна ознайомитись з більш детальною бібліографією в цьому напрямі. Зазначимо також, що поведінка величин найкращих M-членних наближень класів $S_{p,\theta}^{\Omega}B$, які розглядаються у даній роботі, вивчалась в [11]-[13].

Для $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, означимо величину

$$e_M^{\perp}(f)_q := \inf_{k_j} \| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} \hat{f}(k^j) e^{i(k^j,\cdot)} \|_q,$$

яка називається найкращим M-членним ортогональним тригонометричним наближенням функції f у просторі L_q. Якщо $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_M^{\perp}(F)_q := \sup_{f \in F} e_M^{\perp}(f)_q. \tag{9}$$

Згідно з означеннями величини (8) та (9) пов'язані наступним співвідношенням

$$e_M(F)_q \le e_M^{\perp}(F)_q. \tag{10}$$

Теорема A. (Літтлвуда-Пелі, див., наприклад, [6, с. 65]). *Нехай задано* $1 < p < \infty$. *Існують додатні числа* C_7, C_8 *такі, що для кожної функції* $f \in L_p(\pi_d)$ *виконуються співвідношення*

$$C_7 \|f\|_p \le \left\| \left\{ \sum_s |\delta_s(f;\cdot)|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \le C_8 \|f\|_p. \tag{11}$$

З нерівностей (11) легко отримується (див., наприклад, [14, с. 17]) співвідношення

$$\|f\|_p \ll \left\{ \sum_s \|\delta_s(f;\cdot)\|_p^{p_0} \right\}^{1/p_0}, \tag{12}$$

де $p_0 = \min\{2; p\}$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $1 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}^{d}$, $\alpha > \max\{0; \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\}$. *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце порядкова рівність*

$$e_M(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q \asymp e_M^{\perp}(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{13}$$

Доведення. Оцінку зверху для $e_M(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q$ отримаємо внаслідок нерівності (10), вкладення $S_{\infty,\theta}^{\Omega}B \subset S_{p,\theta}^{\Omega}B$, $1 \leq p < \infty$, та встановленої в [15] оцінки зверху для $e_M^{\perp}(S_{p,\theta}^{\Omega}B)_q$, $1 < q \leq p < \infty$, $p \geq 2$. В результаті одержимо

$$e_M(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q \leq e_M^{\perp}(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q \leq e_M^{\perp}(S_{p,\theta}^{\Omega}B)_q \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

В роботі [12] було встановлено порядкове співвідношення

$$e_M(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q \gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})},\ 1 < q \leq 2,\ 1 \leq \theta \leq \infty, M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Тому, враховуючи властивість монотонності норми $\|\cdot\|_q$ по параметру $1 \leq q < \infty$, маємо

$$e_M(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_q \geq e_M(S_{\infty,\theta}^{\Omega}B)_2 \gg \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}, M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Теорема доведена.

Зауваження 1. Результати теореми 1 доповнюють оцінки, отримані в роботах [12], [13].

2. Найкращі білінійні наближення. Означимо величину, яка буде досліджуватись в даному пункті роботи.

Нехай $L_q(\pi_{2d})$, $q = (q_1, q_2)$ — множина функцій $f(x,y)$, $x, y \in \pi_d$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} = \|\ \|f(\cdot,y)\|_{q_1}\|_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}(\pi_d)$ по змінній $x \in \pi_d$, а потім від результату — по змінній $y \in \pi_d$ в просторі $L_{q_2}(\pi_d)$. Для $f \in L_q(\pi_{2d})$ означимо найкраще білінійне наближення порядку M:

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} := \inf_{u_j(x), v_j(y)} \|f(x,y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x) v_j(y)\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_j \in L_{q_2}(\pi_d)$.

Якщо $F \subset L_q(\pi_{2d})$ — клас функцій, то покладемо

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}. \tag{14}$$

Метою цього пункту роботи є отримання точних за порядком оцінок величини

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,q_2} = \sup_{f\in S^{\Omega}_{p,\theta}B} \tau_M(f)_{q_1,q_2},$$

де білінійні наближення $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ розглядаються для функцій вигляду $f(x-y)$, $x,y\in\pi_d$.

Зазначимо, що класичний результат про білінійні наближення належить Шмідту [17]. В дещо більш загальній, ніж в [17], формі цей результат сформульовано В.М. Темляковим в роботі [9, с. 10].

Лема A. *Нехай* $\|K(x,y)\|_{2,2}<\infty$, $K-$ *інтегральний оператор з ядром* $K(x,y)$, K^* — *оператор, спряжений до оператора* K, *і* λ_j — *незростаюча послідовність власних чисел оператора* K^*K. *Тоді*

$$\inf_{u_i(x),v_i(y)} \Big\|K(x,y)-\sum_{i=1}^{M}u_i(x)v_i(y)\Big\|_{2,2} = \Big(\sum_{j=M+1}^{\infty}\lambda_j\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Дослідженню величини (14), де в якості F виступають класи $\mathrm{W}^r_{p,\alpha}$ і H^r_p присвячені праці В.М. Темлякова [9], [18]-[20], в яких можна знайти відповідну бібліографію. Що стосується білінійних наближень класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$, то вони досліджувалися у роботах А.С. Романюка, В.С. Романюка [16] і А.С. Романюка [21].

Отримані результати будемо коментувати, співставляючи їх з оцінками колмогоровських поперечників.

Нагадаємо, що M-вимірним колмогоровським поперечником центрально-симетричної множини Φ банахового простору $\mathcal{X}$ називається величина

$$d_M(\Phi,\mathcal{X}) := \inf_{\mathcal{L}_M}\sup_{f\in\Phi}\inf_{u\in\mathcal{L}_M}\|f-u\|_{\mathcal{X}}, \tag{15}$$

де $\mathcal{L}_M$ — довільний підпростір в $\mathcal{X}$ розмірності M.

Нехай F – деякий клас функцій і $f(x)$ – фіксована функція з F. Позначимо через F_f множину, що складається з функцій вигляду $f(x-y)$, які отримуємо з $f(x)$ зсувами її аргументу x на довільний вектор $y\in\pi_d$. Тоді має місце рівність (див., наприклад, [9, с. 85])

$$\tau_M(f(x-y))_{q_1,\infty} = d_M(F_f, L_{q_1}). \tag{16}$$

Таким чином, якщо функціональний клас F інваріантний відносно зсуву аргументу функції $f\in F$, то згідно з (16) значення величини $\tau_M(f(x-y))_{q_1,\infty}$ можуть слугувати оцінками знизу для колмогоровських поперечників $d_M(F_f, L_{q_1})$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $2\le q_1\le\infty$, $1\le q_2,\theta\le\infty$ *і* $\Omega(t)=\omega(\prod\limits_{j=1}^{d}t_j)$, *де* $\omega\in\Phi^1_{\alpha,l}$, $\alpha>\max\left\{0,\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right\}$. *Тоді для будь-якої послідовності* $M=(M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел* *такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце порядкова рівність*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B)_{q_1,q_2} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{17}$$

Доведення. Оцінки зверху в (17) можна легко отримати як наслідок результатів теореми 1.

З одного боку, згідно з оцінкою

$$e_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B)_{q_1} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})},\ M \asymp 2^n n^{d-1},$$

для довільної функції f з класу $S^{\Omega}_{\infty,\theta}B$ знайдеться множина векторів $k^1, ..., k^M$, $k^j = (k^j_1, ..., k^j_d)$, $k^j \in \mathbb{Z}^d$, $j = \overline{1, M}$, і чисел $c_1, ..., c_M$ таких, що

$$\|f(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)}\|_{q_1} \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{18}$$

З іншого боку, ліву частину (18) можна подати у вигляді

$$\|f(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)}\|_{q_1} = \|f(x-y) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x-y)}\|_{q_1,\infty} =$$

$$= \|f(x-y) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)} e^{-i(k^j,y)}\|_{q_1,\infty}. \tag{19}$$

З (18) і (19) одержимо

$$\|f(x-y) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)} e^{-i(k^j,y)}\|_{q_1,\infty} \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{20}$$

Тепер, поклавши в (20) $c_j e^{i(k^j,x)} = u_j(x)$ і $e^{-i(k^j,y)} = v_j(y)$, отримаємо шукану оцінку зверху величини $\tau_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B)_{q_1,\infty}$ і, як наслідок, величини $\tau_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B)_{q_1,q_2}$.

Перейдемо до доведення в (17) оцінки знизу.

Нехай M — довільне натуральне число, а $n \in \mathbb{N}$ підберемо таким чином, щоб для кількості елементів множини $Q_n = \bigcup\limits_{\|s\|_1=n} \rho(s)$ виконувалось співвідношення $|Q_n| > 4M$. Зауважимо також, що $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Розглянемо функції

$$f_1(x) = C_9 \omega(2^{-n}) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\|s\|_1=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j),\ C_9 > 0,$$

при $1 \le \theta < \infty$ і

$$f_2(x) = C_{10} \omega(2^{-n}) 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{\|s\|_1=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j),\ C_{10} > 0,\ \theta = \infty,$$

де $R_{s_j}(x_j)=\sum\limits_{l=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1}\varepsilon_l e^{ilx}$, $\varepsilon_l=\pm1$, $j=\overline{1,d}$, — поліноми Рудіна-Шапіро, для яких, як відомо, виконується порядкова нерівність $\|R_{s_j}\|_\infty \ll 2^{\frac{s_j}{2}}$ (див., наприклад, [22, с.155]).

Покладемо

$$F_n(x)=\sum_{\|s\|_1=n}\prod_{j=1}^{d}R_{s_j}(x_j).$$

Покажемо, що при деякому значенні сталої C_9 функція f_1 належить класу $S^{\Omega}_{\infty,\theta}B$, $1\le\theta<\infty$, а функція f_2 з деякою сталою C_{10} належить класу $S^{\Omega}_{\infty,\infty}B$. Для цього спочатку знайдемо норму функції F_n у відповідних просторах. При $1\le\theta<\infty$ маємо

$$\|F_n\|_{S^{\Omega}_{\infty,\theta}B}\asymp\left(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(F_n,x)\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta}=$$

$$=\left(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\left\|A_s(x)*\sum_{\|s-s'\|_\infty\le1}\delta_{s'}(F_n,x)\right\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta}\le$$

$$\le\left(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|A_s\|_1^\theta\left\|\sum_{\|s-s'\|_\infty\le1}\delta_{s'}(F_n,x)\right\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta}.$$

Враховуючи, що $\|A_s\|_1\le6$ (див., наприклад, [14, с.35]), продовжимо оцінку.

$$\|F_n\|_{S^{\Omega}_{\infty,\theta}B}\ll\left(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\left\|\sum_{\|s-s'\|_\infty\le1}\delta_{s'}(F_n,x)\right\|_\infty^\theta\right)^{1/\theta}\ll$$

$$\ll\left(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\left(\sum_{\|s-s'\|_\infty\le1}\|\delta_{s'}(F_n,x)\|_\infty\right)^\theta\right)^{1/\theta}=$$

$$=\left(\sum_s\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\left(\sum_{\|s-s'\|_\infty\le1}\left\|\prod_{j=1}^{d}R_{s'_j}(x_j)\right\|_\infty\right)^\theta\right)^{1/\theta}\ll$$

$$\ll\left(\sum_{\|s\|_1\le n}\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\left(\sum_{\|s-s'\|_\infty\le1}2^{\frac{\|s'\|_1}{2}}\right)^\theta\right)^{1/\theta}\ll$$

$$\ll\left(\sum_{\|s\|_1\le n+d}\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})2^{\frac{\|s\|_1\theta}{2}}\right)^{1/\theta}=\left(\sum_{\|s\|_1\le n+d}\frac{\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})}{2^{\alpha\theta\|s\|_1}}2^{\frac{\|s\|_1\theta}{2}}2^{\alpha\theta\|s\|_1}\right)^{1/\theta}\ll$$

$$\ll\frac{\omega^{-1}(2^{-(n+d)})}{2^{\alpha(n+d)}}\left(\sum_{\|s\|_1\le n+d}2^{\|s\|_1\theta(\frac12+\alpha)}\right)^{1/\theta}\asymp$$

$$\asymp\frac{\omega^{-1}(2^{-(n+d)})}{2^{\alpha(n+d)}}2^{(n+d)(\frac12+\alpha)}(n+d)^{\frac{d-1}{\theta}}\asymp\omega^{-1}(2^{-n})2^{\frac n2}n^{\frac{d-1}{\theta}}.$$

Якщо ж $\theta=\infty$, то

$$\|F_n\|_{S^{\Omega}_{\infty,\infty}B}\ll\omega^{-1}(2^{-n})2^{\frac n2}.$$

Цим самим показано, що функції f_1 і f_2 при певних значеннях сталих C_9 і C_{10} належать до класів $S^{\Omega}_{\infty,\theta}B$, $1 \le \theta < \infty$, та $S^{\Omega}_{\infty,\infty}B$ відповідно.

Далі ми будемо використовувати допоміжне твердження.

Лема Б [9, с. 98]. *Нехай задано число M, а число $n \in \mathbb{N}$ таке, що для кількості елементів множини $Q_n = \bigcup\limits_{\|s\|_1=n} \rho(s)$ виконується умова $|Q_n| > 4M$. Тоді для довільної функції*

$$g(x) = \sum_{k \in Q_n} \widehat{g}(k) e^{i(k,x)}$$

такої, що $|\widehat{g}(k)| = 1$, виконується співвідношення

$$\inf_{u_j(x),\ \upsilon_j(y)} \left\| g(x-y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x)\ \upsilon_j(y) \right\|_{2,1} \gg M^{1/2}.$$

Оскільки функція F_n задовольняє умови леми Б, то для $\tau_M(f_1(x-y))_{2,1}$ маємо

$$\tau_M(f_1(x-y))_{2,1} \gg \omega(2^{-n}) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \tau_M(F_n(x-y))_{2,1} \gg$$

$$\gg M^{1/2} \omega(2^{-n}) 2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Провівши подібні міркування для функції f_2, отримаємо

$$\tau_M(f_2(x-y))_{2,1} \gg \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Оцінка знизу і теорема доведені.

Зауваження 2. При $\omega(u) = u^r$, тобто $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^r$, і певних обмеженнях на параметр r з теорем 1 і 2 можна отримати відповідні результати для класів $B^r_{\infty,\theta}$, які встановлено в роботі [16].

Зауваження 3. Співставивши результат теореми 2 з оцінкою колмогоровського поперечника $d_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B, L_{q_1})$ [23], бачимо, що справедливі порядкові рівності

$$\tau_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B, L_{q_1}),$$

при $2 \le \theta < \infty$, та

$$\tau_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B, L_{q_1}) (\log^{d-1} M)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})},$$

при $1 \le \theta < 2$.

Теорема 3. *Нехай $1 \le p \le 2 \le q_1 < \infty$, $1 \le q_2, \theta \le \infty$ і $\Omega(t) = \omega(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j)$, де $\omega \in \Phi^1_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p}$, $l > [\frac{1}{p}]$. Тоді для будь-якої послідовності $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ натуральних чисел такої, що виконується співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце порядкова рівність*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,q_2} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{21}$$

Доведення. Оцінки зверху отримаємо аналогічно, як і в попередній теоремі, використовуючи оцінки величини $e_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)$, знайдені у роботах [12] та [13].

Далі покажемо, що при $1 \le p \le 2$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ і $1 \le \theta \le \infty$ справедлива порядкова нерівність

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{2,1} \gg \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})},\ M \asymp 2^n n^{d-1}, \tag{22}$$

з якої буде випливати оцінка знизу в (21).

Розглянемо випадок $p = 1$. За даним M підберемо натуральне n таким чином, щоб для кількості елементів множини $Q_n = \bigcup\limits_{\|s\|_1=n} \rho(s)$ виконувались співвідношення $|Q_n| > 2M$, $|Q_n| \asymp M$.

Розглянемо функції

$$g_1(x) = C_{11} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)},\ C_{11} > 0,\ 1 \le \theta < \infty,$$

та

$$g_2(x) = C_{12} \sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)},\ C_{12} > 0,\ \theta = \infty,$$

де $\rho^+(s) = \left\{ k:\ k = (k_1, \ldots, k_d),\ 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d} \right\}$.

При відповідному виборі сталих C_{11} та C_{12} функції $g_1 \in S^{\Omega}_{1,\theta}B$, $1 \le \theta < \infty$, та $g_2 \in S^{\Omega}_{1,\infty}B$. Дійсно

$$\|g_1\|_{S^{\Omega}_{1,\theta}B} \asymp \left(\sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \|A_s(g_1,x)\|_1^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \omega^{\theta}(2^{-\|s\|_1}) \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n \le \|s\|_1 \le n+d} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1,$$

$$\|g_2\|_{S^{\Omega}_{1,\infty}B} \asymp \sup_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \frac{\|A_s(g_2,x)\|_1}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \ll \sup_{n \le \|s\|_1 \le n+d} \frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{\omega(2^{-\|s\|_1})} = 1.$$

Беручи функцію g (тут для зручності функцію будемо позначати g, маючи на увазі g_1 при $1 \le \theta < \infty$ та g_2 у випадку $\theta = \infty$) в якості ядра, розглянемо інтегральний оператор $G : L_2 \longrightarrow L_2$

$$(Gf)(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} g(x-y) f(y) dy.$$

Нехай G^* — спряжений до G оператор, а λ_j — власні числа оператора G^*G, які розташовані в порядку незростання. Оскільки числа λ_j співпадають з числами $bn^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\omega^2(2^{-\|s\|_1})$, $b > 0$

(відповідно, з числами $b\omega^2(2^{-\|s\|_1})$ при $\theta=\infty$), то за лемою А отримаємо

$$\inf_{u_i(x),v_i(y)} \|g_1(x-y)-\sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y)\|_{2,2} = \Big(\sum_{j\geq M+1}\lambda_j\Big)^{\frac12} \geq$$

$$\geq \Big(\sum_{\|s\|_1\geq n+1} bn^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\omega^2(2^{-\|s\|_1})\Big)^{\frac12} \gg n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Big(\sum_{\|s\|_1\geq n+1}\omega^2(2^{-\|s\|_1})\sum_{k\in\rho^+(s)}1\Big)^{\frac12} \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Big(\sum_{\|s\|_1\geq n+1}\omega^2(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1}\Big)^{\frac12} = n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Big(\sum_{\|s\|_1\geq n+1}\frac{\omega^2(2^{-\|s\|_1})}{2^{-2\alpha\|s\|_1}}2^{(1-2\alpha)\|s\|_1}\Big)^{\frac12} \gg$$

$$\gg n^{-\frac{d-1}{\theta}}\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\Big(\sum_{\|s\|_1\geq n+1}2^{(1-2\alpha)\|s\|_1}\Big)^{\frac12} \gg n^{-\frac{d-1}{\theta}}\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}2^{(1-2\alpha)\frac{n}{2}}n^{\frac{d-1}{2}} =$$

$$= \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac12-\frac1\theta)}2^{\frac n2}. \qquad (23)$$

Аналогічно у випадку $\theta=\infty$

$$\inf_{u_i(x),v_i(y)} \Big\|g_2(x-y)-\sum_{i=1}^{M}u_i(x)v_i(y)\Big\|_{2,2} \gg \omega(2^{-n})2^{\frac n2}n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Далі, нехай задані деякі системи функцій $\{u_j(x)\}_{j=1}^M \in L_2(\pi_d)$ і $\{v_j(y)\}_{j=1}^M \in L_1(\pi_d)$. Не обмежуючи загальності, ми можемо вважати функції $v_j(y)$, $j=\overline{1,M}$, неперервними. Позначимо через $u_g(x,y)$ ортогональну проекцію функції $g(x-y)$ при фіксованому y на підпростір $U=\mathfrak{L}(\{u_j(x)\}_{j=1}^M)$ — лінійну оболонку функцій $u_j(x)$, $j=\overline{1,M}$. Покладемо

$$r(x,y)=g(x-y)-u_g(x,y).$$

Оскільки функція $u_g(x,y)$ має вигляд

$$u_g(x,y)=\sum_{j=1}^{M}u_j(x)\varphi_j(y), \qquad (24)$$

то для довільного $y\in\pi_d$ матимемо

$$\|g(\cdot-y)-\sum_{j=1}^{M}u_j(\cdot)v_j(y)\|_2 \geq \|r(\cdot,y)\|_2, \qquad (25)$$

$$\|r(\cdot,y)\|_2 \leq \|g(\cdot-y)\|_2. \qquad (26)$$

Для функції $r(x,y)$ справедлива рівність

$$\|r(x,y)\|_{2,2}^2 \leq \|r(x,y)\|_{2,1}\|r(x,y)\|_{2,\infty}. \qquad (27)$$

З одного боку, враховуючи (24), аналогічно до (23), отримаємо

$$\|r(x,y)\|_{2,2} = \|g(x-y)-u_g(x,y)\|_{2,2} \gg \omega(2^{-n})2^{\frac n2}n^{(d-1)(\frac12-\frac1\theta)}. \qquad (28)$$

З іншого боку ми можемо оцінити $\|r(x,y)\|_{2,\infty}$ зверху. З нерівності (26) випливає, що

$$\|r(x,y)\|_{2,\infty} \leq \|g\|_2. \tag{29}$$

Оцінимо $\|g\|_2$. Покладаючи $g = g_1$, знаходимо

$$\|g_1\|_2 = \|C_{11} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)}\|_2 \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \| \sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)}\|_2 \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \omega^2(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \omega^2(2^{-\|s\|_1}) 2^{\|s\|_1} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \frac{\omega^2(2^{-\|s\|_1})}{2^{-2\alpha\|s\|_1}} 2^{(1-2\alpha)\|s\|_1} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} 2^{(1-2\alpha)\|s\|_1} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= n^{-\frac{d-1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{j=n}^{n+d} \sum_{\|s\|_1 = j} 2^{(1-2\alpha)\|s\|_1} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{j=n}^{n+d} 2^{(1-2\alpha)j} j^{d-1} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{(1-2\alpha)\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}} = \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Якщо покласти $g = g_2$, то

$$\|g_2\|_2 = \|C_{12} \sum_{n \leq \|s\|_1 \leq n+d} \omega(2^{-\|s\|_1}) \sum_{k \in \rho^+(s)} e^{i(k,x)}\|_2 \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Із оцінок $\|g_1\|_2$ і $\|g_2\|_2$ на підставі нерівності (29) отримуємо для довільного $1 \leq \theta \leq \infty$

$$\|r(x,y)\|_{2,\infty} \leq \|g\|_2 \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{30}$$

З (27)-(30) випливає нерівність

$$\|r(x,y)\|_{2,1} \gg \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Тепер скористаємось нерівністю (25) і отримаємо необхідну оцінку при $p = 1$.

Розглянемо випадок $1 < p \leq 2$. Знову ж за заданим M підберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб для $Q_n = \bigcup_{\|s\|_1 = n} \rho(s) : |Q_n| > 4M$, $|Q_n| \asymp M$. Розглянемо функцію

$$f_3(x) = C_{13} \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} d_n(x), \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$f_4(x) = C_{14} \omega(2^{-n}) 2^{-n(1-\frac{1}{p})} d_n(x), \quad \theta = \infty,$$

де $d_n(x) = \sum\limits_{k\in Q_n} e^{i(k,x)}$, C_{13}, C_{14} — додатні сталі.

Оскільки

$$\Big\| \sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} e^{ik_jx_j} \Big\|_p \asymp 2^{s_j(1-\frac{1}{p})}, \quad j=\overline{1,d},$$

то

$$\|\delta_s(d_n,x)\|_p = \| \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)}\|_p = \prod_{j=1}^{d} \| \sum_{k=2^{s_j-1}}^{2^{s_j}-1} e^{ik_jx_j}\|_p \asymp \prod_{j=1}^{d} 2^{s_j(1-\frac{1}{p})} = 2^{\|s\|_1(1-\frac{1}{p})}.$$

Згідно з (2) при $1\le\theta<\infty$ маємо

$$\|f_3\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_{\|s\|_1=n} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|\delta_s(f,x)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{\|s\|_1=n} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})\|\delta_s(d_n,x)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\omega^{-\theta}(2^{-n})\sum_{\|s\|_1=n} \|\delta_s(d_n,x)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-n(1-\frac{1}{p})}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{\|s\|_1=n} 2^{\theta\|s\|_1(1-\frac{1}{p})}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 2^{-n(1-\frac{1}{p})}2^{n(1-\frac{1}{p})}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{\|s\|_1=n} 1\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 1.$$

При $\theta=\infty$

$$\|f_4\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_{\|s\|_1=n} \frac{\|\delta_s(f,x)\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \asymp \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})} \sup_{\|s\|_1=n} \frac{\|\delta_s(d_n,x)\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})} \sup_{\|s\|_1=n} \frac{2^{\|s\|_1(1-\frac{1}{p})}}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \asymp \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}\omega^{-1}(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{p})} = 1.$$

Таким чином функції f_3 та f_4 належать відповідно до класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1\le\theta<\infty$, та $S^{\Omega}_{p,\infty}B$ при деяких значеннях сталих $C_{13}, C_{14}>0$. Оскільки функція d_n задовольняє умови леми Б, то для функцій f_3, f_4 матимемо

$$\tau_M(f_3)_{2,1} \gg \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}n^{-\frac{d-1}{\theta}}M^{\frac{1}{2}} \asymp \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}n^{-\frac{d-1}{\theta}}2^{\frac{n}{2}}n^{\frac{d-1}{2}} =$$

$$= \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})},$$

$$\tau_M(f_4)_{2,1} \gg \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}M^{\frac{1}{2}} \asymp \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Оцінка знизу і теорема в цілому доведені.

Зауваження 4. Співставивши результат теореми 3 з оцінкою колмогоровського поперечника $d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})$ [3], приходимо до висновку, що справедливі порядкові рівності

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1}),$$

при $2 \le \theta < \infty$, та

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})(\log^{d-1} M)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})},$$

при $1 \le \theta < 2$.

Теорема 4. *Нехай $2 \le p < q_1 < \infty$, $1 \le q_2, \theta \le \infty$ і $\Omega(t) = \omega(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j)$, де $\omega \in \Phi^1_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{2}$. Тоді для будь-якої послідовності $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ натуральних чисел такої, що виконується співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, справедлива оцінка*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,q_2} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Доведення. Оцінку зверху отримаємо аналогічно, як і в попередніх теоремах, з оцінки величини $e_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_p$, $2 \le p < q_1 < \infty$ [13].

Тепер перейдемо до встановлення оцінок знизу. За даним M підберемо n так, щоб виконувались співвідношення: а) $M \asymp 2^n n^{d-1}$; б) $2^n n^{d-1} > 4M$.

Розглянемо функції

$$f_5(x) = C_{15}\omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\|s\|_1=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j),\ C_{15} > 0,\ 1 \le \theta < \infty,$$

$$f_6(x) = C_{16}\omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{2}} \sum_{\|s\|_1=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j),\ C_{16} > 0,\ \theta = \infty,$$

де $R_{s_j}(x_j) = \sum\limits_{l=2^{s_j-1}}^{2^{s^j}-1} \varepsilon_l e^{ilx_j}$, $\varepsilon_l = \pm 1$, $j = \overline{1,d}$, — поліноми Рудіна–Шапіро, для яких, як відзначалось вище, $\|R_{s_j}\|_\infty \ll 2^{\frac{s_j}{2}}$.

Покажемо, що при деякому виборі додатних сталих C_{15}, C_{16} ці функції належать класам $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1 \le \theta < \infty$, та $S^{\Omega}_{p,\infty}B$ відповідно. Оскільки

$$\delta_s(f_5, x) = C_{15}\omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j),$$

$$\delta_s(f_6, x) = C_{16}\omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j),$$

то при $1 \le \theta < \infty$ матимемо

$$\|f_5\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_{s} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \|\delta_s(f_5, x)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{2}} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{\|s\|_1=n} \omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1}) \left\| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j) \right\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{\|s\|_1=n}\omega^{-\theta}(2^{-\|s\|_1})2^{\frac{\|s\|_1\cdot\theta}{2}}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\omega^{-1}(2^{-\|s\|_1})2^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{\|s\|_1=n}1\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll n^{-\frac{d-1}{\theta}}n^{\frac{d-1}{\theta}}=1.$$

Відповідно при $\theta=\infty$

$$\|f_6\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_s \frac{\|\delta_s(f_6,x)\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \asymp \omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{2}}\sup_{\|s\|_1=n}\frac{\left\|\prod\limits_{j=1}^{d}R_{s_j}(x_j)\right\|_p}{\omega(2^{-\|s\|_1})} <$$

$$< \omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{2}}\sup_{\|s\|_1=n}\frac{\left\|\prod\limits_{j=1}^{d}R_{s_j}(x_j)\right\|_\infty}{\omega(2^{-\|s\|_1})} \ll \omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{2}}\sup_{\|s\|_1=n}\frac{2^{\frac{\|s\|_1}{2}}}{\omega(2^{-\|s\|_1})}=1.$$

Тепер, врахувавши, що функція

$$\upsilon(x)=\sum_{\|s\|_1=n}\prod_{j=1}^{d}R_{s_j}(x_j)$$

задовольняє умови леми Б, будемо мати

$$\tau_M(f_5)_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}\omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{2}}n^{-\frac{d-1}{\theta}} \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})},$$

$$\tau_M(f_6)_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}\omega(2^{-n})2^{-\frac{n}{2}} \asymp \omega(2^{-n})n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Теорему доведено.

Зауваження 5. Співставивши оцінку колмогоровського поперечника $d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})$ [3] з результатом теореми 4, бачимо, що при $\theta \geq 2$

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1}),$$

і

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})(\log^{d-1}M)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})},$$

при $1 \leq \theta < 2$.

Теорема 5. *Нехай* $2 \leq q_1 \leq p < \infty$, $1 \leq q_2, \theta \leq \infty$ *і* $\Omega(t)=\omega(\prod\limits_{j=1}^{d}t_j)$, $\omega \in \Phi^1_{\alpha,l}$, $\alpha > \max\{0; \frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\}$. *Тоді для будь-якої послідовності* $M=(M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце порядкова рівність*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,q_2} \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Доведення. Оцінка зверху слідує з оцінки величини $e^{\perp}_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q$, $1<q_1\leq p<\infty$, $p\geq 2$, встановленої в [15]. Оцінка знизу отримується аналогічно, як і в теоремі 4.

Зауваження 6. Співставивши оцінку колмогоровського поперечника $d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})$ [24] з результатом теореми 5, бачимо, що при $\theta \geq 2$

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1}),$$

і

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,\infty} \asymp d_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B, L_{q_1})(\log^{d-1} M)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})},$$

при $1 \leq \theta < 2$.

Зауваження 7. У випадку $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^r$ і певних обмеженнях на параметр r з теорем 3–5 отримуємо відповідні результати для класів $B^r_{p,\theta}$, які встановлені в роботі [21].

Литература

1. Бернштейн С.Н. Конструктивная теория функций (1931–1953): Собрание сочинений / С.Н. Бернштейн. — М.: Изд. АН СССР. — 1954. — Т.2 — 626 с.
2. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483–522.
3. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. — 1997. — **219**. — С. 356–377.
4. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. math. — 1994. — **20**, № 1. — P. 35–48.
5. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 143–161.
6. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.
7. *Стасюк С.А., Федуник О.В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 5. — С. 692–704.
8. *Стечкин С.Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. — 1955. — **102**, № 1. — С. 37–40.
9. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1–112.
10. *Романюк А.С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — **67**, № 2. — С. 61–100.
11. *Стасюк С.А.* Приближение функций многих переменных классов H^{Ω}_{p} полиномами по системе Хаара // Analysis Math. — 2009. — **35**. — P. 257–271.
12. *Конограй А.Ф., Стасюк С.А.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 9. — С. 1196–1214.
13. *Стасюк С.А.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 3. — С. 381–394.

14. *Temlyakov V.N.* Approximation of periodic functions. — New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 419 p.

15. *Стасюк С.А.* Найкращі M-членні ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 5. — С. 647–656.

16. *Романюк А.С., Романюк В.С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 4. — С. 536–551.

17. *Schmidt E.* Zur Theoric der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. — 1907. — **63**. — P. 433–476.

18. *Темляков В.М.* Билинейная аппроксимация и близкие вопросы // Тр. Мат. ин-та РАН. — 1991. — **194**. — С. 229–248.

19. *Темляков В.Н.* Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **173**. — С. 243–252.

20. *Темляков В.Н.* Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения // Мат. сб. — 1987. — **176**, №1. — С. 16–33.

21. *Романюк А.С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. матем. — 2006. — **70**, №2. — С. 69–98.

22. *Кашин С.Б., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. — М.: Наука, 1984. — 495 с.

23. *Конограй А.Ф.* Поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Математичні студії. — 2008. — **29**, № 2. — С. 192–206.

24. *Стасюк С.А.* Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 11. — С. 1557–1568.