Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Волинський національний університет імені Лесі Українки

В. Я. Ілляшенко

ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник для студентів
спеціальності «Математика»

Редакційно-видавничий відділ «Вежа»
Волинського національного університету імені Лесі Українки
Луцьк – 2012

УДК 514.01(075.8)
ББК 22.151.1я73
І-49

Рецензенти:

Гембарська С. Б. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь і математичної фізики Волинського національного університету імені Лесі Українки;

Філозоф Л. І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідуючий кафедрою математичного аналізу Волинського національного університету імені Лесі Українки.

Ілляшенко В. Я.
І -49 **ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ**: Навч. посіб. для вищ. навч. закл. – Луцьк РВВ «Вежа» Волин. нац.ун-ту ім.Лесі Українки, 2012. - с.

У посібнику висвітлені основні питання курсу «Основи геометрії», що вивчається студентами математичних спеціальностей університетів. В ньому здійснюється фактична побудова евклідової геометрії на основі систем аксіом Гільберта та Вейля, наводяться основні факти геометрії Лобачевського, еліптичної геометрії Рімана, розглядаються логічні проблеми, що виникають при аксіоматичній побудові геометрії.

Для студентів вищих навчальних закладів, що навчаються на спеціальності «математика».

Зміст

Геометрія є прообразом
краси світу.

Й. Кеплер

Вивчення геометрії наближає
до безсмертних богів.

Платон

Геометрія – правителька усіх
мисленнєвих пошуків.

М. Ломоносов

Передмова

Основи геометрії – завершальний геометричний курс, який вивчається студентами спеціальності «математика». Основи геометрії або обґрунтування геометрії – це приведення геометричного знання в певну логічну систему, це знаходження логічного порядку в хаосі геометричних понять і фактів. Інструментом для цього служить аксіоматичний метод, який виникнув в надрах традиційної логіки і став сьогодні одним із дійових методів організації і розвитку наукового знання. Формування сучасного розуміння суті аксіоматичного методу проходило протягом більше двох тисячоліть історії розвитку науки, в основному саме на матеріалі геометрії. Тому в главах 1-2 дається історичний огляд розвитку ідеї аксіоматичного методу та вчення про основи геометрії. В главах 4-6 здійснюється фактична побудова геометричної науки як аксіоматичної теорії, причому розглядаються різні шляхи цієї побудови.

У зв'язку з аксіоматичною побудовою геометрії виникають три питання, які в першу чергу розглядаються в основах геометрії.

1. Так як вихідні положення (аксіоми) також є деякими твердженнями, які стосуються геометричних фігур, то чи не можуть деякі з них бути логічно виведені з інших.

2. Чи не можна одержати шляхом логічних міркувань, спираючись на аксіоми, двох наслідків, які заперечують один одного?
3. Чи не можна систему аксіом доповнити новими аксіомами, які б не випливали з старих і разом з тим не суперечили б їм?

Розв'язання цих важливих для аксіоматичної побудови геометрії питань було одержане порівняно недавно. Величезна заслуга в цьому належить М. І. Лобачевському. Його відкриття неевклідової геометрії поклало початок багаточисленним плідним дослідженням видатних математиків XIX століття, в працях яких вище наведені питання одержали повне розв'язання.

Саме спроби розв'язати логічні проблеми геометрії привели до того, що геометрична наука звільнилась від евклідових «пут» і створила неевклідову концепцію простору. Першою такою неевклідовою системою була геометрія Лобачевського. Їй присвячена глава 9.

Про іншу неевклідову геометрію – еліптичну геометрію Рімана – говориться у главі 10.

Питання, пов'язані з вимірюванням геометричних величин, мають велике значення і займають значну частину курсу елементарної геометрії. Логічне обґрунтування теорії вимірювання на основі однієї з аксіоматик наводиться у главі 11.

Глава 1. Аксіоматичний метод і коротка історія його формування

Аксіоми та доведення науки проникають у розум, захоплюють його і тримають так міцно, що він не може вирватись.

Френсіс Бекон

Математичні доведення – як алмази, тверді і прозорі.

Джон Локк

Аксіоматичний метод – фундаментальний метод організації і множення наукового знання в різноманітних його галузях – сформувався протягом більше ніж двохтисячолітньої історії розвитку науки.

Аксіоматичний метод – це спосіб побудови наукової теорії, при якому в основу теорії покладаються деякі вихідні положення, які називаються *аксіомами* теорії, а всі останні твердження теорії одержуються як логічні наслідки аксіом.

У §1.1 коротко розповідається про основні етапи становлення поняття аксіоматичного методу в науці, а також про розвиток вчення про обґрунтування геометрії, яке сприяло цьому становленню. У §1.2 дається загальна характеристика суті аксіоматичного методу, поняття аксіоматичної теорії.

§ 1.1. Основні етапи розвитку аксіоматичного методу в науці і вчення про обґрунтування геометрії

З шкільного курсу математики бачимо, що побудова в ньому геометрії має більш аксіоматичний характер, ніж виклад курсу алгебри і начал аналізу. В геометрії чітко вказуються початкові (не означувані) поняття, формулюються аксіоми, з цих аксіом за допомогою логічних міркувань виводяться (доводяться) теореми. І це не випадково: в цьому навчальному процесі знайшов відображення історичний процес формування аксіоматичного методу взагалі, який в основному проходить на полі геометрії. Заслуга в цьому належить видатній праці Евкліда «Начала», яка більше як на двадцять століть встановила не тільки канони геометричної науки, але і канони її викладання. З цієї точки зору шкільний курс алгебри і начал аналізу побудований більш хаотично. Але справа тут не в тому, що алгебра і аналіз не мають аксіоматичних основ. Такі основи, звичайно ж, є, але вони були відкриті лише на межі XIX-XX століть і виявились осторонь педагогічного процесу.

Перш ніж проаналізувати результати аксіоматичного методу в галузі геометрії, охарактеризуємо коротко основні етапи його формування (детальний історичний огляд див. в наступній главі).

1. Епоха Евкліда. У VII ст. до н.е. математичні знання Стародавнього Єгипту і Вавилону проникають у Стародавню Грецію. Тут геометрія сформувалась як струнка самостійна наука – було виявлено зв’язки між різними геометричними фактами і знайдено правила, так звані закони логіки, за якими слід міркувати, щоб з правильних посилок дістати правильні висновки. Основні закони логіки виклав Арістотель (IV-III ст. до н.е.).

Отже, на певному етапі нагромадження розрізнених геометричних фактів з’явилась потреба і можливість виявити зв’язки між ними і систематизувати їх. Здійснив це Евклід у своїх «Началах», (близько 300 р. до н.е.), які є прикладом *змістовної аксіоматичної теорії*.

Праця Евкліда була першою в історії людства науковою книгою: в ній геометрія була представлена як аксіоматична теорія, виходячи з тих принципів, формулювання яких належать Арістотелю і Платону. Евклід остаточно прояснив їх і від словесних формулювань перейшов до реальної справи. Систематичність викладу, при якому все складніші твердження виводяться з кількох означень, аксіом і постулатів, які приймаються без доведення, була настільки досконалою, що книга стала предметом вивчення, дослідження і наслідування протягом багатьох століть (детальний аналіз «Начал» див. у главі 3).

До першої половини XIX ст. по-суті була епоха Евкліда в історії обґрунтування геометрії, епоха його коментаторів, послідовників, період наївно-аксіоматичної побудови геометрії. Але на початку XIX ст. разом з безуспішними спробами доведення V постулату Евкліда вона підходила до кінця. Вона привела до видатного відкриття – нового розуміння основ геометрії і нового кроку в розумінні суті аксіоматичного методу.

2. Революція Лобачевского. Це відкриття здійснив професор Казанського університету Микола Іванович Лобачевський, який повідомив про нього 25 лютого 1826 р. на засіданні ради фізико-математичного факультету. Доповідь покладена в основу праці «Про начала геометрії», яка була опублікована у 1829 р. Цей мемуар М. І. Лобачевського є межею двох епох в історії геометрії.

Лобачевський, а пізніше Я. Бойяї встановили, що, замінивши єдино «об’єктивно істинний» V постулат Евкліда (див. гл. 9) про паралельні його запереченням, можна розвинути чисто логічним шляхом геометричну теорію, таку ж струнку і багату змістом, як і геометрія Евкліда. Цей факт заставив математиків XIX ст. звернути спеціальну увагу на дедуктивний спосіб побудови математичної теорії, що привело до виникнення нової проблематики, пов’язаної з самим поняттям аксіоматичного методу і формальної (аксіоматичної) математичної теорії.

Відкриття Лобачевского дало новий погляд на суть аксіоматичного методу, який дістав свій подальший розвиток. Аксіоми – це зовсім не самоочевидні істини. Це – твердження про початкові поняття, що приймаються без доведення і кладуться в основу теорії, з яких всі інші твердження теорії логічно виводяться. Істинне те, що може бути логічно доведено з прийнятих аксіом.

Розвиток математики в першій половині XIX ст. ознаменувався під впливом робіт Гаусса, Коші, Абеля, глибоким критичним переглядом основ математичного аналізу, намаганням докорінної перебудови аналізу на началах арифметичного обґрунтування. Перед математикою постали питання обґрунтування ірраціональних, комплексних чисел, понять функції, границі, неперервності, збіжності і т.д. на основі поняття числа.

При цьому, з одного боку, уточнення понять і зведення складніших до простіших на точній і логічно строгій основі проводились головним чином в галузі аналізу («ε-δ» мова О. Коші), теоретико-функціональні концепції Б. Больцано і К. Вейєрштрасса, континуум Г. Кантора і Р. Дедекінда; з іншого боку, відкриття неевклідових геометрій стимулювало розвиток аксіоматичного методу, виникнення нових ідей і постановка проблем, пов'язаних з поняттям довільної аксіоматичної теорії, таких, як проблеми несуперечливості, повноти і незалежності тієї чи іншої системи аксіом. Перші результати в цій галузі приніс *метод інтерпретацій*. Цей метод дозволяє встановлювати факт *відносної несуперечливості*, тобто доводити судження типу: «Якщо теорія T_1 несуперечлива, то несуперечлива і теорія T» (T_1 – інтерпретація теорії T). Цим методом була доведена (Ф. Клейн, А. Пуанкаре) несуперечливість геометрії Лобачевского у припущенні, що несуперечлива геометрія Евкліда; а питання про несуперечливість гільбертової аксіоматизації евклідової геометрії було зведено до проблеми несуперечливості арифметики.

3. Етап Гільберта. До кінця 60-х років XIX ст., коли ідеї Лобачевского були визнані математиками і ті приступили до їх подальшого розвитку, з новою силою постала проблема аксіоматичної побудови геометрії. До кінця XIX ст. і на початку XX ст. було опубліковано багато робіт на цю тему. Найбільшу популярність дістав твір видатного німецького математика Д. Гільберта «Основи геометрії» (1899 р.). В цій книзі Гільберт навів повну систему аксіом евклідової геометрії, з яких всі останні твердження геометрії можуть бути доведені логічним шляхом, довів несуперечливість цієї системи аксіом при умові несуперечливості теорії дійсних чисел і незалежність деяких аксіом від останніх аксіом системи.

Є принципова різниця у постановці питання про аксіоматичне обґрунтування геометрії у Гільберта від тієї постановки, яка мала місце до нього.

Евклід у своїх «Началах» накреслив ідеал строго логічного викладу геометрії, хоча і не зміг до кінця виконати свій задум. Згідно цього задуму необхідно строго відділити мінімум того, що повинно бути запозичено і абстраговано з досвіду і геометричної інтуїції і з повною ясністю висловлено в аксіомах, від того, що повинно бути виведено з аксіом виключно логічним шляхом без будь-яких звертань до очевидності та досвіду. Весь довгий шлях розвитку геометрії від Евкліда до Гільберта показує, наскільки було важко здійснити це завдання.

Наша просторова уява, наочні уявлення і конкретне розуміння геометричних понять є досить цінним і необхідним супутником нашого мислення. Вони в логічному процесі відіграють навідну роль і слугують як би попередньому орієнтуванню у явищах, що вивчаються. Вони дають можливість охопити ці явища в цілому і намітити той шлях, по якому слід направляти логічні міркування для остаточного доведення істини і перевірки фактів, добутих за допомогою спостереження і досвіду.

В. Ф. Каган так характеризує цей шлях міркувань: «Споглядання накреслює, логіка перевіряє; споглядання передбачає, логіка встановлює; споглядання відкриває, логіка доводить». Одна логіка не може нам пояснити, чому ми в якості аксіом вибираємо те чи інше твердження, чому ми вибираємо для вивчення те чи інше поняття. Першочергову роль при виборі аксіом і геометричних понять відіграє досвід, інтуїція, наочні уявлення, рисунок. Вони відіграють велику роль також у знаходженні самого шляху логічного доведення, у побудові того ланцюга умовиводів і аргументів, які обґрунтовують твердження, яке доводиться. Одна логіка не може пояснити, чому при доведенні обираються ці побудови і перетворення, а не інші. Тут ми маємо широке поле дії геометричної інтуїції, наочності, здогаду.

Проте поряд з цією незамінимою і корисною роллю для логічної побудови геометрії, наочні *конкретні* уявлення про геометричні об’єкти містять в собі певні труднощі і небезпеку. По-перше, якщо наші геометричні поняття про точку, пряму і т.д. нерозривно пов’язані з певними конкретними наочними уявленнями, то це веде до *втрати загальності* і до звуження поля застосовності геометричних істин і логічних міркувань.

По-друге, при строго логічній побудові геометрії в геометричних поняттях та аксіомах повинні знайти свій вираз лише ті властивості і відношення об’єктів реального світу, які є *суттєвими для логічних міркувань*. Всі останні ознаки повинні відкидатись, як такі, що не мають ніякого значення у міркуваннях. Відділити суттєві для дедукції ознаки від несуттєвих надзвичайно складно. Але якщо ми ставимо завдання скласти повний перелік аксіом, ми передусім повинні максимально усунути вплив наочних уявлень на наші міркування, добитись найбільшої загальності і застосовності одержання висновків до вивчення об’єктів реального світу.

Д. Гільберт встановив нову точку зору на основні поняття і аксіоми геометрії. Якщо до Гільберта під аксіомами геометрії розумілись *конкретні* пізнавальні істини, які стосуються цілком певних конкретних об’єктів – точок, прямих, площин і т.д., які зв’язані з цілком певними просторовими уявленнями, то для Гільберта основні поняття геометрії, а значить, і похідні не пов’язуються ні з якими конкретними об’єктами, вони вводяться без *прямих означень* і все, що про них необхідно знати, викладається в аксіомах. *Аксіоми Гільберта* є в цьому розумінні *непрямими (неявними) означеннями основних понять*.

Гільберт припускає існування трьох різних систем об’єктів, природа яких байдужа, і які називають «точками», «прямими», «площинами». Далі припускається, що «точки», «прямі», «площини» знаходяться в деяких взаємних відношеннях, які позначаємо їх словами «лежати», «між», «конгруентний», повне описання цих відношень дається *аксіомами* геометрії (див. гл. 4).

Таким чином, основні поняття є об'єкти *довільної природи*, між якими встановлюються відношення, властивості яких розкриваються в аксіомах. За допомогою аксіом множина об'єктів і відношень між ними, про які йдеться в цих аксіомах, визначається не однозначно – будь-яку множину об'єктів і відношень між ними, що мають властивості, перелічені в системі аксіом геометрії, можна вважати вихідними геометричними поняттями, тобто геометрія є *напівформальною аксіоматичною теорією*.

З виходом праці Гільберта питання про логічне обґрунтування геометрії фактично було закрите. Більше того, були остаточно усвідомлені ті ідеї і принципи, які характеризують суть аксіоматичного підходу до обґрунтування геометрії, а також – суть аксіоматичного методу взагалі.

Слід відзначити, що різні системи аксіом, що виходять з різних початкових (основних) понять, будувались як до виходу книги Д. Гільберта (наприклад, Маріо Пієрі, Моріц Паш), так і після їх виходу, аж до початку 20-х років (наприклад, В. Каган, Г. Вейль). Цим був завершений другий етап розвитку аксіоматичного обґрунтування геометрії – *абстрактно-аксіоматична побудова геометрії*.

Геометрія розглядається як *напівформальна аксіоматична теорія*.

4. Етап формально-аксіоматичного обґрунтування. Геометричні дослідження, розпочаті Лобачевським, привели до того, що на початку ХХ ст. було сформульоване фундаментальне поняття сучасної математики – поняття (математичного або геометричного) простору як деякої сукупності однорідних об'єктів довільної природи (точок, векторів, фігур, функцій, явищ, станів і т.п.), взаємні відношення між якими задовольняють тій чи іншій системі аксіом. Фактично, різні математичні простори є моделями тих чи інших аксіоматичних теорій, побудованих на відповідних системах аксіом. Таке розуміння дозволило геометричним ідеям проникнути у різні галузі математики, фізики та інших наук. При цьому і сама геометрія стала розгалужуватись все ширше, математика ставала все більше єдиною наукою, а межі її різноманітних галузей, в тому числі і геометрії, ставали все менш чіткими. Цементним розчином, який з'єднував міцними зв'язками основи всіх галузей математики, була в XX ст. математична логіка. З її допомогою був досліджений сам процес доведення, процес виведення теорем з аксіом. Тим самим аксіоматичний метод одержав подальший свій розвиток і досяг в певному розумінні вершини. Аксіоматичні теорії стали точними математичними об'єктами, названими *формальними системами*, і почали вивчатись математичними методами (методами математичної логіки), почала будуватись теорія таких математичних теорій (теорія формальних систем), що називається *метатеорією*. Цей напрям був розпочатий в роботах Гільберта і одержав назву методу формалізації в обґрунтуванні математики. В рамках метатеорії геометрії були доведені несуперечливість, категоричність, повнота аксіоматичної теорії евклідової геометрії, а також неевклідових геометрій. Можна сказати, що в XX ст. відбувся третій етап розвитку аксіоматичного обґрунтування геометрії і розвитку аксіоматичного методу взагалі – етап *формально-аксіоматичного обґрун*тування.

§ 1.2 Аксіоматичний метод в математиці та аксіоматичні теорії

Описаний в попередньому параграфі історичний процес розвитку поглядів на суть математики як науки привів до формування фундаментальної концепції аксіоматичного методу і поняття аксіоматичної теорії. Суть їх полягає в наступному. Обираються *початкові поняття*, які не означаються і використовуються без пояснення їх змісту. Разом з тим, всі інші поняття, які будуть використовуватись, повинні бути строго означені через початкові неозначувані поняття і поняття, зміст яких був означений раніше. Висловлення, яке визначає таким способом значення поняття, називається *означенням*, а саме поняття, зміст якого визначений, носить назву *означуваного* поняття.

Далі, аналогічна ситуація і з твердженнями про початкові і про означувані поняття. Неможливо довести всі істинні твердження про ці поняття, тому що при доведенні потрібно спиратись на якісь попередні твердження, при їх доведенні, в свою чергу, на попередні і так без кінця. Тому і тут необхідно виділити деякі твердження і оголосити їх істинними. Такі твердження, що приймаються без доведення, називаються *аксіомами* аксіоматичної теорії. Сукупність аксіом позначимо буквою Σ. Питання про те, які твердження про початкові поняття вибираються в якості аксіом, заслуговує спеціального розгляду.

Після того, як система аксіом аксіоматичної теорії вибрана, приступають до розвитку самої аксіоматичної теорії. Для цього, виходячи з вибраної системи аксіом, користуючись правилами логічних умовиводів, доводять нові твердження про початкові поняття, а також про означувані поняття. Такі твердження називаються *теоремами* даної аксіоматичної теорії.

Можна більш точно сформулювати поняття теореми аксіоматичної теорії та її доведення. *Доведенням* твердження C, сформульованого в термінах даної теорії, називається скінченна послідовність $B_1, B_2, ..., B_s$ висловлень теорії, в якій кожне висловлення є або аксіома, або воно одержане з одного або більше попередніх висловлень даної послідовності за логічними правилами виведення, а останнє висловлення B_S є твердження C. При цьому C називається *теоремою* або твердженням, яке доводиться. Кожна аксіома аксіоматичної теорії є її теоремою; доведення аксіоми є одноелементна послідовність, що складається з неї самої.

Отже, під *аксіоматичною теорією* T, побудованою на основі системи аксіом Σ, розуміють сукупність всіх теорем, які доводяться, виходячи з цієї системи аксіом.

Викладений метод побудови математичної теорії носить назву *аксіоматичного* або *дедуктивного методу*.

Вибір системи аксіом є справа умови: одне і те ж твердження теорії може бути аксіомою, якщо воно так вибране, а може виступати в якості теореми, якщо вибір аксіом здійснений інакше. Якщо за терміном «аксіома» в повсякденному житті утвердився його первісний зміст (в перекладі з грецької «аксіома» означає «гідний визнання»), а саме зміст самоочевидної, безумовної істини, то в математиці, при побудові аксіоматичної теорії, аксіоми умовні. Вони «гідні визнання» не самі по собі, не через їх самоочевидну істинність, а тому що на їх основі будується та чи інша аксіоматична теорія. При новому виборі системи аксіом попередні аксіоми стають теоремами. Коротко кажучи, аксіоми – це те, з чого виводяться теореми, а теореми – те, що виводиться з аксіом.

Отже, суть аксіоматичної побудови математичної теорії полягає в тому, що:

1. Обирають початкові поняття, які не означаються.
2. За допомогою основних понять дають означення всіх інших понять теорії.
3. Формулюють основні висловлення про властивості деяких понять теорії (аксіоми).
4. З аксіом виводять усі інші висловлення розглянутої теорії (теореми).

Сукупність всіх теорем, що виводяться з даної системи аксіом, називають аксіоматичною теорією, побудованою на базі цієї системи аксіом.

Можна вказати два шляхи, за якими проходило становлення тих чи інших математичних теорій, відомих у математиці.

Перший шлях полягає в тому, що та чи інша математична теорія, досягнувши достатньо високого рівня розвитку, набуває характеру аксіоматичної теорії. Саме таким шляхом були аксіоматизовані такі математичні теорії: арифметика (на основі системи аксіом Дж. Пеано), геометрія (на основі різноманітних систем аксіом, зокрема Д. Гільберта, Г. Вейля, В. Кагана і т.д.), теорії ймовірностей (аксіоматика А. М. Колмогорова) та інші.

Другий шлях виникнення аксіоматичних теорій полягає в тому, що виявилась глибока схожість між основними рисами, здавалось би, зовсім різних математичних теорій. Ця обставина наводила на думку виділити спільні риси і, керуючись ними, побудувати аксіоматичну теорію. На цьому шляху виникли всі алгебраїчні аксіоматичні теорії, і перш за все, теорія груп, кілець, полів та інших алгебраїчних систем, загальна або універсальна алгебра і т.д.

Контрольні запитання

1. В чому суть аксіоматичного методу побудови геометрії?

2. Які поняття в геометрії називаються основними?

3. Які твердження називаються аксіомами?

4. Що таке означення, теорема?

5. Які основні етапи розвитку аксіоматичного методу в науці?

6. Чим відрізняється постановка питання про аксіоматичне обґрунтування геометрії у Гільберта від тієї постановки, яка мала місце до нього?

7. В чому суть напівформальної аксіоматичної теорії?

8. Яке значення відкриття Лобачевського у розвитку аксіоматичного методу?

Рекомендована література: [I, 1-6]; [II, 1-5, 10, 19-21].

Глава 2. Загальні питання аксіоматики

Усі доказові науки послуговуються
аксіомами. Аксіоми мають найвищий
рівень загальності і началом усього.

Арістотель

Оскільки логіка є мистецтвом,
яке упорядковує і зв'язує думки,
то я не бачу підстав нарікати на неї.
Навпаки, люди помиляються саме тому,
що їм бракує логіки.

Готфрід Вільгельм Лейбніц

Основним методом сучасної математики є аксіоматичний метод, який тісно пов'язаний з поняттям математичної структури.

§ 2.1. Поняття про математичну структуру

Перш ніж перейти до поняття математичної структури, ми зупинимось коротко на поняттях відношення.

Відношення виражають зв'язки між предметами (поняттями). Припустимо, що нам дано який-небудь зв'язок (співвідношення) $p(x,y)$ між елементами x, y, які належать відповідно множинам A і B. Множина всіх пар (x,y) таких, що елемент $x \in A$ знаходиться в даному зв'язку (співвідношенні) з другим елементом $y \in B$, визначає деяку підмножину (яка позначається тим же символом $p=\{(x,y)/p(x,y)\}$ у множині всіх пар (x,y)). Навпаки, задання підмножини p у множині $A \times B$ – декартовому добутку множин A, B – виражає деякий зв'язок (співвідношення) між елементами $x \in A$, $y \in B$, для якої p буде множиною пар істинності. Отже, твердження «співвідношення $p(x,y)$ виконується для x,y» і «пара (x,y) є елементом множини p» рівносильні.

Звідси випливає, що бінарне відношення доцільно означити так.

Бінарним відношенням р між елементами *x*, *y* двох множин *A*, *B* ($x \in A$, $y \in B$) називається будь-яка підмножина декартового добутку $A\times B$ цих множин: $p \subset A\times B$.

Відношення *р* іноді позначається так: $p(x,y)$, де $x \in A$, $y \in B$.

Бінарне відношення на множині *A*: відношення *р* буде підмножиною декартового добутку $A\times A$: $p \in A\times A$.

Якщо множина р буде підмножиною декартового добутку трьох різних або таких, що збігаються множин, то відношення називається *тернарним*.

Якщо ж *р* буде підмножиною декартового добутку *n* різних або таких, що збігаються, співмножників, то відношення називається *n-арним*.

Операція об'єднання і перетину множин дозволяє ввести відповідні операції над відношеннями. Справді, якщо на множині *A* задані бінарні відношення *p, g*, то на тій же множині можна визначити бінарні відношення $p\cup g$, $p\cap g$.

Для деяких бінарних відношень застосовуються спеціальні позначення. Наприклад: $x=y$, $x<y$, $x\subset A$ виражають в символічному записі бінарні відношення, відповідно відношення рівності, менше і включення.

Важливу роль відіграють відношення еквівалентності. Відношенням еквівалентності між елементами даної множини *M* називається відношення *p*, що має такі три властивості:

1. Відношення $p(x,y)$ $(x,y \in M)$ завжди істинне при $x=y$; іншими словами, для кожного $x \in M$ виконується $p(x,x)$ (властивість рефлексивності відношення).

2. Якщо *x* еквівалентне *y*, то *y* еквівалентний *x* для будь-яких $x,y\in M$. У символічному запису: якщо $p(x,y)$, то $p(y,x)$ (властивість симетричності відношення *p*).

3. Якщо *x* еквівалентне *y* і *y* еквівалентне *z*, то *x* еквівалентне *z*. В символічному запису: якщо $p(x,y)$ і $p(y,z)$ істинне, то $p(x,z)$ також істинне для будь-яких $x, y, z \in M$ (властивість транзитивності відношення *p*).

Відношення рівності, подібності фігур, паралельності прямих є відношеннями еквівалентності.

Сукупність всіх класів еквівалентності визначає нову множину, яка називається *фактор-множиною множини М* по відношенню *р*. Фактор-множина позначається символом *М/р*. Елементами цієї множини є *класи еквівалентності* – множини, які попарно не перетинаються.

В наш час посилено розвиваються аксіоматичні теорії, в основі яких лежать теоретико-множинні поняття, які дозволяють основним поняттям аксіоматичної теорії надати певне теоретико-множинне тлумачення у вигляді множин і деяких відношень між їх елементами.

Припустимо, що нам дана деяка система множин: $M_1, M_2, \ldots., M_n$ ($n \geq 1$). Позначимо через $p_1, p_2, \ldots, p_k$ деякі відношення на цій системі. Ці відношення не будемо фіксувати як певні підмножини декартового добутку $M_1 \times M_2 \times \ldots. \times M_n$, а лише будемо вимагати, щоб вони мали задані властивості: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_.$ (1), які ми явно формулюємо. Позначимо через T множину всіх систем $\delta = \{p_1, \ldots, p_k\}$ відношень $p_1, p_2, \ldots, p_k$, кожна з яких має задані властивості (1). Якщо $T \neq \varnothing$, то говорять, що елемент $\delta \in T$ визначає на множинах $M_1, \ldots, M_n$ структуру роду T.

Явно сформульовані властивості (1), що визначають множину T, називаються аксіомами роду T, а множини $M_1, \ldots, M_n$ – базою структур роду T. Всім структурам одного і того ж роду дають спеціальну назву: структура групи, структура n-вимірного евклідового простору і т.д.

<u>Приклад 1 (структура групи</u><u>)</u>

База складається з однієї множини $M_1 \neq \varnothing$, система відношень складається з одного відношення p_1, яке повинно задовольняти чотирьом аксіомам:

$\alpha_1 : p_1$ – алгебраїчна операція на множині M_1;

$\alpha_2 : p_1(p_1(a, b), c) = p_1(a, p_1(b, c)), \ \forall a, b, c \in M_1$(асоціативність);

$\alpha_3: \exists e \in M_1: p_1(a,e) = p_1(e,a) = a; \forall a \in M_1$(існування нейтрального елемента);

$\alpha_4: \forall a \in M_1: \exists a' \in M_1 : p_1(a,a') = p_1(a',a) = e$ (існування елемента a', симетричного елементу a).

Множині, на якій визначена структура даного роду, дають спеціальну назву. В цьому прикладі говорять: «M_1 – група, або більш повно: на множині M_1 визначена структура роду структури групи».

<u>Приклад 2 (структура евклідового простору за Гільбертом)</u>

За Гільбертом, база структури евклідового простору складається з трьох множин M_1, M_2, M_3. Елементи першої множини називаються точками, елементи множини M_2 – прямими, а елементи множини M_3 – площинами.

На системі множин M_1, M_2, M_3 існують відношення p_1, p_2, p_3, які позначені відповідно словами «лежить на», «лежить між», «конгруентні». Список аксіом Гільберта складається з 21 аксіоми: I_1–I_{10}, II_1–II_4, III_1–III_5, IV, V (гл. IV).

Математична структура з базисними множинами $M_1,...,M_n$ позначається так:

$$S = (M_1, M_2, ..., M_n, p_i\ (i \in N))$$

Теорія структур роду Т – це множина *Г(Т)* тверджень(теорем), кожне з яких є логічним наслідком аксіом системи *Σ*, які визначають *Т*. Так, ми маємо теорію груп, теорію кілець, теорію (геометрію) афінних просторів, геометрію евклідових просторів і т.д.

Математика займається вивченням математичних структур. Основним її методом слугує аксіоматичний метод: структура кожного роду визначається за допомогою відповідного списку аксіом, а далі чисто логічним шляхом будується теорія структур цього роду.

Таким чином, хоча математика в наш час і є надзвичайно широкою галуззю знань, що має багаточисельні розділи і, на перший погляд,напрями досліджень, не пов’язаних між собою, ми можемо сказати , що математика –

це єдина наука. Її предмет дослідження – множина математичних структур; її основний метод – аксіоматичний метод.

Логічні проблеми математичної теорії починаються відразу, як тільки ця теорія вступає на аксіоматичний шлях розвитку. Це проблеми – несуперечливості, повноти цієї аксіоматичної теорії, а також – незалежності системи її аксіом. По-суті, для розв'язання цих проблем, пов'язаних з аксіоматичною теорією, потрібна нова теорія, що вивчає дану аксіоматичну теорію як дещо єдине ціле, встановлює властивості даної аксіоматичної теорії. Таку математичну теорію називають *метатеорією* по відношенню до даної аксіоматичної теорії. Факти, які встановлюються в ній відносно даної аксіоматичної теорії, називають *метатеоремами*, щоб відрізнити їх від теорем аксіоматичної теорії. Питання, пов'язані з моделями даної аксіоматичної теорії, з її несуперечливістю, категоричністю, повнотою, незалежністю її системи аксіом – це і є найважливіші питання, на які повинна дати відповідь метатеорія певної аксіоматичної теорії.

§2.2.Вимоги, що ставляться до системи аксіом

2.2.1. Несуперечливість системи аксіом

Системою аксіом науки називається сукупність тверджень про її основні поняття, що приймаються без доведення. Система аксіом даної науки не є однозначною. Наприклад, системами аксіом евклідової геометрії можуть бути системи аксіом Гільберта, Вейля, Кагана, Погорєлова і т.д.

Щоб бути основою науки, система аксіом повинна задовольняти ряду логічних вимог. Найважливішою вимогою, що ставиться до системи аксіом, є вимога її *несуперечливості*. Очевидно, що в основах науки не можуть бути покладені два твердження ω, ω, які взаємно заперечують одне одного. Сформулюємо їх так: «Якщо є А, то є В», «якщо є А, то немає В». Твердження ω, ω назвемо твердженнями, що заперечують одне одного. Відсутність в системі аксіом двох тверджень ω, ω ще не означає, що користуючись цією системою, шляхом логічних висновків не можна одержати з неї двох наслідків, які заперечують один одного, або наслідка, що заперечує аксіому. Наприклад, якщо до системи аксіом Гільберта Ω приєднати твердження ω: «сума внутрішніх кутів трикутника менша 2d», то одержимо систему аксіом Ω+ω, яка не містить двох тверджень, що заперечують одне одного. Проте, користуючись системою Ω, можна довести твердження $\overline{\omega}$: «сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 2d», яке заперечує твердження ω.

Нехай дано простір

$$П \equiv \{M_1, M_2, ..., M_к, p_i, \Omega(\omega_к)\}$$

Означення 1. Система аксіом Ω простору П називається *несуперечливою*, якщо в ній та її наслідках немає тверджень, які заперечують одне одного.

Першою вимогою, що ставиться до системи аксіом Ω простору П, є вимога її несуперечливості. Ідея доведення несуперечливості даної системи аксіом заснована на такій думці, що коли існує хоча би одна така галузь об'єктів, деякі відношення між якими задовольняють даній аксіоматиці, то остання не може містити логічних протиріч.

Означення 2. *Моделлю* системи аксіом Ω називається конкретна множина конкретних об'єктів , між якими встановлюються конкретні відношення, які задовольняють аксіоми системи Ω.

Таким чином, доведення несуперечливості системи аксіом зводиться до доведення існування хоча би однієї моделі (або інтерпретації) системи аксіом.

Приклади

Візьмемо таку систему аксіом:

1. Для будь-яких двох різних точок існує пряма, що проходить через них.

2. Для будь-яких двох різних точок існує не більше як одна пряма, що проходить через них.

3. На кожній прямій існують принаймні дві точки.

4. Існують принаймні три точки, що не лежать на одній прямій.

Модель 1.Нехай відомо, що таке тетраедр та його вершини і ребра. Крім того, вважатимемо відомими його найпростіші властивості. Розглянемо тетраедр ABCD (рис.2.1)

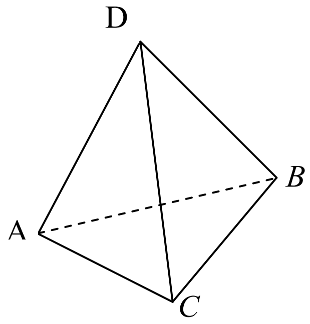


Рис. 2.1.

Надамо вихідним (основним) поняттям таке тлумачення:

«Точка» – вершина тетраедра.

«Пряма» – ребро тетраедра.

Будемо говорити,що точка належить прямій, якщо вершина тетраедра є кінцем ребра.

У такій моделі M_1 маємо 4 точки:A, B, C, D, шість прямих: [AB], [AC], [BC], [AD], [DC], [DB]. Перевіримо, чи задовольняють елементи вказаної множини M_1 аксіоми 1-4:

1. Для кожних двох вершин тетраедра існує ребро тетраедра.

Отже, аксіома 1 виконується.

2. Для будь-яких двох вершин існує єдине ребро.

Аксіома 2 виконується.

3. На кожному ребрі існує 2 вершини.

4. Існують 3 вершини, які не належать одному ребру (наприклад A, B, C).

Отже, аксіоми 3-4 також виконуються.

Таким чином, множина M_1 задовольняє систему аксіом 1-4,а тому є її моделлю.

Модель 2. Візьмемо конкретний тетраедр ABCD. Надамо основним поняттям таку інтерпретацію:

«Точка» - грань тетраедра (ABC, ABD, ACD, DBC)

«Пряма» - ребро тетраедра ([AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD])

«Лежати на» - інтерпретуємо в звичайному розумінні.

Аксіоми 1-2. Для двох різних граней існує і при тому єдине ребро, що належить їм.

Аксіома 3. Через кожне ребро проходить дві грані.

Аксіома 4. Існують три грані, що не проходять через одне ребро.

Отже, множина M_2 (ребер і граней) задовольняє аксіоми 1-4,а тому є їх моделлю.

Модель 3. Розглянемо конкретний тетраедр ABCD.

Інтерпретаційний словник:

1. «Точка» – вершина тетраедра({A, B, C, D})
2. «Пряма» – ребро тетраедра ({[AB], [AC], [AD], [BC], [BD], [CD]})
3. Будемо говорити, що точка інцидентна прямій, якщо вершина тетраедра не є кінцем ребра.(Наприклад точка A інцидентна ребрам[BC],[BD]).

Перевіримо, чи задовольняють елементи множини M_3 аксіомам 1-4.

Аксіоми 1-2.

Для двох будь-яких вершин існує і тільки одне ребро,яке не проходить через ці вершини.(Наприклад, для точок A, B інцидентне їм єдине ребро [CD].)

Аксіома 3.

Для кожного ребра існують 2 вершини, які не є кінцями цього ребра. Наприклад, для ребра [AC] вершини B, D.

Аксіома 4.

Існують три вершини тетраедра, які не інцидентні одному ребру.(Наприклад, A, B, C;точки A, B інцидентні ребру [CD], а точка C йому не інцидентна).

Отже, множина M_3 є моделлю системи аксіом 1-4.

Наведені приклади показують, що різного конкретного змісту можна надавати як основним об'єктам, так і основним відношенням, аби тільки основні поняття задовольняли певним аксіомам. Для кожної системи аксіом можна побудувати безліч моделей.

2.2.2. Незалежність системи аксіом

Виходячи з основного принципу дедуктивної побудови математичної науки про строгий поділ всіх тверджень цієї науки на аксіоми і теореми, ми повинні поставити питання:чи є гарантія, що твердження, які стоять у списку аксіом, не є логічним наслідком інших аксіом цього списку? Іншими словами,чи не може та чи інша аксіома бути доведеною, як теорема, і тому є зайвою в нашому списку аксіом. Тому маємо другу вимогу – вимогу *незалежності* або *мінімальності системи аксіом*.

<u>Означення 3.</u> Аксіома ω_i системи аксіом **Ω** простору П називається *незалежною* в **Ω**, якщо вона не є наслідком останніх аксіом системи **Ω**. Система аксіом **Ω** називається *незалежною*, якщо всі її аксіоми незалежні.

Розглянемо питання про доведення незалежності аксіоми ω_i, в системі аксіом **Ω**. Нехай $\mathit{\omega}$ – твердження, що є запереченням ω_i. Візьмемо систему аксіом Ω, яка одержується з системи **Ω** заміною в ній аксіоми ω_i, твердженням $\mathit{\omega}$

$$\mathbf{\Omega}=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{i-}, \omega_i, \omega_{i+}, ..., \omega_к\}$$

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{i-1}, \mathit{\omega}, \omega_{i+}, ..., \omega_к\}.$$

Припустимо, що існує модель системи аксіом Ω. В цій моделі виконуються всі аксіоми системи **Ω**, крім ω_i, і ,значить, в ній виконуються всі їх наслідки. Якби аксіома ω_i була наслідком останніх аксіом системи **Ω**, вона виконувалась би в моделі системи аксіом Ω. Отже, в одній моделі виконуються твердження ω_i і $\mathit{\omega}$ одночасно, що неможливо. Отже, аксіома ω_i не є наслідком останніх аксіом системи **Ω** і за означенням 3 вона незалежна в системі **Ω**.

Таким чином, щоб довести незалежність аксіоми ω_i в системі аксіом **Ω**, потрібно довести несуперечливість системи аксіом Ω, яка одержується з системи аксіом **Ω** заміною в ній аксіоми ω_i твердженням $\mathit{\omega}$, яке заперечує ω_i. Інакше, щоб довести, що деяка аксіома ω_i не є логічним наслідком останніх аксіом системи, потрібно побудувати таку модель, в якій реалізуються всі аксіоми даної системи, крім ω_i, а твердження ω_i не виконується.

Для доведення незалежності системи аксіоми потрібно побудувати стільки моделей, скільки є аксіом в системі, причому кожна модель повинна реалізувати всі аксіоми, крім тієї, яка досліджується на незалежність.

Розглянемо систему аксіом 1-4, наведену в пункті 2.2.1.

Приклад 1. Довести, що аксіома 1 не залежить від інших трьох аксіом.

За основні відношення і об'єкти візьмемо:

«Точки» – вершини тетраедра A, B, C, E. (рис. 2.2)

«Прямі» – ребра тетраедра [AB], [AC], [AE] (і тільки вони).

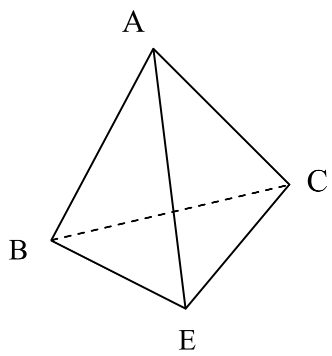


Рис. 2.2.

«Належність» – те відношення належності, в якому знаходяться вершини, ребра і грані тетраедра в евклідовій геометрії (у звичайному розумінні).

Аксіома 1 не виконується у цій моделі, оскільки для точок B і C не існує прямої, що їм належить (у розглядуваній моделі маємо лише три прямі (ребра [AB], [AC], [AE]), жодна з яких точкам B і C не належить).

Легко перевірити, що останні аксіоми виконуються.

Справді, для кожних двох вершин тетраедра існує не більше як одне ребро з трьох розглядуваних, яке проходить через кожну з цих вершин. Через вершини B і C також проходить не більше як одне з цих ребер (а саме: жодного з них).

Отже, аксіома 2 виконується.

Вимога аксіоми 3 також задовольняється, оскільки на кожному з розглядуваних трьох ребер [AB], [AC], [AE] лежить по дві вершини. Вершини A, B, C не лежать на одному ребрі.

Приклад 2. Показати незалежність аксіоми 2.

За основні об’єкти і відношення візьмемо:

«Точки» – вершини тетраедра ABCE.

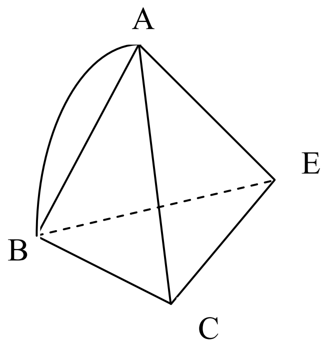


Рис. 2.3.

«Прямі» - ребра тетраедра і дуга АВ (рис. 2.3)

«Належність» - відношення належності в звичайному розумінні.

На цій моделі будуть виконуватися аксіоми наведеного списку, за винятком аксіоми 2. Аксіома 2 не виконується, оскільки через вершини А і В проходять дві прямі – ребро АВ і дуга АВ.

2.2.3. Повнота системи аксіом

Відносно несуперечливої і незалежної системи аксіом виникає питання: чи можна на основі даної системи аксіом без будь-яких додаткових передумов, без будь-якого звернення до наочних уявлень і до експерименту, довести або відкинути будь-яке твердження, що стосується даної математичної галузі, або, інакше, встановити «істинне» воно чи «хибне» відносно даної системи аксіом? Ця проблема називається проблемою *повноти* системи аксіом.

Якщо дана несуперечлива система аксіом деякої дедуктивної науки, то множину всіх тверджень, що стосуються понять науки, можна розбити на три категорії відносно даної системи аксіом:

1. Або твердження Т може бути доведене за допомогою даної системи аксіом, тобто є логічним наслідком цієї системи; говорять також, що воно є *істинним* в даній системі аксіом.

2. Або Т може бути відкинуте, тобто не тільки не може бути виведене з даної системи аксіом, але, навпаки, суперечить або якійсь аксіомі або істинному твердженню. Таке твердження є суперечливим, несумісним, *хибним* відносно даної системи аксіом.

3. Або Т, яке не суперечить даній системі аксіом, в той же час не є логічним її наслідком, тобто не може бути ні відкинуте, ні доведене. Це значить, що з даною системою аксіом сумісні два твердження Т і Т, які

суперечать одне одному. Таке твердження називається незалежним відносно даної системи аксіом.

На основі перших двох пунктів можна сказати, що твердження І-ої категорії реалізуються в усіх моделях (інтерпретаціях) системи аксіом; твердження ІІ-ої категорії не реалізуються ні в одній моделі даної системи аксіом, і твердження ІІІ-ої категорії реалізуються в одних моделях, але існують і такі моделі, в яких вони не реалізується.

Повнота системи аксіом означає, що на основі цієї системи по відношенню до кожного твердження Т, що стосується понять даної теорії, можна розв'язати питання : істинне воно чи хибне.

Таким чином, відносно повної системи аксіом кожне твердження даної теорії належить або до І-ої або до ІІ-ої категорії. Тверджень ІІІ-ої категорії не існує.

Прикладами неповної системи аксіом є система постулатів «Начал» Евкліда, система аксіом абсолютної геометрії (Аксіоми I-IV груп за Гільбертом, див. гл. 4).

Як же встановити , чи є дана система аксіом повною чи ні?

Критерії повноти системи аксіом можна дати за допомогою поняття ізоморфізму моделей.

Означення 4. Дві різні моделі однієї і тієї ж системи аксіом називаються *ізоморфними*, якщо між основними об'єктами цих моделей можна встановити взаємно однозначну відповідність, що задовольняє таким умовам: якщо ті чи інші об'єкти пов'язані яким-небудь з основних відношень в одній моделі, то відповідні їм об'єкти в другій моделі пов'язані однойменним відношенням.

З означення випливає:

якщо моделі m_1 і m_2 ізоморфні і яке-небудь твердження про об'єкти і відношення між ними істинне в m_1, то це твердження буде виконуватись і в моделі m_2.

Означення 5. Система аксіом називається *повною*, якщо будь-які дві її моделі ізоморфні.

Співставимо поняття повноти з поняттям несуперечності. Якщо несуперечливість гарантує, що відносно даної системи аксіом не можуть бути одночасно істинними два взаємно суперечливих твердження Т і Т, то повнота системи гарантує, що одне з них обов'язково буде істинним.

Інакше, несуперечливість виключає можливість доведення двох взаємно суперечливих тверджень, а повнота забезпечує доведення одного з них. Обидві вимоги разом дають гарантію розв'язності будь-якого питання теорії.

Відзначимо, що вказане раніше розуміння повноти системи аксіом в тому розумінні, що повна система аксіом повинна давати можливість або довести, або відкинути будь-яке твердження, що стосується понять даної дедуктивної теорії, не рівносильне, взагалі кажучи, розумінню повноти в смислі означення 5. Для деяких теорій, доведено, що вони, задовольняючи вимозі повноти в розумінні означення 5, в той же час не є повними в першому розумінні.

Зауважимо, що в багатьох посібниках з основ геометрії розрізняються поняття повноти в наведених вище випадках, при цьому вводиться поняття *категоричності* і *повноти*:

1) Аксіоматична теорія, будь-які дві моделі якої ізоморфні, називаються *категоричною*. Для категоричної теорії кожне висловлення, яке істинне в одній з її моделей, буде істинним і в будь-якій іншій моделі.

Евклідова геометрія є категоричною теорією. Прикладом некатегоричної теорії є теорія груп. Вона має різноманітні попарно не ізоморфні між собою моделі (наприклад, група паралельних перенесень не ізоморфна групі всіх переміщень евклідової площини).

2) Несуперечлива аксіоматична теорія називається *повною*, якщо будь-яке висловлення S, сформульоване в термінах цієї теорії, або його заперечення є теоремою цієї теорії.

Інакше кажучи, якщо в деякій моделі повної аксіоматичної теорії істинне висловлення S, то його можна вивести з аксіом даної теорії.

Виявляється, що ряд математичних теорій не мають властивості повноти. Як довів австрійський математик Гедель (1931), кожна несуперечлива формальна система, яка здатна виразити арифметику натуральних чисел, неповна, тобто вона містить висловлення, недовідні і водночас неспростовні її засобами. Але встановлення цього факту вимагає додаткових досліджень із залученням більш сильних формальних методів, що не входять зараз в наше завдання.

Надалі поняття повноти системи аксіом ми будемо розуміти в сенсі означення 5.

Контрольні запитання

1. Що таке математична структура?

2. Навести приклади математичних структур в алгебрі, геометрії, топології.

3. Що таке метатеорія?

4. Які вимоги ставляться до системи аксіом?

5. Яка система аксіом називається несуперечливою?

6. Як довести несуперечливість системи аксіом?

7. Яка система аксіом називається незалежною?

8. Як довести незалежність системи аксіом?

9. Яка система аксіом називається повною?

10. Як довести повноту системи аксіом?

Рекомендована література: [I, 5, 7]; [II, 3-5, 10, 13, 21].

Глава 3. Історичний огляд обґрунтування геометрії

Історію математики не можна відділити від загальної історії культури.

Математика є частиною духовного життя, глибоко пов'язаного не тільки з астрономією і механікою, а й з архітектурою і технікою, з філософією.

Б. Ван дер Варден

§ 3.1. Зародження геометрії

Перші геометричні уявлення виникли у людей, в епоху палеоліту (стародавній кам'яний вік, який тягнувся кілька сотень тисячоліть). В епоху пізнього пелеоліту люди прикрашали свої помешкання-печери малюнками і статуетками. З переходом від охоти і рибальства до землеробства люди вступили в епоху неоліту (новий кам'яний вік). Це відбулось біля 10 тисяч років назад. Почали виникати села і розвиватись ремесла (гончарне, ткацьке, столярне та ін.) і торгівля, що сприяло формуванню поняття числа. З'явилась необхідність вимірювати довжину, площу і об'єм предметів. Одиницями вимірювання, досить грубими і нестійкими, слугували частіше всього частини людського тіла.

Назви «лікоть», «стопа», «сажень» (відстань між кінцями пальців рук, розставлених на ширину плечей), «дюйм» (німецькою Daumen - великий палець; ширина цього пальця), «фут» (анг. Foot - нога, ступня) і т.п., переконують в тому, що одиниці вимірювання виникли з матеріальної практики.

Вже пізніше людина виділила «геометризовані» знаряддя, пластинки з кремнію, які мали форму трикутника, ромба або трапеції.

Залишки посуду неоліту – кошики, сітки свідчать про те, що у первісних людей цієї епохи геометричні відчуття були високо розвинуті. Геометричні орнаменти, в яких ми знаходимо рівність, подібність і симетрію фігур, є наслідком наслідування, адже цих понять, звичайно, у первісної людини ще не було.

Будівництво великих помешкань американських індійців та інше будівництво не могло обходитись без практичних знань зачатків механіки, без вміння проводити прямі під прямим кутом. Всі ці дії здійснювались натягуванням мотузки. Уявлення про пряму лінію тісно пов'язане з ткацтвом і прядінням, на що вказує, наприклад, споріднення слова «лінія» (з латинської мови) з назвою льону (лат. Linium, яке означало і льняну нитку і полотно, звідки «лінолеум»).

Особливий вплив на розвиток геометричних уявлень виявило землеробство. Якщо гончарна, ткацька, а також будівельна техніка вимагали в першу чергу вимірювання довжин, то для землеробства потрібно було вимірювання площ і об'ємів. Вимірювались площі земельних ділянок, ємкість посуду, об'єм землі, викопаної при земляних роботах. З тих джерел,які збереглись (папіруси, клинописи), можна зробити висновок, що одиниці вимірювання площ і об'ємів були пов'язані з матеріальними потребами суспільства. Виявляється, ієрогліф поняття «площа» тотожний з ієрогліфом «кількість зерна» (потрібного для посіву на ній), ієрогліф поняття «об'єм» з ієрогліфом «купа землі» (викопаної при зрошувальних роботах). Руська міра об'єму «відро» також вказує на конкретний практичний характер походження різних мір.

Вивчення історії геометрії ранньорабовласницької епохи основане на вивченні пам'яток писемності. Неоднорідність і неповнота знань про математику окремих народів цієї епохи залежить від якості та кількості пам'яток писемності, які збереглись. В Месопотамії записи робились на глиняних табличках,які потім обпалювали, завдяки чому вони пережили тисячоліття. В Єгипті для записів слугував папірус, хоча і не такий міцний, але все ж добре зберігся в сухому кліматі. Але в Індії та Китаї писали на корі і бамбуці (папір був винайдений китайцями лише в ІІ ст. н.е) – на матеріалах, які швидко руйнувались. Це привело до того, що головні наші знання відносяться до єгипетської і вавилонської математики, між тим стародавня математика Китаю та Індії вивчена значно менше. Про математику цього періоду народів Передньої Азії та американських народів майя, інків та ацтеків наші відомості досить неповні.

§ 3.2. Геометрія стародавнього Єгипту та Вавилону

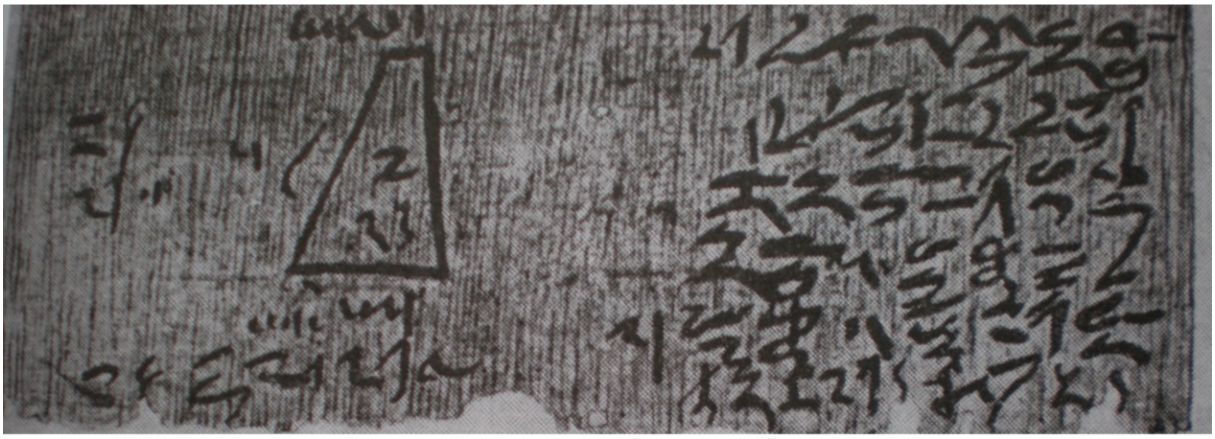
Побудовані в період біля 3600-2700 років до н.е. колосальні царські гробниці-піраміди свідчать, що математичні знання єгиптян знаходились на порівняно високому рівні. Про високий рівень математики стародавнього Єгипту говорять і будівництво каналів, дамб, водосховищ, обчислення періодів розливу річки Ніл, створення календаря, яким єгиптяни користувались ще в IV тисячолітті до н.е.

Знамениті єгипетські піраміди поблизу Гізи, що вважаються першим із семи чудес світу. На передньому плані - піраміда Менкаура (з трьома пірамідами-супутницями), в центрі - піраміда Хафра, на задньому плані - Велика піраміда Хуфу (або Хеопса), побудована приблизно у XXVI ст. до н. е. Довжина ребра основи найбільшої з них - піраміди Хуфу - становить 230 м, а її висота 146 м.

Збереглось ім'я легендарного архітектора і математика Імхотепа, перше ім'я в історії математики. Проте від цієї епохи залишились лише надписи, що не містять ніяких математичних даних,крім запису чисел і мір. У стародавніх єгиптян існувала десяткова система нумерації, причому були окремі числові знаки, починаючи з 1 до 10.

Обміри пірамід показали, що основні їх розміри виражаються в цілих числах «ліктів». Єгиптяни для вимірювання довжин не потребували дробів, які були необхідні в землевимірюваннях.

З математичних папірусів найважливішими є два: Лондонський (папірус Ахмеса або Рінда, названий так на честь першого його власника), який містить 85 задач і відноситься приблизно до 2000 р. до н.е., та Московський, який містить 25 задач, і відноситься приблизно до 1800 р. до н.е. Московський папірус був розшифрований академіками Тураєвим і Струве та виданий останнім у 1930 році.



Фрагмент Московського папірусу, який присвячений обчисленню об'єму зрізаної чотирикутної піраміди за даними її розмірами - висотою і сторонами квадратних основ

З цих папірусів ми дізнаємось, що єгиптяни виконували чотири арифметичні дії над додатними цілими числами, використовували окремі звичайні дроби та виконували їх додавання. (Це окреме питання, на якому ми не будемо зупинятись).

Пам'ятки стародавніх культур Вавилону та Єгипту показують, що в цих країнах геометрія мала грубо емпіричний характер і представляла собою сукупність часткових розв'язків окремих задач. З геометричних задач, поміщених в Лондонському і Московському папірусах, можна зробити висновок, що єгиптяни в II тисячолітті вміли точно обчислювати площу трикутника, трапеції та об'єми куба, паралелепіпеда, правильної чотирикутної зрізаної піраміди, кругового циліндра, площу круга діаметра d обчислювали як $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, що дає для π наближене значення 3,16.

Глиняні таблички вавилонян свідчать, що їм були відомі способи розв'язання геометричних задач, які ми зводимо до лінійних рівнянь з одним невідомим або системи лінійних рівнянь з багатьма невідомими. Так звана «теорема Піфагора» була відома більше, ніж за тисячу років до Піфагора. Вона слугувала джерелом задач на «квадратні рівняння», наприклад, обчислювали кількість зерна, потрібного для засіву поля, що має форму рівнобедреного трикутника з заданими сторонами.

Сам факт, що вавилонці знали «теорему Піфагора» свідчить про те, що вони мали досить високі геометричні знання. Вони широко користувались подібністю геометричних фігур, а тому не виключено, що саме за допомогою подібності вони змогли її довести. Великий інтерес проявляли вавилонці до «піфагорійських» трикутників, тобто до прямокутних трикутників з цілочисленними сторонами. Знайдена таблиця,що містить 15 таких трикутників.

У стародавніх вавилонян є ряд задач, що зводяться до розв'язання квадратних рівнянь, зустрічаються також задачі, які ми розв'язуємо за допомогою рівнянь третього степеня і особливих типів рівнянь четвертого, п'ятого і шостого степенів, які легко зводяться до квадратних або до кубічних рівнянь. Задачі типу $ax^3 + x^2 = c$ вавилоняни зводили до «нормального виду» $x^3 + x^2 = d$, а потім знаходили x за таблицями коренів цього виду рівнянь. Як це вони виконували - не встановлено до цього часу. Зовсім не розгаданим залишився спосіб розв'язання рівнянь виду $ax^3 + bx^2 + cx.=d.$

У 1950 році опубліковані Брейнсом розшифровані ним клинописні тексти, які свідчать про високий рівень геометричних знань стародавніх вавилонян. Це – задача на обчислення радіуса кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою, рівною 60, і сторонами, рівними 50, а також задача на знаходження радіуса кола, вписаного в правильний шестикутник. Для числа π наближене значення бралось 3,125.

Археологами було виявлено в північно-східній частині Месопотамії пам'ятки, які відносяться до четвертого тисячоліття до н.е., яким характерні геометричні орнаменти на глиняному посуді. Пізніше тут утворилась могутня ассирійська рабовласницька держава, що в середині другого тисячоліття до н.е. досягла свого розквіту. Ассирійці використали спадщину шумерів і вавилонську культуру, в тому числі і в галузі математики.

Проте питання про власний вклад ассирійців в математику ще не достатньо досліджений. Те ж саме можна сказати і про інші стародавні народи, які утворили раньорабовласницькі держави на Близькому Сході. Це і хетти, які заселяли східну частину Малої Азії і Північну Сирію. В Сирії і Фінікії в третьому тисячолітті до н.е. були широко розвинуті ремесла, морська і сухопутна торгівля, у них існувала алфавітна писемність і непозиційні системи нумерації.

Математичні знання фінікіяни і стародавні євреї запозичили у вавилонян та єгиптян. Для числа π, як про це свідчить «Старий Завіт», вони приймали значення 3.

Вавилонська математика була запозичена також стародавніми жителями Ірану.

Порівнюючи між собою розвиток математики в різних ранніх рабовласницьких державах, ми помічаємо, що, не дивлячись на специфічні особливості їх розвитку, головні риси були подібними. Під впливом практики поступово виникала елементарна математика, яка використовувала в неявному вигляді алгебраїчні методи. Математика в цей період носила емпіричний характер, більшість положень і правил були знайдені з багаторазового повторення одних і тих же операцій. І все ж і тоді вже в математиці були перші паростки абстрактних, теоретичних методів математичного мислення.

§3.3. Розвиток грецької геометрії до Евкліда

3.3.1. Характеристика стародавньогрецької математики

Грецькі рабовласницькі держави, які виникли в VIII-VI ст. до н. е., з'явились в результаті довготривалого процесу розпаду первісно-общинного ладу. Це були міста-держави – поліси. Головні з них утворились на середній частині західного узбережжя Малої Азії, в Іонії, як торгові центри на шляхах, які зв'язують Єгипет, Месопотамію і Скифію. Серед них видатне положення довгий час мав Мілет. На узбережжі самої Греції пізніше зайняв провідне місце Корінф, а потім Афіни, в Італії – Кротон і Тарент, в Сицилії – Сиракузи.

Грецькі поліси поступово переходили від рабовласницької тиранії до рабовласницької демократії, що була найпрогресивнішою на той час суспільною системою.

Потреби розвитку в полісах ремісницького виробництва і будівництва, прогрес сільського господарства і мореплавства вимагали розвитку наукових знань. Починаючи з VII ст. до н. е. зароджується в цих державах наука, в якій астрономічні, метеорологічні, математичні і медичні знання об'єднані в одне ціле з філософськими, політичними, географічними уявленнями. В цю епоху греки брали свої знання з єгипетських, вавилонських і фінікійських джерел. Характер цих знань був переважно практичний. Про це ми дізнаємося з робіт стародавньогрецького історика Геродота (біля 484-425 рр. до н. е.), великого мислителя Арістотеля (384-322 рр. до н. е.), коментатора Прокла (410-485 рр. н. е.) та ін.

Спочатку стародавньогрецька математика не відрізнялась принципово від єгипетської і вавилонської. Але з розвитком рабовласницької демократії, починаючи з VI ст. до н. е., в математичному мисленні греків все більше посилюється теоретична частина. Від практичної арифметики, що називалась «логістикою», і прикладної геометрії, яка у Архімеда дістала назву «геодезії», починають відділятись теоретична арифметика і теоретична геометрія, хоча вони не були тоді ще самостійними дисциплінами, а входили як складові частини в філософію. На відміну від практичних, теоретична арифметика і геометрія не тільки містили вказівки (правила), як розв'язувати задачі, але і давали обґрунтування правильності розв'язку.

В математиці, в політичних і судових суперечках потрібно було давати точні означення понять, розвивати чіткі доведення. Демокріт, що вніс значний вклад у розвиток грецької математики, був разом з тим і автором першої праці з логіки. «Начала» Евкліда і логіка Арістотеля за своїм духом взаємопов'язані і мають спільне історичне коріння. Філософи, що займались математикою, почали розуміти значення математики як науки, яка поряд з іншими науками повинна пояснювати людині явища для того, щоб вона використовувала їх в своїх цілях.

Остаточне виділення математики у самостійну теоретичну науку відбулося в Греції в середині V ст. до н. е., знайшовши своє завершення вже в елліністичну епоху в «Началах» Евкліда в III ст. до н. е. Як і для всієї грецької класичної літератури, так і для математичної, характерна невелика кількість оригінальних джерел.

З VI ст. до н. е. збереглось лише кілька джерел, що приписуються стародавнім авторам. Від V ст. до н. е. залишилось лише кілька фрагментів, і тільки, починаючи з IV ст. до н. е., є повні тексти. Деякі відомості про стан математичних знань у стародавніх греків в цей період можна одержати також з філософських творів Платона і Арістотеля.

3.3.2.Основні періоди розвитку грецької математики до Евкліда

Розвиток грецької математики до Евкліда можна розділити на три періоди у зв'язку з пересуванням центра розвитку грецької науки і філософії. Перший період розвитку грецької геометрії відноситься до VII-VI ст. до н. е. і пов'язаний з так званою іонійською школою в Малій Азії, засновником і головним представником якої є Фалес Мілетський.

Потім, в другий період, центр розвитку переноситься в Південну Італію (VI-V ст. до н. е.). Цей період характеризує школа Піфагора.

Третій період (IV ст. до н. е.) характеризується переміщенням центра розвитку в Афіни, найвидатнішими представниками якого є філософські школи Платона і Арістотеля і математики Евдокс Кнідський та Менехм.

Перший період розвитку грецької геометрії

Перший період розвитку геометрії у стародавній Греції є поворотним пунктом у розвитку геометрії. Геометрія в цей період із зібрання емпіричних і розрізнених правил для розв’язання вузько-практичних задач, які успадкували греки від народів стародавнього Сходу, в руках грецьких філософів почала поступово перетворюватись в науку. Греки вперше почали логічно доводити окремі положення геометрії у загальному вигляді. Був покладений початок наукового оформлення матеріалу,запозичений у єгиптян, зведення геометричних істин у струнку систему.

Це досягнення грецьких математиків мало важливе значення для розвитку геометрії. По-перше, загальне доведення геометричного твердження охоплювало всі можливі часткові випадки і тим самим не потрібна емпірична перевірка кожного окремого випадку. По-друге, цей процес логічної обробки геометричного матеріалу вказав на новий шлях відкриття геометричних фактів – шлях логічного доведення.

Був закладений початок створення дедуктивного або аксіоматичного методу в геометрії.

Фалес Мілетський

Центральною фігурою першого періоду розвитку геометрії був *Фалес Мілетський* (біля 600 р. до н. е.). За твердженнями Геродота, Демокріта і Платона, Фалес був фінікійського походження. Він був купцем в Мілеті, центрі заморської торгівлі на Йонійському узбережжі. Звідси в першій половині VI ст. до н. е. Фалес відправляється в подорож до Єгипту, де і ознайомився з математикою.

Поєднання зачатків природознавства та філософії з розв’язанням практичних задач привело до спроб моністичного пояснення світу. Фалес намагався пояснити різноманітність природи з єдиного начала, відшукати в хаосі явищ закономірність. На основі міфології стародавньої егейської культури Єгипту і Месопотамії Фалес взяв за першооснову всього – воду. Намагаючись дати розумні, логічні пояснення явищ, Фалес почав підходити і до математичних положень з вимогою не тільки висловити їх, але і довести.

Фалесу приписують доведення таких теорем:

1. Про поділ круга пополам його діаметром.
2. Про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника.
3. Про рівність вертикальних кутів.
4. Про рівність трикутників за стороною і прилеглими до неї кутами.
5. Кут, вписаний в півколо, – прямий.

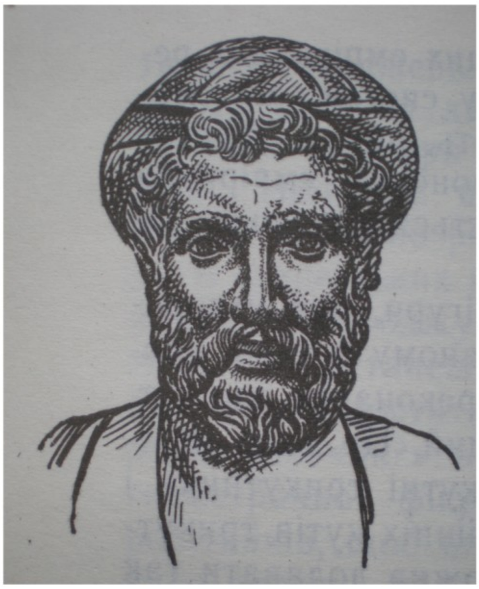
Так як і на батьківщині вчителів – єгиптян і вавилонян – вивчення математики і в Елладі тісно пов’язане з потребами практики. До VII-VI ст. до н. е. відноситься будівництво величних храмів Аполлона в Мілеті, Гери на острові Самос і Артеміди в Ефесі. Ці храми будувались десятиліттями, вимагали точних розрахунків і планів, а також застосування простіших механізмів. Математичні знання потрібні були і для суднобудування та мореплавства.

Фалесу приписують багато відкриттів, астрономічні знання, зокрема перше застосування циркуля і кутоміра, вимірювання висоти піраміди за довжиною її тіні та тіні самої піраміди, а також спосіб визначення відстані від берега до корабля.

Мілетська школа нараховувала багато філософів-математиків, проте про наукову діяльність більшості з них збереглось дуже мало відомостей. Продовжувачем ідей Фалеса був його співвітчизник, родич і учень *Анаксимандр* (біля 610-543 рр. до н. е.), автор твору «Про природу». Його також вважають автором твору з елементарної геометрії.

Другий етап розвитку стародавньогрецької геометрії

В кінці VI ст. до н. е. внаслідок греко-персидських воєн культурні центри Греції перемістились зі Сходу на Захід, в її південно-італійські колонії. В цій державі, яка була відсталою у порівнянні з Іонією, виникли ідеалістичні школи піфагорійців та елеатів.



Піфагор Самоський

Засновником школи,названої його ім'ям, був легендарний Піфагор (біля 570-500 рр. до н. е.), який народився на острові Самос. Філософія піфагорців намагалась обґрунтувати вічний і незмінний світовий порядок. Основу цього порядку вона шукала в числах. Їх піфагорійці протиставляли чуттєвим речам, приписуючи числам самостійне існування.

Піфагору приписують доведення таких важливих тверджень:

1. Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює двом прямим кутам.
2. Площину можна покрити правильними трикутниками, чотирикутниками і шестикутниками.
3. Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах (теорема Піфагора).

Піфагору приписується також відкриття геометричного способу розв'язання квадратних рівнянь; побудову многокутника, рівновеликого даному многокутнику і подібного другому; побудову зірчатого п'ятикутника; відкриття п'яти правильних многогранників (тетраедр, гексаедр, октаедр, додекаедр, ікосаедр); введення арифметичної, геометричної і гармонійної пропорцій, трикутних, досконалих і дружніх чисел.

Піфагорійське вчення, в якому вважалось, що цілі числа є мірою всіх речей, наштовхнулось на протиріччя завдяки відкриттю ірраціональності. Але саме це відкриття і є найбільшим вкладом піфагорійців в математику. Грецькою ірраціональність виражається трьома термінами: *«асиметрон»*, що означає те, що не має спільної міри, *«арретон»* – тобто те, що не виражається цілими числами, і *«алогон»*, що означає те, яке не виражається «логосом», тобто відношенням двох цілих чисел. Латинська назва *«ірраціональність»* є буквальним перекладом слова «алогон», так як «раціо» означає «відношення».

Отже, як бачимо з назв, піфагорійці під ірраціональними величинами розуміли перш за все прямолінійні відрізки, що не мають спільної міри, а тому не виражаються відношенням цілих чисел. Це відкриття греків виявило величезний вплив на подальший розвиток грецької математики. Грецькі математики не володіли поняттям ірраціонального числа, тому наявність відношень двох відрізків, що не виражаються раціональним числом, поклало різку межу між поняттями числа і неперервної величини, що виражається відрізком. Відомі грекам раціональні числа виявились недостатніми для вираження міри довільних відрізків. Це положення в математиці привело грецьких вчених до переконання, що геометрична неперервна величина є більш загальним поняттям, ніж число. Геометрія – більш загальна наука, ніж наука про число, вона повинна розвиватись незалежно від науки про число, займати панівне положення.

Геометрія греків не знає застосувань алгебри або арифметики до геометрії, а навпаки, ми маємо там справу із застосуванням геометрії до алгебри і арифметики.

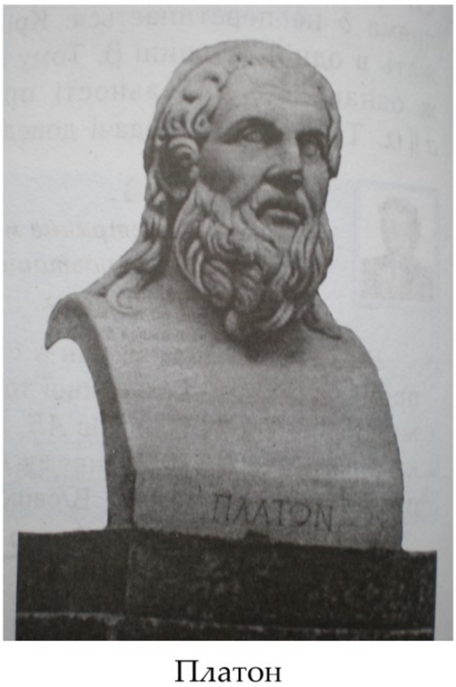
Розробка багатьох питань геометрії неминуче приводила грецьких математиків і філософів до поняття нескінченності і руху, до вчення про нескінченно малі. До таких питань відносились наближені обчислення несумірних величин, розгляд питань, пов'язаних із спрямленням кола і квадратури круга, за допомогою вписаних і описаних многокутників;

обчислення об'ємів і поверхонь круглих тіл та об'єму піраміди; філософська розробка основних понять геометрії (точки, лінії, поверхні) і зв'язків між ними. Видатну роль у розробці вчення про нескінченно малі в геометрії відіграла школа стародавнього атоміста Демокріта (біля 460-370 рр. до н. е.).

Один із перших істориків філософії Діоген Лаерцій (ІІІ ст. до н. е.) називає 70 творів Демокріта з різних питань природознавства, математики і філософії, з яких збереглись лише фрагменти. У своїх геометричних творах (їх шість) Демокріт, як свідчать Арістотель, Архімед та інші стародавні вчені, виходив з того, що точки - це атоми простору, які мають скінченний об'єм, і вважав, що кожен відрізок містить скінченне, хоча і надзвичайно велике число точок. Це уявлення було тісно пов'язане з геометричними уявленнями піфагорійців і Зенона. За допомогою цих уявлень Демокріт знаходив площі і об'єми багатьох фігур, зокрема об'єм піраміди.

Третій період розвитку стародавньогрецької геометрії (Афінський період)

Грецька математика, досягнувши високого рівня, в V ст. до н. е., наштовхнулась на такі труднощі, які могли бути усунені на шляху детального критичного перегляду всього нагромадженого матеріалу.



Платон

Перед вченими і філософами постало першочергове завдання виробити строгі наукові методи для доведення геометричних істин, звести їх в єдину струнку систему. При цьому вважалось, що строга побудова геометричної системи можлива лише при умові, якщо вона буде здійснена без залучення понять числа, нескінченності та руху.

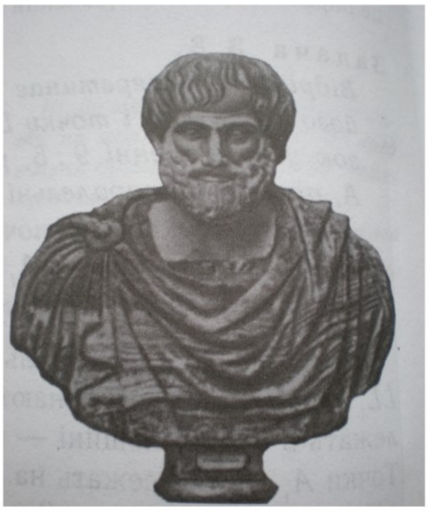
Це завдання було виконане в IV ст. до н. е. в основному завдяки філософським школам в Афінах *Платона* та *Арістотеля* і математичній школі *Евдокса*.

Постановку задачі про логічне обґрунтування геометрії пов'язують з ім'ям Платона (427-347 рр. до н. е.), учня Сократа, глави ідеалістичної філософської школи, афінської «Академії». Хоча сам Платон не був математиком, але він і його школа надавали математиці великого значення. Платон вважав, що для заняття філософією необхідні знання математики. Над входом в «Академії» був поміщений надпис: «Нехай той, що не знає геометрії, не входить сюди».

Платон вважав, що в кожній галузі знань необхідно виділяти основні поняття і твердження, з яких всі останні поняття і твердження повинні випливати як їх логічні наслідки.

Платон і платоніки вважали, що математичні об'єкти займають проміжне значення між чуттєвими речами і чистими ідеями. Лише ідеям вони приписують істинне існування, наділяючи їх єдиністю, вічністю і незмінністю, між тим як матеріальні об'єкти, що сприймаються відчуттями, були для них тінню ідей.

Загальний принцип логічної побудови науки у Платона не сформульований.



Арістотель

Чітке формулювання логічних принципів побудови математичної науки було дане найвеличнішим мислителем стародавнього світу Арістотелем (384-322 рр. до н. е.), геніальним учнем Платона. Арістотель (автор знаменитої фрази: «Платон – друг, але більш високий друг – істина») подолав містичні догми Платона, виявив його раціональну вимогу наукового обґрунтування будь-якого знання і кожної наукової діяльності. Він охопив майже всі доступні для його часу галузі знань, став основоположником наукового методу і багатьох наук. Головне досягнення

Арістотеля – створення науки про мислення, про способи одержання істини, створення логіки як науки. Його твори, присвячені логіці, більше 200 років пролежали в підвалах Малої Азії (зараз – територія Турції), в середині I ст. н. е. були повернуті Європі і видані Андроніком Родосським під загальною назвою «Органон». До його складу ввійшло п’ять творів: «Категорії», «Про тлумачення», «Перша аналітика», «Друга аналітика», «Топика».

У першому творі «Категорії» Арістотель встановлює десять категорій, в які, на його думку, вкладається все існуюче, все нами мислиме, як матеріальне, так і абстрактне. «Зі слів, висловлених без будь-якого зв’язку, кожне означає або сутність, або якість, або кількість, або відношення, або місце, або час, або положення, або дію, або володіння, або страждання» («Категорії», гл. 4).

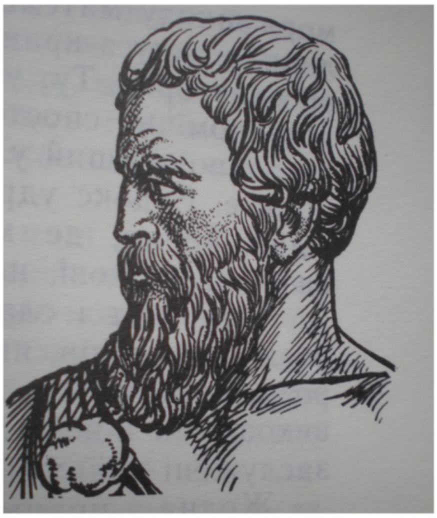
Найістотнішим для логіки в творі «Про тлумачення» є класифікація суджень за кількістю (загальне, часткове, одиничне), за якістю (позитивне і негативне), за модальністю (категоричні, безумовні) і гіпотетичні (тобто умовні).

Головним змістом «Першої аналітики» є теорія доведення, основою якої слугує розв’язана Арістотелем задача описання всіх правильних силогізмів (їх виявилось 16), тобто універсальних для людського мислення способів міркувань. Ця теорія виявилась настільки досконалою, що наступні 2000 років, по-суті, нічого нового в неї не внесли, і вона на весь цей період стала надійним фундаментом для розвитку дедуктивних наук.

«Друга аналітика» і деякі глави «Топіки» присвячені теорії пізнання, теорії побудови науки.

Наука, за Арістотелем, є послідовність тверджень, що відносяться до деякої галузі. Серед цих тверджень є основні або вихідні,які настільки очевидні, що не потребують доведень. Це – аксіоми. Останні твердження повинні бути доведені на основі цих аксіом. Це – теореми. Поняття, які входять в ці твердження, в свою чергу, поділяються на основні поняття, які безпосередньо очевидні і не допускають означень, і поняття, яким дається означення. Точка зору Арістотеля на означення понять особливо чітко виражена в «Топіці»: означення поняття здійснюється шляхом його включення в найближче родове поняття і вказівки видових відмінностей.

Основних понять при побудові науки повинна бути достатня кількість в тому розумінні, що всі вторинні поняття можуть бути означені за тим правилом означення, яке сформульоване вище. Нарешті, основних тверджень повинно бути також достатньо в тому розумінні, що для доведення останніх тверджень (теорем) вимагаються тільки правила логіки. Ця наукова доктрина Арістотеля була взята як керівництво до дії передусім математиками. І коли через півстоліття з'явилась геніальна праця Евкліда «Начала», то в її структурі явно проглядалась схема Арістотеля.



Евдокс

Велике значення для розвитку геометрії мають праці грецьких вчених Евдокса і Менехма. Евдокс (408-355 рр. до н. е.) був не тільки видатним математиком свого часу, але й астрономом, який під час свого перебування в Єгипті засвоїв єгипетські астрономічні знання, побудував обсерваторію в Кніді і створив першу чисто математичну теорію руху планет. Найважливішим вкладом Евдокса в математику є його теорія пропорцій. Після відкриття несумірності піфагорійська теорія, основана на розумінні відношення двох відрізків, як відношення двох цілих чисел, а тому придатна лише для сумірних величин, не могла далі слугувати для розв'язання геометричних задач. Тому геометри намагались уникнути відношень, замінюючи їх, де тільки можливо, іншими методами. Це знайшло своє відображення в «Началах» Евкліда, перші чотири книги яких обходяться без відношень, а замість них застосовуються досить кмітливі прийоми. Пізніше, в 6-й книзі, Евклід використовує вчення Евдокса про відношення, яке він викладає в 5-й книзі. З теорією відношень Евдокса можна ознайомитись в [V, 8].

Теорія відношень Евдокса тісно пов'язана з іншим вкладом Евдокса в математику, з методом, який у VIII ст. одержав назву *методу вичерпування*. Метод вичерпування оснований на такому припущенні: «Якщо від деякої величини відняти половину або більше і з залишком проробити ту ж операцію, і так поступати все далі, то можна одержати таку величину, яка буде менша заданої величини». Метод вичерпування дозволяє розв'язати задачу вимірювання об'єму піраміди, конуса, кулі.

Метод вичерпування дав можливість грекам доводити твердження геометрії, пов'язані з нескінченними процесами, так, щоб заборонене поняття нескінченності ніде в міркуваннях не фігурувало, і значить, цим шляхом воно ніби «виганялось» з геометрії.

Учень Евдокса Менехм (360 р. до н. е.), розв'язуючи задачу подвоєння куба, відкриває конічні перерізи.

Ще задовго до Евкліда з'явилась ідея створення систематичних праць з геометрії, в яких робилась спроба дедуктивного принципу побудови науки.

Такими були твори Гіппократа Хіоського (V ст. до н. е.), Февдія Магнезького (IV ст. до н. е.) та ін., які до нас не дійшли.

§3.4. «Начала» Евкліда та їх роль у розвитку геометричних знань

Філософський розум стародавніх греків
був схильний до строгих абстрактних
міркувань і строгих висновків,неперевершені
зразки яких дійшли до нас у творах Евкліда,
Архімеда та Аполлонія.

Олексій Крилов

Твір Евкліда житиме ще довго після того,
як усі підручники наших днів будуть
замінені іншими і забуті. Це одна з найчудовіших
пам'яток античності

Томас Хізс

Велике історичне значення «Начал» Евкліда
полягає в тому,що вони передали наступним
часам ідеал цілком логічної обробки геометрії.

Ф.Клейн

3.4.1. Еллінізм

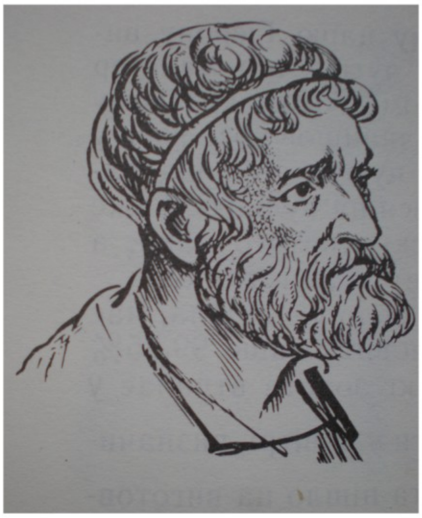
В кінці IV ст.до н. е., після походів Олександра Македонського, була створена величезна,але не довговічна імперія, яка включала Грецію,Єгипет, Месопотамію, Персію, Передню Азію, Причорномор'я та інші країни Середземномор'я та Близького Середнього Сходу. Після смерті Олександра його імперія розпалась на державу Птолемеїв в Африці, державу Селевкидів в Азії та ряд дрібних держав. Проте спілкування різних народів імперії Олександра мало виключне значення на розвиток культури в цих країнах. Вчені цих країн засвоюють наукові результати одне одного і перш за все грецької науки. Грецька мова і багато звичаїв греків поширюються серед освічених кіл в усіх цих країнах. Ці кола,як говорять,піддаються еллінізації. Країни,в яких мала місце така еллінізація, називають еллінистичними країнами, а весь період існування цих країн називають періодом еллінізму.

Період еллінізму продовжувався до завоювання еллінистичних держав Римом, що закінчився в 1 ст. до н.е. Великими центрами культурного життя еллінистичних країн були Александрія, Антиохія, Пергам і острів Родос.

3.4.2 Александрійська школа

Александрія була заснована Олександром Македонським у 332-331 рр. до н.е. в Єгипті і стала пізніше столицею держави Птолемеїв (Птолемей-воєначальник Македонського). Тут зосереджувались багатства,награбовані під час походів, тут, на перехрещенні торгівельних шляхів Сходу і Заходу, розвивалась морська торгівля, процвітали ремесла. На відміну від класичної грецької культури, александріївська культура характеризувалась більшою спеціалізацією, індивідуальними особливостями. Центром науки був Александрійський музей з Александрійською бібліотекою,в основу якої була покладена бібліотека Арістотеля. В Александрії вперше з науки, яка об'єднувала філософію, математику і природознавство, почали виділятись окремі самостійні науки. Це були астрономія,математика і механіка.

Розвиток будівництва військових кораблів, бойових башт і таранів, зведення укріплень, маяків, створення географічних карт, впорядкування календаря - все це вимагало розвитку механіки, астрономії, а, значить, і математики. Математика знаходила все більше застосування на практиці. Математика вже поділялась на арифметику і геометрію,з одного боку, і на логістику та геодезію - з другого.



Аполлоній Пергський

Математика александрійської культури,що поширювалась не лише на Єгипет, але і на всі елліністичні країни досягла найвищого ступеня розвитку математики стародавнього світу. В 3 ст. до н.е. Александрія, яка зібрала звідусіль вчених, дала таких видатних математиків як Евклід, Ератосфен, Аполлоній Пергський. До числа цих вчених належав і Архімед,не дивлячись на те,що він не залишав рідних Сиракуз.

За своїм науковим рівнем, за широтою охоплення предмета, за глибокою обґрунтованістю його трактування математика цього періоду залишила далеко позаду попередні,навіть найвищі досягнення вавилонян,єгиптян і самих греків.

3.4.3 «Начала» Евкліда

Евклід

Спроби викласти найважливіші математичні знання в певному порядку,зв'язку і послідовності належали Гіппократу Хіоському,потім вони продовжувались Леоном, Тевдієм (V ст. до н.е.). Лише Евкліду вдалося завершити роботи своїх попередників.

Біографічних даних про життя Евкліда майже не збереглося. Відомо, що народився він в Афінах, жив в Александрії при

Птолемеї I, царювання якого припадає на 306-283 роки до н. е. Прокл (410-485рр. н.е) розповідає, ніби-то Птолемей запитав Евкліда, чи немає коротшого шляху для розуміння геометрії, ніж той, який викладений в «Началах», на що Евклід відповів: «В геометрії немає царського шляху!» Вважають, що Евклід вчився в Афінах. Більшість афінських геометрів були послідовниками Платона, проте цього не можна сказати про Евкліда. Як розповідає Папп (друга половина II ст.н.е.), Евклід заснував в Александрії свою школу. Зміст «Начал» свідчить про велику повагу їх автора до традиції, так як він зберіг в них деякі поняття, які в його час не вживались.

Хоча Евклід є автором ряду творів,в історії математики він увійшов перш за все як творець «Начал», грецькою «Σ οἱ ʹετα», що значить стихії, елементи (латинською цей твір називається «Elementa»).

Евклід представляє Птолемею свої «Начала»

«Начала» Евкліда складаються з 13 книг (глав), у зміст яких входить перш за все вивчення геометричних фігур на площині(1-4 книги) і, поскільки для цього потрібні числа, то і вчення про цілі (додатні) числа і дроби (4-9 книга). Відношення просторових фігур не завжди виражається раціональними числами, тому вивчаються також несумірні геометричні величини (10 книга). Потім дослідження переноситься у простір (11-13 книги). Таким чином, в «Началах» викладені основи планіметрії, стереометрії і арифметики.

Головна особливість «Начал» в тому, що вони побудовані за єдиною логічною схемою, яку розробив Арістотель.

Геометричне твердження,якщо воно повне, складається з шести частин:

1) формулювання в загальних виразах; 2) постановка, яка вказує конкретні дані,як правило,зображені у вигляді фігури; 3) визначення або вказівка (діорисмос), в якій вказується,що треба зробити або довести; 4) побудова, в яку входять додатки, що необхідні, для проведення доведення; 5) саме доведення; 6) висновок, який повертається до формулювання і так само, як і він, висловлюється в загальних виразах.

Висновок не залежить від часткової фігури,яка є лише представником цілого класу таких фігур. В окремих твердженнях можуть бути відсутніми деякі з шести частин.

«Начала» справедливо вважається зразком дедуктивної системи, яка строго витримує виклад від загальних положень до часткових. Проте це зовсім не означає, що індукція в «Началах» відсутня, як стверджують окремі історики математики і філософи.

Індукція, рух від часткового до загального, від одиничних даних чуттєвого досвіду до раціонального узагальнення, до абстракції неминуче брала участь в утворенні основних понять, їх означень, постулатів і аксіом, адже всі геометричнні поняття і логічні прийоми виникли в результаті багаторазового досвідного повторення як відображення предметів, властивостей і зв’язків дійсного матеріального світу. Індукція входить в неявному вигляді в будь-яке геометричне доведення і побудову. В «Началах» прослідковується єдність аналізу і синтезу, використання апагогічного методу (доведення від супротивного), який є різновидністю аналізу.

Кожна книга «Начал» починається з означень, понять, які вперше в ній зустрічаються. Характер означень у Евкліда різний. У більшості вони описують поняття, наприклад, «точка є те, що не має частин» (гл 1). Проте зустрічаються і номінальні (словесні) означення, які, як і перші, не мають відношення до доведень, вони логічно не дійові. Евклід використовує також генетичні та аксіоматичні означення.

У першій главі сформульовано п'ять постулатів і 9 аксіом, з яких Евклід повинен був розвинути всю геометричну систему виключно логічним шляхом. З сучасної точки зору, відмінностей між постулатами і аксіомами немає, і всі вони можуть називатися аксіомами.

Далі у 13 книгах доводиться 470 тверджень, які слідують одне за одним без будь-яких пояснень і міркувань про значення тієї чи іншої теми, твердження або про хід доведення. Ця одноманітна манера викладу, переобтяжена різними частковими випадками, є однією з причин негативного ставлення в нові часи до «Начал» Евкліда як до навчального керівництва у шкільному викладанні.

Зупинимось детальніше на першій книзі «Начал». В ній викладається вчення про відрізки, кути, трикутники,про перпендикулярні прямі, будується теорія паралельних прямих,вивчається паралелограм,розглядаються властивості рівноскладених паралелограмів і трикутників. Закінчується книга теоремою Піфагора (47 твердження) і оберненою до неї теоремою (48 твердження).

Починається перша книга з 23 означень. Наведемо окремі з них:

1. Точка - те,що не має частин.
2. Лінія - довжина без ширини.
3. Кінці ж лінії-точки.
4. Пряма лінія є та,яка рівнорозміщена по відношенню до точок на ній.
5. Поверхня є те,що має тільки довжину і ширину.
6. Кінці поверхні - лінії.

7. Плоска поверхня є та, яка рівнорозміщена по відношенню до прямих на ній.

В означеннях 10, 11, 12 роз’яснюються поняття прямого, тупого, гострого кутів. В означеннях 15-22 - поняття круга, центра круга, діаметра круга, півкруга, многокутника, рівностороннього і рівнобедреного прямокутного трикутників, прямокутника, квадрата, ромба, паралелограма. Останнє 23 означення –це означення паралельних прямих.

Після означень йдуть постулати. Їх п’ять.

Припустимо:

1. Що від кожної точки до кожної точки можна провести пряму лінію.
2. І що обмежену пряму можна неперервно продовжувати по прямій.
3. І що з кожного центра кожним розхилом можна описати круг.
4. І що всі прямі кути рівні.
5. І що пряма,яка падає на дві прямі,утворює внутрішні з однієї сторони кути, всумі менше двох прямих,то продовжені ці дві прямі необмежено зустрінуться з того боку, де ця сума менше двох прямих.

За постулатами йде формулювання дев’яти аксіом:

1.Рівні одному і тому ж рівні.

2. І якщо до рівних додаються рівні, то і цілі будуть рівні.

3. І якщо від рівних віднімаються рівні, то і залишки будуть рівні.

4. І якщо до нерівних додаються рівні, то цілі будуть нерівні.

5. І подвоєні одного і того ж рівні між собою.

6. І половини одного і того ж рівні між собою.

7. І ті,що суміщаються один з одним рівні між собою.

8.І ціле більше частини.

9. І дві прямі не містять простору.

Після аксіом Евклід в першій главі формулює і доводить 48 тверджень, причому до тверджень відносяться як теореми, так і задачі на побудову. Розглянемо доведення першого твердження, даного Евклідом.

Твердження 1. На даній обмеженій прямій побудувати рівносторонній трикутник.

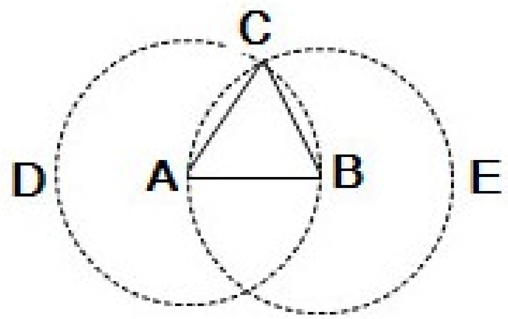


Рис. 3.1.

Нехай дана обмежена пряма буде АВ (рис. 3.1). Вимагається на прямій побудувати рівносторонній трикутник.

З центра А розхилом АВ опишемо круг ВСD (постулат 3) і потім з центра В розхилом ВА опишемо круг АСЕ (постулат 3) і з точки С, в якій круги перетинають один одного,проведемо до точок А і В прямі СА, СВ (постулат 1). Так як точка А є центр круга СВD, то АС рівна АВ (означення 15 круга). Аналогічно ВС рівна ВА (В-центр круга АСЕ). СА=АВ СВ=АВ звідси випливає, що СА=СВ(аксіома 1)

Отже, три прямі СА, СВ, АВ рівні між собою. А тому трикутник АВС рівносторонній (означення 20). Значить, на даній обмеженій прямій побудований рівносторонній трикутник АВС, що й треба було довести.

В інших твердженнях наводяться доведення ознак рівності трикутників,існування бісектриси кута, середини відрізка, вивчаються властивості паралельних прямих, рівноскладених трикутників, паралелограмів; доводиться, що зовнішній кут трикутника більший внутрішнього, який з ним не суміжний, нерівність трикутника, виконуються задачі на побудову кута, рівного даному, перпендикуляра до даної прямої,квадрата на даному відрізку, тощо.

Книга 2 містить 14 тверджень ,в яких, в основному, дається геометрична алгебра греків. Наприклад, в твердженнях $ab+a(a-b)=a^2$; $4ab+(a-b)^2=(a+b)^2$

добутки відрізків - це не добутки чисел, а площі прямокутників, побудованих на цих відрізках.

Книга 3, що складається з 37 тверджень, цілком присвячена вченню про круг.

В книзі 4, що складається з 16 тверджень, Евклід розглядав фігури, вписані в круг або описані навколо нього. З правильних многокутників, вписаних в круг, крім побудов квадрата, п'ятикутника (за допомогою золотого перерізу) і шестикутника, вказана побудова правильного п'ятнадцятикутника.

Таким чином, в 1-4 книгах детально викладається основи планіметрії.

Евклід в «Началах» виступає не лише в ролі систематизатора і упорядника. Особистий творчий вклад Евкліда в цьому творі надзвичайно великий. Гігантське завдання систематизації різноманітного матеріалу, яке він так блискуче виконав, саме по собі було під силу лише видатному вченому. Багато оригінальних доведень було дано самим Евклідом, а тому не може бути сумніву, що автор цієї прекрасної праці був великим геометром.

3.4.4. Критика «Начал» Евкліда

З сучасної точки зору ми знаходимо логічні недоліки як в означеннях, так і (найбільше) в системі аксіом. Як відомо, до побудови і змісту математичних понять ставлять такі важливі вимоги. По-перше, всі геометричні поняття повинні бути строго розподілені на дві категорії:на основні поняття, що приймаються без означень (їх властивості повинні знайти своє розкриття в аксіомах), і на похідні поняття, які вводяться за допомогою означень, що пов'язують ці поняття з основними.

По-друге, розкриваючи зміст певного поняття,означення одночасно повинно задовольняти ще одному призначенню: воно повинне слугувати опорою для логічного доведення всіх інших ознак, що характеризують це поняття, не вказаних в означенні. Наприклад, означення діаметра кола дозволяє довести, що він ділить коло пополам або що вписаний кут, який спирається на діаметр, є прямий кут, і т.д.

По-третє, кожне означення, зводячи нове поняття до вже знайомих, будується за принципом вказівки роду й видової ознаки. Це означає, що в означенні необхідно вказати те спільне, раніше відоме поняття (рід), до якого в якості часткового випадку відноситься означуване поняття, і істотну ознаку (вид), яка виділяє це поняття з усіх інших, що входять в родове поняття.

По-четверте, означення не повинно бути перевантаженим ознаками поняття, що означається, в ньому не повинно бути «зайвих» ознак, наявність яких може бути доведена на основі самого ж означення.

І нарешті, якщо одному і тому ж поняттю даються два різних означення, то необхідно дати доведення їх рівносильності, тобто показати, що ознака поняття, що фігурує в першому означенні, логічно випливає з другого означення, і навпаки.

Кожне означення нового поняття повинно супроводжуватись теоремою існування, в якій було б строго доведено, що новий об’єкт, який означається, дійсно існує.

Тому аналіз означень Евкліда дамо, виходячи саме з таких вимог до означень.

1. У Евкліда немає чіткого переліку основних понять. Він дає означення таких понять, як точка, пряма, площина. Але це неможливо. З сучасної точки зору багато означень Евкліда незадовільні. В означеннях понять точки, лінії, поверхні використовуються поняття «частина», «довжина», «ширина».Останні поняття значно складніші, ніж поняття лінії.
2. У Евкліда є різні означення понять точки та лінії, проте їх еквівалентність не доводиться.
3. Істотним недоліком деяких означень Евкліда є їх нечіткість (туманність). Такими означеннями є наприклад, означення 4 прямої, означення 7 площини (книга 1). Ці поняття не мають математичного

змісту. Вони логічно не використовуються, а тому можуть бути виключені. Означення Евкліда є, по-суті, спробою дати наочний опис понять про точку, лінію, поверхню, пряму і площину, понять, що є надзвичайно абстрактними.

Що стосується означень похідних понять у Евкліда, то вони цілком відповідають своєму призначенню. Але в окремих означеннях похідних понять зустрічається наявність зайвих тверджень. Евклід в «Началах» користується поняттями, яких немає в списку його означень.

У Евкліда наводяться аксіоми і постулати, як твердження, що приймаються без доведення. З сучасної точки зору відмінності між постулатами і аксіомами немає, і всі вони можуть називатись аксіомами.

Серед перелічених п'яти постулатів 4-ий може бути доведений, а тому відноситься до теорем.

5-ий постулат містить зайву вимогу, щоб прямі, про які йде мова в ньому, перетинались з того боку,з якого сума внутрішніх односторонніх кутів менша двох прямих. Аксіоми 1-6 містять твердження, які стосуються будь-яких величин, в тому числі і геометричних. Проте з сучасної точки зору, ця система аксіом неповна. З іншого боку, аксіоми 5, 6 є наслідками перших.

В «Началах» Евклід користується і такими поняттями, які не містяться у списку його означень. Система постулатів і аксіом не повна,а тому у доведеннях доводиться користуватись наочністю, інтуїцією, що недопустимо для дедуктивного принципу побудови теорії. Можна сказати,що міркування Евкліда є суміш логіки і інтуїції.

Що стосується недоліків «Начал»,то потрібно підкреслити, що ці недоліки у великому творінні Евкліда в основному були помічені критичною думкою лише у XIX ст, що розробка основ геометрії є однією з найглибших і найважчих проблем математики. Тому відмічаючи те, що з сучасної нам точки зору не вистачає у творі Евкліда, ми не можемо звинувачувати його, якщо врахуємо стан науки в його час. Навпаки,ми повинні визнати цей твір стародавнього світу прекрасним за своєю продуманістю, строгістю для тієї епохи.

3.4.5. Історичне значення «Начал»

В історії людства неможливо вказати яку-небудь іншу працю, яку б можна порівнювати з «Началами» Евкліда по часу свого впливу на культуру і науку цивілізованих народів, по тій ролі, яку протягом двох тисячоліть відігравали «Начала» Евкліда як наукове і педагогічне керівництво,як джерело наукових ідей, що стимулює до подальшого розвитку творчої математичної думки. Ні для якої іншої науки ми не маємо такого безприкладного історичного факту, коли підручник стародавнього часу залишався б в ролі підручника протягом тисячоліть,як це мало місце з «Началами» Евкліда. «Начала» пережили крах греко-римської цивілізації і середньовіччя. Через арабів і Візантію вони дійшли в різних перекладах і списках до епохи Відродження. Першу спробу перекладу праці Евкліда з арабської мови на латинську зробив італієць Герард з Кремони в Ломбардії (1114-1187). Новий переклад «Начал» через століття зробив математик і астроном Джованні Кампано з Навари. Він і послужив оригіналом для першого друкованого видання у Венеції в 1482 році цієї капітальної праці.

Перекладені на всі мови «Начала» Евкліда аж до кінця XVIII ст. залишились єдиним підручником, за яким вивчали геометрію в університетах і школах Європи, єдиним джерелом геометричного пізнання. З тих пір «Начала» витримали більше 500 видань.

За цією книгою вивчали математику Коперник, Галілей, Декарт, Ньютон, Ейлер, Ломоносов, Лобачевський та інші корифеї науки.

Про безроздільний авторитет «Начал» Евкліда і про те захоплююче благоговіння,з яким ставились до цього твору вчені Європи,можна судити з висловлювання видатного італійського вченого XVI ст. Кардано: «Незаперечна міцність їх догматів та їх досконалість настільки абсолютні,що ніякий інший твір по справедливості не можна з ними порівнювати. В них відображається таке світло істини, що, мабуть, тільки той здатний відрізнити у складних питаннях геометрії істинне від хибного,хто засвоїв Евкліда».

«Начала» не є підручником для середніх шкіл. Тим не менше, протягом багатьох століть саме вони і, перш за все, перші шість книг з 13 були покладені в основу шкільного викладання геометрії. Проте питання про самий підручник не було вирішене.

При появі навчальних закладів з розвинутим курсом математики, як, наприклад військові і морські школи Росії, знову звернулись, перш за все, до Евкліда. Цим пояснюється велика кількість перекладів праці вченого на російську мову саме у XVIII ст. У 1739 році вийшов у світ переклад «Начал» (з латинської) під редакцією Е. Фархварсана. Потім їх тричі перекладали: І.Сатаров (1739), М.Курганов (1769, з французької), В.Нікітін і П.Суворов (1784,з грецької). Проте в Росії переклад Евкліда ніколи не був використаний як безпосередній підручник. Л. Ейлер та його учні, удосконалюючи навчальні курси, зробили рішучий перехід від догматичного і дедуктивного методів. Вони надавали також великого значення прикладним питанням математики, які зовсім відсутні у Евкліда.

У XVIII-XIX століттях було написано багато шкільних підручників з геометрії, в яких дещо спрощувався виклад матеріалу, але їх автори в більшій чи меншій мірі наслідували Евкліда, зберігаючи дедуктивну структуру побудови курсів.

Тому перекладали і коментували «Начала» і в XIX столітті. Так, у 1835 році з'явився переклад з грецької Ф. Петрушевського, а у 1877 році-переклад з німецької.

У 1880 р. переклад «Начал» з коментарями до них зробив професор Київського університету Ващенко-Захарченко.

Аналіз «Начал» Евкліда у наш час проводиться за перекладом (1950р.) з грецького тексту Гейберга Д. Д. Мордухай-Болтовського (1876-1952).

Історичне значення «Начал» Евкліда полягає, по-перше, в тому, що вони є завершенням, вінцем всього нагромадженого працями кількох поколінь стародавніх грецьких математиків і філософів,що в них, як у фокусі, зібрані досягнення геометрії за величезний період культурного розвитку людства.

По-друге, «Начала» слугували джерелом, з якого черпали і на якому формувались уми багатьох видатних вчених в наступні два тисячоліття, і були основою для подальшого розвитку геометричних ідей.

«Начала» Евкліда тісно пов’язані з сучасною людською культурою: з одного боку, всі сучасні шкільні підручники геометрії, за якими вчаться в школах всіх країн,так чи інакше мають своїм прообразом «Начала». З іншого, в основі всіх фізико-математичних наук - астрономії, механіки, фізики, техніки - лежить геометрія Евкліда.

Нарешті, велике історичне значення «Начал» Евкліда, як підкреслював Ф. Клейн, полягає в тому, що вони передавали наступним часам ідеал цілком логічної обробки геометрії. «Начала» органічно пов’язані з розвитком обґрунтування математики взагалі і геометрії, зокрема.

Перші підручники XVIII ст. ставили за мету пристосовувати геометричні відомості для практичних потреб. Такими були підручники Г. В. Крафта «Коротке керівництво до теоретичної геометрії» (1748р.) М.Курганова «Генеральна геометрія» (1765р.)

У 1786 році М. Головіним було опубліковане «Критичне керівництво до геометрії», що призначалось для народних училищ. Головна увага приділялась наочності, а не логіці, задачам, пов’язаним з вимірюваннями.

Вчені намагались удосконалити викладання геометрії. Так академік С. Гур’єв опублікував в Санкт-Петербурзі (1798) роботу, в якій критикував виклад геометрії в «Началах» Евкліда. Він також критично ставився до підручника «Начала геометрії» Лежандра, який мав вплив на викладання дисципліни в той час. Принциповим було питання: яким повинен бути виклад геометричного матеріалу (синтетичним чи аналітичним)? Ідеї С. Гур’єва знайшли відображення в підручниках XIX ст., зокрема «Ручна математична енциклопедія» (13 книг, 1826-1837рр.) Д. Перевощикова.

В першій половині XIX ст. в Росії впроваджувалась в життя шкільна реформа, якою передбачалось відкриття училищ, гімназій, університетів.

На початку XIX ст. в Росії було лише 2 університети:Московський і Дерптський. У 1804 р. - відкрились університети в Казані і Харкові, пізніше-Петербурзький(1819), Київський (1834).

Навчальні заклади поповнювались національними кадрами, які внесли свій вклад у створення посібників і підручників з геометрії.

Серед них слід в першу чергу назвати М. І. Лобачевського. У навчальному курсі геометрії він надавав важливе значення пропедевтиці,вважав за необхідне поєднувати навчання геометрії з практичними справами, відзначав важливість науковості і строгості викладу, доступного в умовах школи. У 1823 р. Лобачевський підготував курс елементарної геометрії, у 1829 р. – підручник з геометрії, який був опублікований лише в 1909 році.

Лобачевський проводив виклад питань планіметрії паралельно з стереометрією, що є актуальним і в наші дні.

Підручники з геометрії в Росії впродовж довгого періоду писались,особливо не відрізняючись від «Начал геометрії» Лежандра та «Начал» Евкліда.

Хорошим керівництвом для гімназій був підручник («Керівництво початкової геометрії») Буссе, що з'явився у 1844 р. Елементарна геометрія вперше була представлена в тому вигляді, в якому вона в основному вивчається сьогодні. Буссе ввів звичний сьогодні поділ матеріалу на дві частини-планіметрію і стереометрію. До нього окремо розглядалась, як ще одна частина, лонгіметрія.

У другій половині XIX ст. найпоширенішим керівництвом з геометрії була «Елементарна геометрія в обсязі гімназійного курсу» Давидова (1864р.)

Вона витримала 39 видань (останнє у 1922 р.). Ясність і стислість викладу, велика кількість вдало підібраних задач відрізняли керівництво Давидова від інших підручників з геометрії.

Подальше оновлення навчальної літератури з геометрії, що почалась з середини 80-х років XIX ст.., перш за все пов'язане з діяльністю А. П. Кисельова (1852-1940). Його підручник «Елементарна геометрія» (1892) завдяки простоті і загальнодоступності викладу був найбільш поширеним керівництвом протягом більше 70 років.

У 70-ті роки минулого століття в школах СРСР планіметрія вивчалась за навчальним посібником, створеним авторським колективом під керівництвом академіка А. М. Колмогорова (А. М. Колмогоров, О. Ф. Семенович, Р. С. Черкасов. Геометрія: навч. посіб. для 6-8 кл. середньої школи. – К.: Рад. школа, 1973). За основні поняття були прийняті поняття: точка, пряма, площина, відстань між двома точками. За основні відношення: «лежить на», «лежить між», «рух». Система аксіом, на якій побудована геометрія, у ході викладення матеріалу не сформульована, хоча у додатках «Про логічну побудову геометрії» з'ясовано суть логічної побудови геометрії та запропонована одна із можливих систем аксіом, відповідна системі викладу геометричного матеріалу в даному посібнику. Ця система аксіом складається з 12 аксіом, поділених на 5 груп: 1) аксіоми належності (3); 2) аксіоми відстані (3); 3) аксіоми порядку (4); 4) аксіоми рухомості (1); 5) аксіома паралельних (1).

У 80-ті роки XX ст. з'явилося декілька спроб побудувати шкільний курс геометрії на аксіоматичній основі. Це – навчальний посібник О. В. Погорєлова, авторського колективу, очолюваного О. Д. Александровим, посібник Л. С. Атанасяна та ін.

§ 3.5. Проблема п'ятого постулату Евкліда

Геометрія залишається основним джерелом розвитку багатої і плідної математичної інтуїції, яка, в свою чергу, надає ще більше творчої сили математикам. Більшість математиків мислить геометричними схемами, навіть якщо і сліду не лишається від цього будівельного риштування, коли вони *подають остаточний результат міркувань в аналітичній формі. Вислів Платона, що «геометрія наближає розум до істини», все ще залишається в силі.*

Морріс Клайн

Архімед

«Начала» Евкліда протягом більше 2000 років піддавались детальному вивченню. Є величезна література, що містить коментарі до «Начал». Вже стародавні коментатори помічали, що «Начала» містять істотні недоліки і намагались їх усунути. Удосконалення «Начал» Евкліда йшло двома напрямками: доповнення постулатів, яких, на їх думку, не вистачало, і доведення деяких постулатів.

Істотний вклад в справу доповнення аксіом Евкліда вніс Архімед (287-212 рр. до н. е). На противагу Евкліду дослідження Архімеда мали прикладний характер. У творі «Про кулю і циліндр» Архімед послідовно розвинув теорію вимірювання площ і об’ємів. В цій праці обчислення поверхонь і об’ємів круглих тіл зведено до визначення довжини кола і площі круга, обчислення яких викладено в творі «Про вимірювання круга». При доведенні нових теорем Архімед користувався «Началами» Евкліда. Але для того, щоб розв’язувати математичні задачі, він доповнює аксіоматику Евкліда новими аксіомами. Одна з таких аксіом носить тепер назву аксіоми вимірювання або аксіоми Архімеда.

Якщо приєднати до системи аксіом Евкліда аксіому неперервності Дедекінда (1831-1916),то аксіома Архімеда може бути доведена як наслідок. Аксіома Дедекінда дозволяє довести існування точки перетину кіл в першому твердженні Евкліда.

Проблемою удосконалення системи аксіом геометрії Евкліда займались багато математичних шкіл.

В кінці XIX ст. в італійській школі Пеано (1858-1932) і німецькій школі Паша(1843-1930) були сформульовані аксіоми, що визначають поняття «лежить на», «лежить між», «рівне». У 1899 році була опублікована робота Д. Гільберта «Основи геометрії», в якій остаточно розв'язана проблема обґрунтування геометрії Евкліда.

Особливу увагу критиків «Начал» Евкліда привертав до себе V-й постулат. Це пояснюється низкою глибоких причин. За своїм змістом V-й постулат є твердженням, що є менше очевидним, ніж твердження інших постулатів.

Справді, якщо дві прямі, про які йде мова в постулаті, розміщені близько одна до одної і сума внутрішніх односторонніх кутів значно відрізняється від $2d$ ($d=90$ градусів), то наша просторова уява легко погоджується з твердженням V-го постулату про перетин цих прямих. Але якщо уявити, що ці дві прямі досить віддалені одна від одної, а сума внутрішніх кутів менше $2d$ на досить малий кут (наприклад, на соту частину секунди), то очевидність постулату викликає сумнів.

Формулювання V-го постулату, на відміну від інших, носить досить складний і громіздкий характер.

При детальному вивченні «Начал» створюється враження, що Евклід хоче якомога далі не використовувати V-ий постулат. «Начала» Евкліда п'ятим постулатом ніби поділяються на 2 частини: перша – сукупність тверджень, які не залежать від V-го постулату. Ця частина називається *абсолютною геометрією*. Друга — містить твердження, в доведенні яких використовується V-ий постулат. Саме тому з давніх часів намагались замінити V-ий постулат якимось іншим твердженням, йому рівносильним, але більш очевидним і простим за формулюванням.

Йоганн Генріх Ламберт

Сумнів в тому, що твердження висловлене в V-тому постулаті, слід приймати без доведення, і викликало багаточисленні спроби довести V-ий постулат. Виникає *проблема V-го постулату*: чи п'ятий постулат є твердженням незалежним від інших аксіом, чи він є логічним наслідком інших аксіом? Розв'язанням цієї проблеми займалось багато математиків, серед яких були імена таких видатних, як Гаусс, Лежандр, Лобачевський та ін. Проблема V-го постулату містила величезні труднощі логічного характеру, так як вона була пов'язана з основами геометричної науки.

Адріен Марі Лежандр

Спроби довести V-ий постулат велись в елліністичну епоху (Посидоній, I ст. до н.е., Прокл, V ст. н.е.),в епоху середньовіччя (в основному арабами; Нассир-Еддін, XIII ст.) і в епоху Відродження (перше друковане видання «Начал» з'явилось в 1482 р.) і після неї (Валліс, XVIII ст., Саккері, XVIII ст., Ламберт, XVIII ст., Лежандр, XVIII ст. та ін.)

Це була епоха Евкліда в історії обґрунтування геометрії, епоха його коментаторів, період наївно-аксіоматичної побудови геометрії. На початку XIX століття разом з безуспішними спробами доведення V-го постулату вона підходила до кінця.

Всі спроби «доведення» V-го постулату носять деякі спільні характерні риси. Автори всіх цих доведень виходили з впевненості про єдину можливість і абсолютну істинність V-го постулату і не мислили собі іншої можливості. Авторитет Евкліда був непорушним.

Всі вони вважали, що твердження, взяті за аксіоми, обов'язково повинні бути *безпосередньо очевидними* і тому були переконані в доведенні V-го постулату за допомогою останніх постулатів. При доведенні непомітно вводили для проведення міркувань «очевидне» твердження, фактично рівносильне V-му постулату.

Всі спроби доведення V-го постулату все ж відіграли позитивну роль у розвитку геометрії, бо в результаті цих спроб протягом майже двох тисяч років були вияснені логічні залежності між деякими важливими геометричними твердженнями і, зокрема, були відкриті твердження, еквівалентні п'ятому постулату.

Два твердження A, B еквівалентні одне одному відносно системи аксіом $\{W_i\}$, якщо з $\{W_i+A\} \Rightarrow B$ і навпаки з $\{W_i+B\} \Rightarrow A$.

Якщо в якості системи аксіом взяти, наприклад, систему аксіом Гільберта, яку ми розглянемо в главі 4, без аксіоми паралельності, то відносно цієї системи будуть рівносильні один одному і V-ому постулату Евкліда, наприклад, такі твердження:

1. Через кожну точку, що лежить зовні прямої, проходить тільки одна пряма, паралельна даній (аксіома Плейфера).
2. Якщо яка-небудь пряма перетинає одну з двох паралельних, то вона перетинає і другу (Прокл).
3. Відстань між двома паралельними прямими скінченна (Прокл).
4. Сума внутрішніх кутів трикутника рівна *2d* (Нассир-Еддін, Саккері, Лежандр).
5. Існують подібні трикутники (Валліс).
6. Через три точки, що не лежать на одній прямій, завжди можна провести коло (Ф.Бойяї).
7. Висоти трикутника завжди перетинаються.
8. Теорема Піфагора.

Зупинимось на дослідженнях Саккері, Ламберта і Лежандра, які у відношенні методу доведення та підходу до проблеми стали на новий шлях. Теорії, розвинуті ними, є спробами довести V-ий постулат методом від супротивного. Ідея доведення V-го постулату цим методом виявилась настільки плідною, що безпосередньо привела до остаточного розв'язання проблеми V-го постулату в XIX ст.

а) Дослідження Саккері (1667-1733)

У своїй праці «Евклід, очищений від будь-яких плям», яка була видана у 1733 р, Саккері в якості вихідної фігури бере чотирикутник з двома прямими кутами і двома рівними бічними сторонами, який називається на

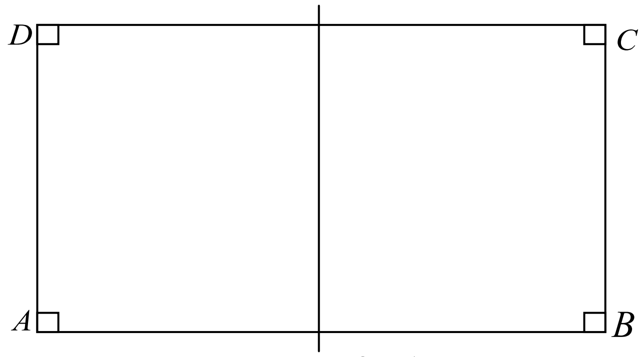


Рис.3.5.1

честь автора «чотирикутником Саккері». Візьмемо довільний відрізок *AB* (рис. 3.5.1) і по один бік від нього проведемо відрізки *AD*, *BC*, рівні між собою і перпендикулярні до *AB*. З'єднаємо точки *C* і *D* прямою, одержимо чотирикутник Саккері. Виникає питання: що можна сказати про кути *C* і *D*, якщо використовувати всі аксіоми і постулати Евкліда, крім V-го постулату?

Саккері доводить, що незалежно від цього постулату можна твердити, що $< C = < D$. Що ж можна сказати про величину цих кутів?

Відносно цих кутів Саккері розглядає три твердження:

1) або обидва кути гострі;
2) або обидва кути прямі;
3) або обидва кути тупі.

Ці твердження будемо називати відповідно гіпотезами гострого, прямого, тупого кута. Що стосується гіпотези прямого кута, то вона, як довів Саккері, рівносильна V-му постулату. Значить, якщо вдасться довести, що гіпотези гострого і тупого кута приводять до суперечності з іншими аксіомами і постулатами Евкліда або раніше доведеними теоремами, то тим самим буде доведена справедливість гіпотези прямого кута, а разом з тим і V-го постулату. Це завдання ставить перед собою Саккері, і якщо б йому це вдалось, то одержалось би бездоганне доведення від супротивного V-го постулату Евкліда.

Саккері показує, що гіпотеза тупого кута неможлива, і всі зусилля спрямовує на усунення гіпотези гострого кута. На цьому шляху він доводить багато цікавих теорем, які суперечили нашим звичним уявленням. Так, наприклад, Саккері доводить, що у випадку гіпотези гострого кута існують такі перпендикуляр і похила до однієї і тієї ж прямої, які не перетинаються, або геометричне місце точок, рівновіддалених від даної прямої, є крива.

Саккері був переконаний, що ніякої іншої геометрії, крім геометрії Евкліда, існувати не може. Тому, одержуючи різні незвичні наслідки гіпотези гострого кута, приходить до хибного висновку, що гіпотеза гострого кута суперечить «природі прямої лінії» і неможлива.

Значення Саккері в історії розвитку геометрії полягає в тому, що він був піонером у прокладанні нового шляху в дослідженні проблеми V-го постулату.

б) Дослідження Ламберта (1728-1777)

Ламберт є безпосереднім продовжувачем Саккері у розв'язані проблеми V-го постулату. У своєму творі «Теорія паралельних ліній», який був написаний у 1766р., а виданий у 1786р., Ламберт за вихідну фігуру бере чотирикутник з трьома прямими кутами (його зараз називають «чотирикутником Ламберта»).Питання про величину четвертого кута залишається відкритим, і Ламберт також допускає три гіпотези: гіпотезу прямого, тупого і гострого кутів.

Встановивши еквівалентність гіпотези прямого кута V-му постулату, Ламберт легко приводить до протиріччя гіпотезу тупого кута. Потім він досліджує наслідки з гіпотези гострого кута з метою знайти в них протиріччя. В процесі дослідження Ламберт одержує результати, які були виведені Саккері, але в той же час встановлює нові наслідки гіпотези гострого кута. Ламберт, на відміну від Саккері, ніколи не вважав, що ним доведений V-ий постулат, він повністю усвідомив всю трудність проблеми п'ятого постулату.

Ламберт перший помітив, що гіпотеза тупого кута реалізується на сфері, а гіпотеза гострого кута – на уявній сфері.

в) Дослідження Лежандра (1752-1833)

У 1794р. Лежандр опублікував навчальний посібник з елементарної геометрії, який він за традицією назвав «Начала геометрії».

На думку Лежандра, цей твір повинен замінити «Начала» Евкліда в шкільному викладанні. Ця праця в свій час мала вирішальний вплив на викладання геометрії не лише у Франції, але й в інших країнах. Як Саккері і Ламберт, Лежандр робить спробу довести V-ий постулат від супротивного. На відміну від них за вихідну фігуру він бере трикутник і розглядає проблему паралельності з точки зору питання про суму кутів трикутника.

Що можна сказати про суму кутів трикутника незалежно від V-го постулату?

Лежандр допускає три гіпотези:

1) сума кутів трикутника більша *2d*;
2) сума кутів трикутника дорівнює *2d*;
3) сума кутів трикутника менша *2d*.

Для доведення V-го постулату потрібно привести до протиріччя першу і третю гіпотези і цим їх усунути.

Лежандр кількома способами показує, що перша гіпотеза не має місця, тобто доводить теорему.

Теорема Лежандра: «Сума кутів трикутника ≤ *2d*».

Будемо доводити теорему методом від супротивного.

Нехай дано трикутник $A_1B_1A_2$, кути якого рівні α, β, γ (рис. 3.5.2) Припустимо, що $\alpha + \beta + \gamma > 2d$. Продовжимо сторону A_1A_2 і відкладемо на продовженні n відрізків, рівних A_1A_2, так що $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_nA_{n+1}$. На цих відрізках побудуємо n трикутників, рівних трикутнику $A_1B_1A_2$. З'єднаємо їх вершини $B_1, B_2, \ldots B_n$ відрізками прямих, одержимо $n-1$ трикутників, які рівні між собою за двома сторонами і кутом між ними β'. Значить, $B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_{n-1}B_n$.

Так як $\alpha + \beta + \gamma > 2d$ і $\alpha + \beta' + \gamma = 2d$, то $\beta > \beta'$. Оскільки в трикутниках $A_1B_1A_2$ і $B_1A_2B_2$ дві сторони відповідно рівні, але кути між ними не рівні, то $A_1A_2 > B_1B_2$. Далі бачимо, що ламана $A_1B_1B_2 \ldots B_nA_{n+1} > A_1A_{n+1}$, тобто $A_1B_1 + (n-1)B_1B_2 + B_nA_{n+1} > n \cdot A_1A_2$.

Звідси, враховуючи рівність $B_nA_{n+1} = A_1B_1$, маємо:

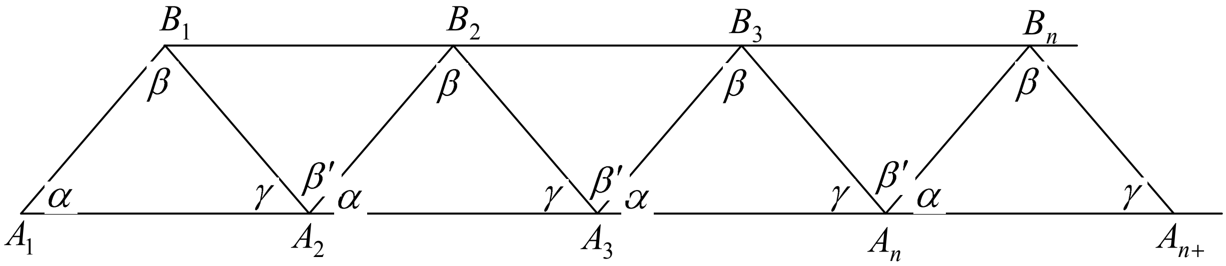


Рис. 3.5.2

Так як $A_1A_2 > B_1B_2$ або $A_1A_2 - B_1B_2 >$, то одержана нерівність суперечить аксіомі Архімеда, бо n може бути як завгодно великим, а тому ця нерівність неможлива, а значить α .

Інше доведення цієї теореми дав Лежандр. (Див. [II, 21], § 4, гл. 1).

Для доведення V-го постулату потрібно привести до протиріччя третю гіпотезу. Лежандр доводить, що коли в одному трикутнику сума кутів дорівнює *2d*, то це має місце в кожному трикутнику. Звідси можна показати, що коли в одному трикутнику сума кутів менша *2d*, то це має місце в кожному трикутнику.

Лежандр для усунення третьої гіпотези ставить своїм завданням довести, що хоча би в одному трикутнику сума кутів рівна *2d*. Він дає різні варіанти доведення і хоча всі вони виявились помилковими, тим не менше вони цікаві в тому розумінні, що було знайдено ряд еквівалентів п'ятого постулату.

Лежандр ніяких нових результатів у порівнянні з Саккері і Ламбертом не одержав. Тим не менше заслуга Лежандра полягає в тому, що він встановив зв'язок питання про суму кутів трикутника з V-им постулатом. Його праця «Начала геометрії», в якій міститься дослідження V-го постулату привернула увагу багатьох математиків XIX ст. до проблеми паралельних.

Дослідження Саккері, Ламберта і Лежандра з теорії паралельності проникнуті твердою впевненістю в безумовній істинності і єдиній можливості V-го постулату та вірою в те, що він може бути доведений на основі інших аксіом і постулатів Евкліда.

Контрольні запитання

1. Що являє собою геометрія Стародавнього Сходу?

2. Дати коротку характеристику геометрії стародавнього Єгипту, Вавилону.

3. Які основні періоди розвитку грецької математики до Евкліда? Дати їх коротку характеристику.

4. Хто вперше поставив питання про логічне обґрунтування геометрії?

5. Охарактеризуйте зміст «Начал» Евкліда.

6. Сформулюйте аксіоми і постулати Евкліда.

7. Назвіть основні недоліки системи Евкліда.

8. Сформулюйте V постулат Евкліда.

9. Чому саме V постулат викликав найбільший інтерес у коментаторів «Начал»?

10. В чому суть проблеми V постулату?

11. Хто в елліністичну епоху, епоху середньовіччя, епоху Відродження, XVIII ст. робив спроби довести V постулат?

12. Доведіть, що V постулат еквівалентний аксіомі паралельності (Плейфера).

13. Навести приклади тверджень, еквівалентних V постулату.

14. Чим відрізнялись дослідження проблеми V постулату вченими XVIII ст. Саккері, Ламбертом і Лежандром від досліджень їхніх попередників?

15. В чому суть досліджень Саккері?

16. Проаналізувати дослідження Ламберта у розв’язуванні проблеми V постулату.

17. Як намагався розв’язати проблему V постулату Лежандр?

18. Яким чином була розв’язана проблема V постулату?

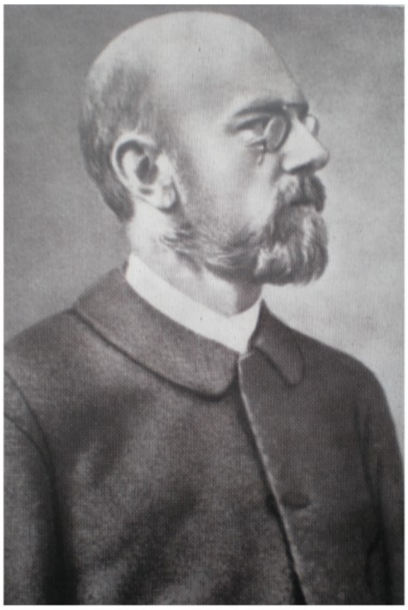
Рекомендована література: [II, 1-5, 10, 11, 16, 21]; [V, 2, 8, 10, 13, 14].

Глава 4. Побудова евклідової геометрії на основі системи аксіом Гільберта

Геометрія,так само як і арифметика, вимагає для своєї послідовної побудови лише небагатьох простих основних тверджень. Ці основні твердження називаються аксіомами геометрії. Постановка аксіом геометрії і дослідження їх взаємозв'язків – це завдання, яке з часу Евкліда було предметом досліджень у численних прекрасних творах математичної літератури. Це завдання зводиться до логічного аналізу нашого просторового уявлення.

Д. Гільберт

Аксіоматичне обґрунтування геометрії вперше було дано Д. Гільбертом. Давид Гільберт (1862-1943) був одним з найвидатніших математиків усіх епох, «останнім енциклопедистом у галузі математики», інтереси і вагомі наукові результати якого обіймали практично всю сучасну йому математичну науку. Закінчив Кенігзберзький університет. У 1895-1930 рр. – професор Геттінгенського університету. У 1930 р. пішов у відставку, але ще три роки продовжував читати лекції. Після приходу до влади у Німеччині нацистів повністю залишив викладання. За прикладом Гільберта університет залишило більшість викладачів-євреїв.



Давид Гільберт

Гільберт був надзвичайно різностороннім ученим. Його наукові дослідження стосувались теорії інваріантів і теорії чисел, основ геометрії, теорії функцій, диференціальних та інтегральних рівнянь, задач математичної фізики тощо. І всі ці дослідження відзначались глибиною постановки питань і блискучим їх розв'язанням.

Тривала наукова кар'єра Гільберта чітко поділяється на ряд періодів (Г.Вейль виділяє п'ять), присвячених роботі в якій-небудь одній галузі математики. Роки з 1898 до 1902 були віддані основам елементарної геометрії. В той час завдяки відкриттю неевклідових геометрій уже було зрозуміло, наскільки важливою є аксіоматична база в геометрії.

Підсумок всіх досліджень по створенню аксіоматики евклідової геометрії зробив Д. Гільберт у 1899 р., опублікувавши книгу «Основи геометрії». За цей твір вчений був нагороджений у 1904 р. премією Лобачевського. У русло досліджень з основ геометрії потрапила і проблема вимірювання об'єму піраміди, яку він включив до числа 23-х своїх знаменитих «проблем Гільберта» [V, 12, 15].

В аксіоматиці Гільберта міститься 21 аксіома, які описують властивості основних понять. До основних понять відносяться поняття трьох об'єктів – «точки», «прямі» і «площини» – та трьох основних відношень між ними, які виражаються словами «лежить на», «лежить між», «конгруентність». Система аксіом Гільберта евклідової геометрії складається з п'яти груп, які описують властивості відношень між основними об'єктами.

Перша група аксіом називається *аксіомами інцидентності* (належності або сполучення). Вона описує відношення інцидентності точки і прямої, точки і площини.

Друга група аксіом називається *аксіомами порядку***.** Вона описує основне відношення «лежить між», пов'язане з трьома точками, інцидентними прямій.

Третя група аксіом називається *аксіомами конгруентності*. Вона описує відношення конгруентності відрізків та кутів.

Четверта група аксіом називається *аксіомами неперервності* і описує властивості неперервного розміщення точок на прямій.

П'ята група складається з однієї аксіоми, яка називається *аксіомою паралельності*.

В аксіоматиці Гільберта розглядаються три множини M_1, M_2, M_3, елементи яких є відповідно точками, прямими і площинами. Між елементами цих множин визначені основні відношення p_1, p_2, p_3 («лежить на», «лежить між», «конгруентність») так, що ці образи і відношення задовольняють всім аксіомам гільбертової аксіоматики.

I група

Аксіоми інцидентності

I_1. Для будь-яких двох різних точок існує пряма, інцидентна цим точкам.

I_2. Для будь-яких двох точок існує не більше однієї прямої , інцидентної цим точкам.

I_3. На кожній прямій існують принаймні дві точки.

I_4. Існують три точки, які не лежать на одній прямій.

I_5. Для будь-яких трьох точок, не інцидентних прямій, існує площина, інцидентна цим точкам.

I_6. Для будь-яких трьох точок, не інцидентних прямій, існує не більше однієї площини, інцидентної цим точкам.

I_7. Для кожної площини існує принаймні одна точка, їй інцидентна.

I_8. Якщо дві точки прямої інцидентні площині, то кожна точка прямої інцидентна цій площині.

I_9. Якщо дві площини мають спільну точку, то існує принаймні ще одна точка, їм інцидентна.

I_{10}. Існують чотири точки, не інцидентні одній площині.

Геометрія I групи аксіом

З аксіом I групи можна вивести ряд тверджень, які складають геометрію цієї групи. Наведемо окремі з них:

Т.1. Дві різні точки визначають одну і тільки одну пряму, їм інцидентну.

Т.2. Дві прямі, які лежать в одній і тій же площині, мають або одну спільну точку, або не мають ні одної.

Доведення. Якщо припустити, що дві прямі мають дві спільні точки, що це буде суперечити аксіомам I_{1-2}.

Т.3. Три точки, не інцидентні одній прямій, визначають одну і тільки одну площину, їм інцидентну.

Т.4. Пряма і не інцидентна їй точка А визначають одну і тільки одну площину, їм інцидентну.

Доведення. Дана пряма a і точка А, що не належить a. На a візьмемо точки В і С (аксіома I_3) і розглянемо площину АВС (аксіоми I_4-I_5 або Т.3). Ця площина АВС буде єдиною (Т.3). Пряма a лежить у площині(аксіома I_8).

Т.5. На кожній площині можна знайти принаймні три точки, не інцидентні прямій.

Т.6. Площина і пряма, що не лежить на ній, мають або одну спільну точку, або не мають жодної.

Т.7. Через дві різні прямі, що мають спільну точку, проходить площина і до того ж тільки одна.

II група

<u>Аксіоми порядку</u>

Головне призначення аксіом цієї групи полягає в тому, щоб ввести тернарне відношення «лежати між», що відноситься до будь-яких трьох різних точок, інцидентних прямій. Ці аксіоми вперше дослідив німецький математик Мориц Паш(1843-1930), одна з яких названа його ім’ям.

II_1. Якщо А, В, С – три точки, інцидентні прямій, і точка В лежить між точками А, С, то А, В, С – різні точки і точка В лежить між С, А.

II_2. Для будь-яких двох точок А, В інцидентних прямій a, існує точка С прямої a, така, що точка В лежить між точками А і С.

II$_3$. Для трьох різних точок, інцидентних прямій, існує не більше однієї з них, яка лежить між двома іншими.

Аксіоми II$_1$-II$_3$ називаються *лінійними аксіомами порядку.*

Сукупність двох точок A і B і точок, що лежать між A і B, називається *відрізком***.** Точки, що лежать між A і B, називаються *внутрішніми точками* відрізка. Сукупність трьох точок A, B, C не інцидентних прямій, і трьох відрізків, утворених парами цих точок, називається *трикутником*; точки A, B, C називаються *вершинами*, а відрізки AB, AC, BC – *сторонами* трикутника. Пряма a перетинає відрізок AC, якщо існує внутрішня точка O відрізка AC, яка інцидентна прямій a.

II$_4$. (Аксіома Паша).

Нехай задано трикутник ABC і в його площині пряма a, яка не проходить через A, B, C. Якщо пряма a перетинає одну сторону AC трикутника, то вона перетинає також або другу сторону AB, або третю його сторону BC.

Геометрія I-II груп аксіом

T$_8$.Для будь-яких двох різних точок A, B на прямій AB існує принаймні одна точка,що лежить між A і B.

Доведення. За аксіомою I$_4$ існує точка C, яка не лежить на прямій AB. Тоді на прямій AC за аксіомою II$_2$ існує така точка D, що точка C лежить між A і D (рис.4.1).

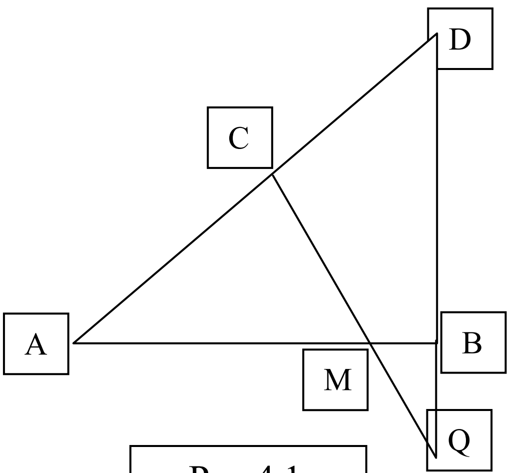


Рис.4.1

На прямій DB існує точка Q така, що B лежить між D і Q(аксіома II$_2$). До трикутника ADB і прямої QC застосуємо аксіому Паша. На стороні AB цього трикутника C існує точка M, в якій пряма QC перетинає сторону AB, тобто точка M лежить між A і B.

T_9. З трьох різних точок, інцидентних прямій, одна і тільки одна лежить між двома іншими.

T_{10}. Будь-який відрізок містить нескінченну множину точок (ця множина зчисленна).

T_{11}. Пряма a,що лежить в площині π, ділить множину точок площини π, які не належать a ,на дві частини.

Далі можна ввести звичне означення променя, півплощини та її межі, означення кута, многокутника, півпростору, многогранного кута тощо.

Відношення «лежати між» будемо позначати [ ]. Якщо точка B лежить між точками A, C, то будемо записувати [ABC].

III група

<u>Аксіоми конгруентності</u>

Ця група аксіом описує властивості відношення конгруентності для відрізків і кутів. Це відношення позначається $\cong$.

III_1. Нехай дано відрізок [AB], а також пряма a' і точка на ній A'. На прямій a'існує точка B' з одного чи іншого боку відносно A' така, що відрізок[AB]конгруентний [A'B']. Вимагається також, щоб [AB]$\cong$ [BA].

III_2. Якщо [AB]$\cong$[A"B"], [A'B']$\cong$[A"B"], то [AB]$\cong$[A'B'].

III_3. Нехай [ABC], [A'B'C'] і [AB]$\cong$[A'B'], [BC]$\cong$[B'C'], то [AC]$\cong$[A'C'].

III_4. Нехай дано опуклий кут AOB, промінь [O'A') і півплощина π', обмежена прямою O'A'. Тоді в півплощині π' існує <u>один і тільки один</u> промінь [O'B'), такий, що <AOB$\cong$<A'O'B'. Крім того вимагається, що кожен кут конгруентний сам собі, тобто<AOB$\cong$<AOB.

III_5. Якщо для двох трикутників ABC і A'B'C' маємо [AB] $\cong$ [A'B'], [AC]$\cong$[A'C'], <BAC <B'A'C' , то <ABC$\cong$<A'B'C'.

<u>Геометрія I-III груп аксіом</u>

В аксіомі III_1 постулюється лише існування точки B', але нічого не говориться про її єдиність.

<u>Т.12</u> Точка B', про існування якої говориться в аксіомі III_1,-єдина.

<u>Доведення.</u> Припустимо, що на прямій a' існують дві такі точки B', B' по один бік від точки A', що $[AB]\cong[A'B']$ і $[AB]\cong[A'B'']$ (рис 4.2).

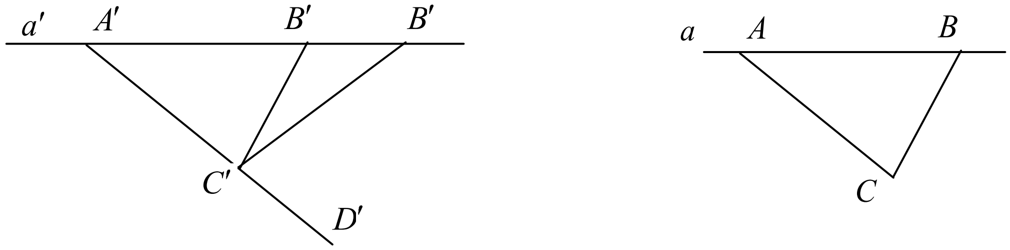


Рис. 4.2

Нехай точка С не лежить на АВ (акс. I_4).Розглянемо ΔАВС. Нехай α'- площина, яка проходить через a'. В цій площині за аксіомою III_4 існує такий промінь $A'D'$, що $< BAC\cong<B'A'D'$, а так як A', B', B'' лежать на одному промені, то $< BAC\cong<B''A'D'$. За аксіомою III_1 існує така точка C' на промені $A'D'$, що $[AC]\cong[A'C']$. Прямі $C'B'$ і $C'B''$ лежать у площині α' (акс I_8). За акс. III_5 маємо $<ACB\cong<A'C'B'$, бо [АВ] ≅ $[A'B']$, [АС]≅$[A'C']$, $< BAC\cong<B'A'C'$. За акс. III_5 $<ACB\cong<A'C'B''$, бо [АВ] ≅ $[A'B'']$, [АС]≅$[A'C']$, $< BAC\cong<B''A'C'$.

Отже, з одного боку від променя $C'A'$ існують два промення $C'B'$ і $C'B''$ такі, що $<ACB\cong<A'C'B'$ і $<ACB\cong<A'C'B''$. А це суперечить аксіомі III_4.

Отже, точка B' – єдина.

<u>Т. 13.</u> Кожен відрізок конгруентний самому собі, тобто [АВ]≅ [АВ] (властивість рефлексивності).

<u>Доведення.</u> За аксіомою III_1 маємо [АВ]≅ [ВА] і [ВА] ≅ [АВ]. Припустимо, що [АВ] не конгруентний [АВ]. Нехай [АВ]≅ [АB'], де B'– точка променя АВ. Тоді за аксіомою III_2 з [АВ]≅ [ВА] і [АВ]≅ [АB'] випливає, що [ВА]≅[АB'].

Але так як [ВА]≅[АB], то за теоремою Т.12 точка B' співпадає з точкою В, тобто [АВ]≅ [АВ].

<u>Т. 14</u>. Якщо [АВ]≅$[A'B']$, то і $[A'B']$≅ [АВ] (властивість симетричності).

Доведення. Нехай $[AB] \cong [A'B']$. За Т.13 $[AB] \cong [AB]$, значить, за акс. III_2 $[A'B'] \cong [AB]$.

Т.15 Якщо $[AB] \cong [A'B']$ і $[A'B'] \cong [A''B'']$, то $[AB] \cong [A''B'']$ (властивість транзитивності в іншій формі).

Доведення. За Т.14 $[A'B'] \cong [AB]$, звідси (за акс. III_2) $[AB] \cong [A''B'']$.

Можна довести такі теореми:

Т.16. (Перша ознака конгруентності трикутників)

Якщо в двох трикутниках ABC і $A'B'C'$ маємо $[AB] \cong [A'B']$, $[AC] \cong [A'C']$, $\angle A \cong \angle A'$, то $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Т.17. (Друга ознака конгруентності трикутників).

Якщо в двох трикутниках ABC і $A'B'C'$ маємо $[AB] \cong [A'B']$, $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, то $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Т.18. У рівнобедреному трикутнику кути при основі конгруентні.

Т.19. (Третя ознака конгруентності трикутників)

Якщо в двох трикутниках ABC і $A'B'C'$ маємо $[AB] \cong [A'B']$, $[AC] \cong [A'C']$, $[BC] \cong [B'C']$, то $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Можна дати означення понять «більше», «менше» для відрізків і встановити властивості порівняння відрізків. Те ж можна зробити і для кутів.

Т.20. (Про зовнішній кут трикутника)

Зовнішній кут трикутника більший кожного внутрішнього кута, з ним не суміжного.

Т.21. Через кожну точку площини проходить єдиний перпендикуляр до даної прямої, який лежить в цій площині.

Т.22. Якщо в площині α дані пряма a і точка A, що їй не інцидентна, то в площині α через точку A проходить принаймні одна пряма, яка не перетинає прямої a.

Аксіоми III групи дозволяють ввести поняття руху та довести властивості руху.

IV група

Аксіоми неперервності

Наше наочне уявлення про пряму або коло нерозривно пов'язане з уявленням про їх неперервність. Факт неперервності прямої був настільки очевидним,що протягом багатовікового розвитку геометрії аж до середини XIX ст. ні в кого не виникало і думки,що поняття неперервності потребує логічного обґрунтування. Проте багато питань і проблем геометрії не могли одержати строгого обґрунтування без точного логічного формулювання поняття неперервності. Зокрема, неможливо логічно обґрунтувати теорію вимірювання відрізків, кутів, площ і об'ємів.

Першим, хто поставив питання обґрунтування неперервності і дав точне формулювання суті поняття неперервності, був Дедекінд (1831-1916). Після Дедекінда поняття неперервності одержало логічну обробку в інших формах в роботах Вейєрштрасса і Г.Кантора.

Гільберт у своїх «Основах геометрії» виразив неперервність прямої у вигляді,відмінному від сформованих на той час теорій. Він не користується аксіомою Дедекінда, а замість неї вводить дві аксіоми-аксіому Архімеда і так звану аксіому повноти, які в своїй сукупності еквівалентні аксіомі Дедекінда відносно аксіом I-III груп.

IV$_1$. Аксіома Архімеда.

Нехай дано два довільних відрізка AB і CD. Існує таке натуральне n, що n[CD]>[AB].

Відрізок n[CD] означає відрізок [CD_n], де D_n точка променя [CD), одержана при послідовному відкладанні відрізків:

$$[CD] \cong [DD_2] \cong [D_2D_3] \cong \ldots \cong [D_{n-}D_n].$$

Аксіома Архімеда дозволяє в геометрії перших трьох груп аксіом побудувати теорію довжин відрізків.

IV$_2$. Аксіома Кантора. Нехай на прямій дано послідовність відрізків,які задовольняють двом вимогам: 1)кожен наступний відрізок вкладений в попередній; 2)не існує відрізка,що належить всім відрізкам послідовності. Тоді існує точка, яка належить всім відрізкам послідовності.

Ця аксіома дозволяє будувати відрізок за його довжиною.

Надалі замість аксіом IV_1 і IV_2 ми будемо використовувати аксіому Дедекінда.

<u>Аксіома Дедекінда.</u>

Якщо всі точки відрізка АВ,включаючи його кінці, розподілені на два класи так, що:

1. Кожна точка відрізка належить одному і тільки одному з цих класів, точка А належить першому класу, а точка В-другому класу.
2. Кожна точка першого класу, відмінна від А, лежить між А і будь-якою точкою другого класу,

тоді на відрізку АВ існує така точка С, що кожна точка, яка лежить між А і С, належить першому класу, а кожна точка, що лежить між С і В, належить другому класу. Сама точка С належить або першому, або другому класу.

Точка С називається *межовою* між двома класами. Говорять також, що точка С визначає дедекіндовий переріз відрізка. Можна довести, що точка С – єдина.

Спираючись на аксіоми I-IV груп, можна ввести декартові координати на прямій, на площині і в просторі. (Це проводиться так, як описано, наприклад, в шкільному підручнику геометрії О. В. Погорєлова [IV, 13]). При цьому вирішальну роль будуть відігравати аксіоми неперервності. Завдяки їм для будь-якого дійсного числа x на прямій існує єдина точка з координатою x, для будь-якої пари (x,y) дійсних чисел на площині існує єдина точка з координатами x, y.

Нарешті, можуть бути доведені такі теореми, що дають обґрунтування побудов за допомогою циркуля та лінійки.

<u>**Т.23.**</u> Якщо пряма проходить через точку, яка лежить всередині кола, то вона перетинає коло в двох точках.

T.24. Якщо коло ω проходить через внутрішню і зовнішню точки відносно кола ω',то кола ω і ω' перетинаються в двох точках.

Тепер можна показати, що на прямій існує нескінченна множина точок, яка еквівалентна множині дійсних чисел.

Сукупність наслідків,які випливають лише з аксіом I-IV груп, називається *абсолютною геометрією* (термін введений Яношем Бойяї).

До абсолютної геометрії, як ми бачили, (див. наслідки з аксіом конгруентності), відноситься теорема про те, що через точку, не інцидентну прямій, в площині, що ними визначається, проходить принаймні одна пряма, яка не перетинає даної прямої. Гарантуючи існування такої прямої, з цієї теореми не слідує, чи буде вказана пряма єдиною.

В залежності від того,чи приймемо ми в якості додаткової вимоги,щоб вказана пряма була єдиною чи ні, ми отримаємо відповідно або геометрію Евкліда,або геометрію Лобачевського. Абсолютна геометрія,основана лише на аксіомах I-IV груп, є спільною частиною цих геометрій.

V група

Аксіома паралельності

V. Нехай a – довільна пряма і A – точка, яка не належить їй. Тоді в площині, що визначається ними, через точку А можна провести не більше однієї прямої, яка її не перетинає.

На основі Т.22 (див. наслідки з аксіом конгруентності) і аксіоми V робимо висновок, що через точку А проходить одна і тільки одна пряма, яка не перетинає a. Ця пряма називається паралельною до прямої a.

Тепер на основі аксіом I-V груп ми маємо можливість довести теореми власне евклідової геометрії. Ми можемо довести V постулат Евкліда, теорему про те, що сума внутрішніх кутів трикутника рівна $2d$, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, з ним не суміжних.

Вся теорія подібності фігур, теорія вимірювання площ будується на основі аксіоми паралельності Евкліда.

Праця Гільберта «Основи геометрії» відіграла важливу роль у розвитку геометрії. З неї беруть свій початок і сучасний аксіоматичний метод і теорія математичних структур в сучасному розумінні.

Але з сучасної нам точки зору аксіоматика Гільберта є надзвичайно складною і неоправдано громіздкою. Потрібно мати величезне терпіння і потратити багато сил, щоб з допомогою цієї аксіоматики дійти до вузлових теорем геометрії. Недоліком аксіоматики Гільберта є також те, що вона внутрішньо ніяк не пов’язана з поняттям векторного простору, який в наш час відіграє в математиці надзвичайно важливу роль.

Контрольні запитання

1. Назвіть основні об’єкти і основні відношення аксіоматики Гільберта.
2. Назвіть аксіоми інцидентності (належності) системи Гільберта.
3. Назвіть аксіоми порядку системи Гільберта.
4. Назвіть аксіоми конгруентності системи Гільберта.
5. Назвіть аксіоми неперервності та паралельності системи Гільберта.
6. Доведіть кілька тверджень, які випливають з аксіом кожної з груп.

Рекомендована література: [II, 1-5, 10, 12-15 (ч.I), 21].

Глава 5. Побудова евклідової геометрії на основі системи аксіом Вейля

Зв'язок між математикою, природничими
науками і філософією ніде так не сильний,
як у проблемі простору.

Г. Вейль

§5.1. Система аксіом Вейля тривимірного евклідового простору

Векторний спосіб побудови евклідової геометрії був запропонований німецьким математиком Германом Вейлем, одним із найталановитіших учнів Д. Гільберта. Система аксіом опублікована у 1918 р. Шлях побудови геометрії на основі цієї системи аксіом, можливо, є найкоротшим шляхом аксіоматизації геометрії. До того ж, на цьому шляху в елементарну геометрію входить одне з фундаментальних понять сучасної математики – поняття векторного простору, надзвичайно важливе і для багаточисленних застосувань до фізики, хімії, економіки і т.д. Ідея Вейля полягає в тому, щоб взяти за початкові, неозначувані поняття поняття «точка», «вектор», «сума векторів», «добуток вектора на число», «скалярний добуток векторів», «відкладання вектора від точки», а в якості аксіом – властивості цих операцій (відношень) над векторами і деякі властивості, що пов'язують точки і вектори.

Система аксіом Вейля складається з 16 аксіом, які поділяються на 5 груп. З них одна частина – аксіоми векторного простору (V), друга – аксіоми точкового простору (T) в його зв'язку з векторним простором.

I група

Аксіоми додавання векторів

Перша група аксіом описує відображення $V \times V \to V$, що називається операцією додавання векторів. Ця операція (відношення) дозволяє будь-яким векторам $\vec{a}, \vec{b}$ віднести третій вектор – їх суму.

$\varphi_{+}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y}$ – так, що виконуються такі аксіоми:

I_1. Додавання векторів комутативне, тобто для будь-яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справедлива рівність:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

I_2. Додавання асоціативне, тобто для будь-яких трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ виконується така рівність:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

I_3. Існує такий вектор $\vec{\theta}$, що для будь-якого вектора $\vec{a}$ справедливе співвідношення:

$$\vec{a} + \vec{\theta} = \vec{a}.$$

I_4. Для будь-якого вектора $\vec{a}$ існує такий вектор $\vec{a}'$, що

$$\vec{a} + \vec{a}' = \vec{\theta}.$$

Вектор $\vec{a}'$ називається протилежним вектору $\vec{a}$.

Вектор $\vec{\theta}$ називається нульовим вектором.

Аксіоми I_1-I_4 означають, що вектори відносно операції додавання утворюють абелеву (комутативну) групу.

II група

Аксіоми множення вектора на число

Друга група аксіом описує відображення $V \times R \to V$, яке називається операцією $\varphi_{\cdot}$ множення вектора на число (R – поле дійсних чисел). Кожному вектору $\vec{a}$ і $\lambda \in R$ однозначно співставляється вектор $\varphi_2(\lambda, \vec{a}) = \lambda\vec{a}$, який називається добутком вектора $\vec{a}$ на число λ.

II_1. Операція множення вектора на одиницю не змінює вектора:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

II_2. Операція множення дистрибутивна відносно додавання векторів, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і будь-якого дійсного числа λ справедлива рівність:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

II$_3$. Операція множення дистрибутивна відносно додавання чисел, тобто для будь-якого вектора $\vec{a}$ і будь-яких дійсних чисел λ, u виконується рівність:

$$(\lambda +) = \vdash .$$

II$_4$. Операція множення на число асоціативна, тобто для будь-якого $\vec{a}$ і будь-яких чисел λ, u виконується рівність:

$$\lambda = \mu.$$

Аксіоми I- II груп дозволяють визначити поняття векторного простору.

III група

Аксіоми розмірності

Перш ніж перейти до формулювання аксіом III групи, нагадаємо поняття лінійно незалежної (залежної) системи векторів.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ називається лінійно незалежною (залежною), якщо з рівності $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{\theta}$ слідує, що всі $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{..} \in R$ дорівнюють нулеві (не всі $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{..}$ дорівнюють нулеві).

Вектор $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_{..}\vec{a}_k$ називається лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$.

III$_1$. Існують три лінійно незалежних вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

III$_2$. Будь-які чотири вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ лінійно залежні.

Аксіоми I-III груп дозволяють ввести поняття тривимірного векторного простору.

На основі аксіом I-III груп можна довести, наприклад, такі твердження:

а) Існує <u>єдиний</u> нульовий вектор, тобто такий вектор $\vec{\theta}$, що $\vec{a} + \vec{\theta} = \vec{a}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$ (див. акс. I$_3$).

б) Для кожного вектора $\vec{a}$ існує <u>єдиний</u> протилежний вектор, тобто такий вектор $\vec{a}'$, що $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{\theta}$ (див. I$_4$).

в) Для будь-яких двох векторів $\vec{a}, \vec{b}$ існує <u>єдиний</u> вектор $\vec{x}$ такий, що $\vec{a} + \ = \ $.

IV група

Аксіоми скалярного добутку векторів

Четверта група аксіом описує відображення V×V→R, яке називається операцією скалярного множення векторів. Ця операція дозволяє будь-яким двом векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однозначно віднести дійсне число $\varphi(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\vec{b}$ (скалярний добуток даних векторів) так, що виконуються такі аксіоми:

IV_1. Скалярний добуток $\vec{a}\vec{b}$ комутативний, тобто для будь-яких векторів $\vec{a},\vec{b}$ виконується рівність:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}.$$

IV_2. Для будь-яких векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ справедлива рівність:

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}.$$

IV_3. Для будь-яких векторів $\vec{a},\vec{b}$ і будь-якого дійсного числа α має місце співвідношення:

$$(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b}).$$

IV_4. Для будь-якого ненульового вектора $\vec{a}$ виконується співвідношення $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$; $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$, якщо $\vec{a}=\vec{0}$.

Векторний простір розмірності три над полем дійсних чисел R, в якому виконані ще аксіоми IV_1- IV_4, називається *евклідовим векторним простором*.

Величина $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ називається *довжиною* вектора $\vec{a}$.

Кутом між векторами $\vec{a},\vec{b}$ називається число φ, яке задовольняє рівність:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\sqrt{\vec{a}^2}\sqrt{\vec{b}^2}}.$$

V група

Аксіоми відкладання вектора від точки

Поняття векторного простору відіграє фундаментальну роль в усіх галузях сучасної математики. Тепер, базуючись на цьому фундаменті, ми будемо рухатись в напрямі геометрії. Геометрія вивчає точки і фігури – множини точок.

Поняття точки – наступне неозначуване поняття. Точки і вектори – об’єкти різної природи, але вони досить тісно пов’язані між собою. Цей зв’язок виражається в аксіомах V групи. Аксіоми V групи описують операцію $\varphi \quad '\times \quad \to$ відкладання вектора від точки. Ця операція дозволяє будь-яким двом точкам A, B однозначно співставити деякий вектор $\vec{a} \in$. Вектор $\varphi(A,B)$ далі будемо позначати $\vec{AB}$, причому точка A називається початковою точкою вектора $\vec{AB}$, а точка B – кінцевою. Вектор $\vec{AB}$ визначається аксіомами відкладання. Перерахуємо ці аксіоми:

V_1. Для кожної фіксованої точки $A \in$ відображення $T \to$, що визначене за законом $\varphi(A,B) = \vec{AB}$, є взаємно однозначним відображенням множини T на множину векторів V. Іншими словами: для будь-якої точки A і будь-якого вектора $\vec{a}$ існує єдина точка B така, що $\vec{AB} = \vec{a}$.

V_2. Для будь-яких трьох точок A, B, C справедлива рівність:

$$\vec{A\!E} + \quad = $$

Аксіома V_1 називається аксіомою відкладання вектора від точки, V_2 – аксіомою трикутника.

Евклідів векторний простір, в якому виконуються аксіоми V_1, V_2 називається точково-векторним евклідовим простором або евклідовим простором E_3.

Векторний простір, в якому виконуються лише аксіоми V групи (скалярний добуток не заданий), називається афінним простором A_3.

Таким чином, система аксіом I-V груп і є система аксіом евклідової геометрії за Вейлем. Всі інші поняття, які зустрічаються в геометрії, як наприклад, пряма, площина, кут і т.д., вводяться за допомогою означень на основі основних, початкових понять.

Розглянемо як на основі цієї системи аксіом вводяться поняття прямої, відрізка, променя, кута, площини.

§5.2. Поняття прямої, площини, відрізка, променя, кута

1. Означення прямої.

Візьмемо точку $A \in E_3$ і вектор $\vec{a} \in V, \vec{a} \neq \vec{0}$. *Прямою* l називається така множина l точок M простору E_3, для яких виконується умова $\overrightarrow{AM} = t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$, тобто $l = \{M \in E_3 \mid \overrightarrow{AM} = t\vec{a}, t \in \mathbb{R}\}$.

Вектор $\vec{a}$ – напрямний вектор прямої l.

Назвемо два вектори $\vec{a}, \vec{b}$ колінеарними $(\vec{a} \parallel \vec{b})$, якщо вони лінійно залежні, тобто

$$\vec{a} = \lambda\vec{b}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Якщо взяти вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$, колінеарний $\vec{a}$, то $\overrightarrow{AM} = t\vec{a} = t(\lambda\vec{b}) = (t\lambda)\vec{b}, t\lambda \in \mathbb{R}$. Значить, вектор $\vec{b}$ також може слугувати напрямним вектором прямої l.

Візьмемо точку $B \in l$. Тоді існує число $t_0 \in \mathbb{R}$, що $\overrightarrow{AB} = t_0\vec{a}$. Звідси $\overrightarrow{BA} = -t_0\vec{a}$.

Для трьох точок B, A, M (акс. V_2) виконується співвідношення:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}.$$

Отже, $\overrightarrow{BM} = -t_0\vec{a} + t\vec{a} = (t - t_0)\vec{a}$, де $t - t_0 \in \mathbb{R}$. А звідси слідує, що точка A не відіграє якоїсь особливої ролі в означенні прямої l і її можна замінити будь-якою іншою точкою $B \in l$.

Дві різні точки $A, B \in E_3$ визначають пряму (AB), що через них проходить:

$$(AB) = \{M \in E_3 \mid \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

2. Означення площини.

Візьмемо точку $A \in E_3$ і два не колінеарних вектора $\vec{a}, \vec{b} \in V$. *Площиною* ми називаємо множину π точок M:

$$\pi = \{M \in E_3 \mid \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

І в цьому означенні точку A можна замінити будь-якою іншою точкою $B \in \pi$. Більше того, множина π залишиться тією ж, якщо замість векторів $\vec{a}, \vec{b}$ взяти вектори $\vec{a}_1 = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b}, \vec{b}_1 = \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b}$.

Три точки $A, B, C \in E_3$, які не лежать на одній прямій, визначають площину (ABC), що через них проходить:

$$(ABC) = \{M \in E_3 | \vec{AM} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}, \alpha, \beta \in R\}.$$

3. Означення відрізка.

Нехай $A, B \in E_3, A \neq B$. Будемо говорити, що точка M *лежить між* точками A і B, якщо $\vec{AM} = t\vec{AB}, 0 < t < 1$.

Відрізком з кінцями в точках A і B ($A \neq B$) називається множина точок

$$[AB] = \{M \in E_3 | \vec{AM} = t\vec{AB}, 0 \le t \le 1\}.$$

4. Означення променя.

Нехай $A, B \in E_3, A \neq B$. *Променем* з початком в точці A, який проходить через точку B, називається множина точок:

$$[AB) = \{M \in E_3 | \vec{AM} = t\vec{AB}, t \ge 0\}.$$

Візьмемо точку $B_1 \in [AB)$. Тоді $\vec{AB_1} = t_1 \vec{AB}, t_1 \ge 0$. Якщо $B_1 \neq A$, то $t_1 > 0$ і $\vec{AB} = \frac{1}{t_1}\vec{AB_1}$, тоді $\vec{AM} = t\vec{AB} = \frac{t}{t_1}\vec{AB_1}, \frac{t}{t_1} \ge 0$. Тому $[AB) = [AB_1)$, тобто точка B не відіграє ніякої особливої ролі на промені $[AB)$ і її можна замінити будь-якою іншою точкою $B_1 \in [AB), B_1 \neq A$.

5. Означення кута.

Нехай промені $[OA)$ і $[OB)$ з спільним початком O належать деякій площині π. *Кутом* $\angle AOB$ називається множина точок

$$\angle AOB = \{M \in E_3 | \vec{OM} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}, \alpha, \beta \in R, \alpha \ge 0, \beta \ge 0\}.$$

§5.3. Наслідки з системи аксіом Вейля

Наведемо доведення окремих тверджень, які випливають з аксіом Вейля.

<u>Т.1.</u> Для будь-якого вектора $\vec{p}$ має місце співвідношення $0 \cdot \vec{p} = \vec{0}$.

Доведення. За аксіомами II_1-II_3 маємо: $\vec{p} = \cdot \vec{p} = 1 +)\vec{p} = \cdot \vec{p} + \cdot \vec{p} = +) \cdot \vec{p}$. Так як $\vec{0}$ – єдиний, то звідси $0 \cdot \vec{p} =$).

<u>Т.2.</u> Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно незалежні, то кожен з них відмінний від $\vec{0}$.

Доведення. Справді, якщо, наприклад, $\vec{a} =$), то abc bc Тобто вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно залежні, а це суперечить умові.

<u>Т.3.</u> Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно незалежні вектори. Покладемо $\vec{c}' = + +$, де λ, u, ν – дійсні числа, причому $\lambda \neq$). Тоді вектори $\vec{a}'\ \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні.

Доведення. Дійсно, нехай $\alpha + \beta + \gamma =$), тобто $\alpha\ \lambda + \mu + \nu) + \beta + \gamma =$). Використовуючи аксіоми I_1, II_2, II_3, II_4, ми можемо цю рівність переписати у вигляді $(\alpha\lambda\ \vec{a} + \alpha\mu - \beta\ \vec{b} + \alpha\nu - \gamma\ \vec{c} =$).

Поскільки вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні, то

$$\alpha\lambda =);\ \alpha\mu - \beta =);\ \alpha\nu - \gamma =).$$

Звідси $\alpha =$) (бо $\lambda \neq$)) і тому $\beta =$), $\gamma =$). Отже, рівність $\alpha + \beta + \gamma =$) має місце тільки у випадку $\alpha = \beta = \gamma =$), тобто вектори $\vec{a}'\ \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно незалежні.

<u>Т.4.</u> Для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і будь-яких дійсних чисел λ, u маємо:

$$(\lambda\ )(\mu\ ) = \lambda\mu\ (\vec{a}\vec{b}).$$

Доведення. Справді, за аксіомами IV_1 і IV_3 маємо

$$(\lambda\ )(\mu\ ) = \lambda\ \vec{a}(\mu\ )) = \lambda\ (\mu\ )\vec{a}) = \lambda\mu\ \vec{b}\vec{a}) = \lambda\mu\ (\vec{a}\vec{b}).$$

<u>Т.5.</u> Для будь-якого відмінного від нуля вектора $\vec{a}$ можна знайти таке дійсне число λ, що вектор $\vec{a}* = \lambda$ задовольняє співвідношення $\vec{a} * \vec{a}* =$.

Доведення. Покладемо $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{\vec{a}\vec{a}}}$ і застосуємо Т.4 (число $\vec{a}\vec{a} > 0$ за аксіомою IV_4).

<u>Т.6.</u> Існують три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, що задовольняють співвідношення

$$\vec{a}\vec{a} = \vec{b}\vec{b} = \vec{c}\vec{c} = 1, \ \vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 0. \qquad (*)$$

(Таку трійку векторів називають ортонормованим базисом).

Доведення. За аксіомою III_1 існують три довільні лінійно незалежні вектори $\vec{a}'$ $\vec{b}'$ $\vec{c}'$ Тоді за Т.2 вектор $\vec{a}'$ відмінний від $\vec{0}: \vec{a}' \neq 0$. Виберемо таке число $\lambda \neq 0$, що вектор $\lambda \vec{a}' = \vec{a}$ задовольняє співвідношення $\vec{a}\vec{a} = 1$ (теорема 5). За теоремою 3 вектори $\vec{a}, \vec{b}', \vec{c}'$ – лінійно незалежні. Покладемо $\vec{b}'' = \vec{b}' - (\vec{a}\vec{b}')\vec{a}$. За аксіомами IV_1-IV_3 безпосереднім підрахунком знайдемо $\vec{a}\vec{b}'' = 0$. За Т.3 вектори $\vec{a}, \vec{b}'', \vec{c}'$ – лінійно незалежні. Тому вектор $\vec{b}'' \neq 0$ (Т.2), а це означає, що існує таке число $\mu \neq 0$, що вектор $\mu \vec{b}'' = \vec{b}$ задовольняє умову $\vec{b}\vec{b} = 1$ (Т.5). З теореми 4 випливає, що $\vec{a}\vec{b} = \mu(\vec{a}\vec{b}'') = 0$. За Т.3 вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}'$ – лінійно незалежні. Покладемо $\vec{c}'' = \vec{c}' - (\vec{a}\vec{c}')\vec{a} - (\vec{b}\vec{c}')\vec{b}$. Безпосередній підрахунок за допомогою аксіом IV_1-IV_3 показує, що $\vec{a}\vec{c}'' = 0, \vec{b}\vec{c}'' = 0$. Крім того, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}''$ – лінійно незалежні (Т.3) і тому $\vec{c}'' \neq 0$. Отже, існує таке число ν, що вектор $\vec{c} = \nu \vec{c}''$ задовольняє умову $\vec{c}\vec{c} = 1$. Крім того, за теоремою 4 маємо:

$$\vec{a}\vec{c} = \nu(\vec{a}\vec{c}'') = 0; \ \vec{b}\vec{c} = \nu(\vec{b}\vec{c}'') = 0.$$

Отже, побудовані вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задовольняють всім вимогам (*).

<u>Т.7.</u> Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – довільний ортонормований базис, тобто вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задовольняють умови $\vec{a}\vec{a} = \vec{b}\vec{b} = \vec{c}\vec{c} = 1$, $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 0$. Тоді вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно незалежні.

Доведення. Справді, нехай λ, μ, ν – такі числа, що виконується співвідношення $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$. Помноживши скалярно обидві частини цієї рівності на вектор $\vec{a}$, дістанемо: $\lambda(\vec{a}\vec{a}) + \mu(\vec{a}\vec{b}) + \nu(\vec{a}\vec{c}) = 0$. Звідси $\lambda = 0$.

Аналогічно ми знайдемо, що $\mu = 0$, $\nu = 0$. Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно незалежні.

<u>Т.8.</u> Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – довільний ортонормований базис і $\vec{p}$ – довільний вектор. Тоді існують такі числа α, β, γ, що

$$\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}. \qquad (**)$$

Ці числа визначаються однозначно.

Доведення. На основі аксіоми III_2 будь-які чотири вектори лінійно залежні, тобто існують такі числа χ, λ, μ, ν що

$$\chi\vec{p} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0} \qquad (***)$$

і серед чисел χ, λ, μ, ν хоча би одне відмінне від нуля. Якби число $\chi = 0$, то ми б одержали $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$, а це суперечить лінійній незалежності векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (Т.7). Таким чином, $\chi \neq 0$. Помножимо обидві частини співвідношення (***) на $\dfrac{1}{\chi}$, ми одержимо (використовуючи співвідношення $\lambda\vec{0} = \vec{0}$, яке доводиться так, як Т.1):

$$\vec{p} + \frac{\lambda}{\chi}\vec{a} + \frac{\mu}{\chi}\vec{b} + \frac{\nu}{\chi}\vec{c} = \vec{0}.$$

Звідси

$$\vec{p} = \left(-\frac{\lambda}{\chi}\right)\vec{a} + \left(-\frac{\mu}{\chi}\right)\vec{b} + \left(-\frac{\nu}{\chi}\right)\vec{c}.$$

Таким чином, числа $\alpha = -\dfrac{\lambda}{\chi}$, $\beta = -\dfrac{\mu}{\chi}$, $\gamma = -\dfrac{\nu}{\chi}$ задовольняють співвідношенню

$$\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Доведемо тепер единість чисел α, β, γ. Припустимо, що існують числа α', β', γ', які задовольняють співвідношення

$$\vec{p} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}.$$

Віднімаючи від (**) попередній вираз, дістанемо

$$(\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} + (\gamma - \gamma')\vec{c} = \vec{0}.$$

Так як $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно незалежні, то

$$\alpha - \alpha' = 0; \ \beta - \beta' = 0; \ \gamma - \gamma' = 0.$$

Отже, числа α, β, γ визначаються вектором $\vec{p}$ однозначно.

Історична довідка

Герман Вейль

Герман Вейль (1885-1955) – один з визначних математиків першої половини XX століття.

У 1908 році закінчив Геттінгенський університет, в якому працював спочатку приватдоцентом (до 1913р.), а потім професором (1930-1933). У 1933р. емігрував до США, де працював у м.Прінстоні (1933-1951). У 1951р. Вейль повернувся до Цюріха, де працював раніше професором у технологічному інституті (1913-1930). Праці Вейля (список нараховує 179 назв) стосуються різних галузей математики: тригонометричні ряди, теорія функцій комплексної змінної, диференціальні та інтегральні рівняння, теорія чисел. Найбільше значення має комплекс праць з теорії неперервних груп та їх зображень із застосуванням до проблем геометрії і фізики. За праці з геометрії і теорії груп Вейль був нагороджений премією ім.Лобачевського (1927 р.).

Контрольні запитання

1. Назвіть основні об’єкти і основні відношення системи аксіом Г. Вейля евклідової геометрії.

2. Назвіть аксіоми додавання векторів системи аксіом Г. Вейля.

3. Назвіть аксіоми множення вектора на число системи Г. Вейля.

4. Назвіть аксіоми скалярного добутку векторів системи Г. Вейля.

5. Назвіть аксіоми розмірності та аксіоми відкладання вектора від точки в системі Г. Вейля.

6. Дайте означення прямої, площини, відрізка, променя, кута в системі Вейля.

7. Сформулюйте основні наслідки з системи аксіом Г. Вейля.

Рекомендована література: [II, 3, 4, 7, 8, 10, 13], [IV, 7, 10].

Глава 6. Різні шляхи обґрунтування геометрії

У величезному саду геометрії,

кожен може підібрати собі букет за смаком.

Д. Гільберт

З відкриттям Лобачевським нової геометрії, відмінної від евклідової, розпочалось нове розуміння аксіоматичного методу,що привернуло увагу багатьох вчених до аксіоматичної бази евклідової геометрії.

Першими великими досягненнями в аналізі аксіоматики евклідової геометрії стали дослідження німецького математика М. Паша (1843-1930) та італійського математика Д. Пеано (1858-1932).

М. Паш у «Лекціях з нової геометрії» (1882) формулює 12 аксіом належності і порядку, 10 аксіом конгруентності і неперервності, дуже близько підходячи до повної системи аксіом евклідової геометрії. Ним розроблена аксіоматика опису відношення порядку («лежить між»), яка увійшла як окрема група в наступних періодах розвитку геометрії.

Дж. Пеано досліджує аксіоматику, що розкриває суть поняття «рух». На межі XIX-XX ст. були побудовані перші повні системи аксіом евклідової геометрії. Окремі з них відрізнялись не лише переліком прийнятих аксіом, а й різними підходами до обґрунтування евклідової геометрії.

У 1899 р. вийшли в світ праці італійського математика Маріо Пієрі і німецького математика Давида Гільберта. У системі аксіом Д. Гільберта (див. гл. 4) одним з вихідних понять геометрії є «конгруентність». М. Пієрі, продовжуючи ідеї свого вчителя Д. Пеано, вихідним вважає «рух».

У 1902 р. опублікував статтю російський математик В.Ф. Каган (1869-1953), в якій навів аксіоматику, відмінну від попередніх, взявши за основне поняття – відстань між точками.

У 1918 р. німецький математик Герман Вейль вказав ще один шлях аксіоматичної побудови евклідової геометрії, взявши за основне поняття «вектор» та операції над векторами.

Кожна з цих аксіоматик приводить до однієї і тієї ж евклідової геометрії. Проте вони визначають різні підходи до побудови евклідової геометрії. Дамо короткий огляд різних підходів до аксіоматичної побудови евклідової геометрії.

1.Аксіоматика Д. Гільберта

Схему побудови евклідової геометрії на аксіоматиці Гільберта ми розглядали раніше (гл. 4)

Система аксіом Гільберта складається з п’яти груп,кожна з яких характеризує відповідні властивості евклідового простору.

Під тривимірним простором Евкліда Гільберт розуміє множину E^3, яка складається з трьох підмножин,елементи яких(відповідно їх називають точками, прямими, площинами)знаходяться в основних відношеннях «лежить на», «лежить між», «конгруентність», які задовольняють всім вимогам аксіом I-V груп.

Якщо з цієї системи виключити аксіоми конгруентності(III група), то дістанемо аксіоматику афінної геометрії. I-IV групи аксіом є системою абсолютної геометрії. Якщо аксіому паралельних (V) замінити її запереченням, то дістанемо аксіоматику геометрії Лобачевського (гіперболічної геометрії).

Аксіоми неперервності (IV група) відіграють важливу роль у розширенні множини точок прямої (простору). Пряма на основі цих аксіом стає нескінченною множиною точок, еквівалентною множині дійсних чисел. Без аксіом неперервності поняття нескінченної множини не використовується.

Д. Гільберт завершив тривалий період (від Евкліда до кінця XIX ст.) формування системи аксіом евклідової геометрії, яка задовольняє вимогам несуперечливості, незалежності, повноти.

2. Система аксіом евклідової геометрії,в яких основним поняттям є поняття «руху».

М. Пієрі запропонував аксіоматику евклідової геометрії, в якій вихідними поняттями були тільки «точка» і «рух». Система аксіом виявилась громіздкою, в ній не було, як в аксіоматиці Гільберта чіткого розбиття на групи аксіом. Тому аксіоматика М. Пієрі не набула такого поширення, як аксіоматика Д. Гільберта.

У 1909 р. німецький математик Фрідріх Шур частково перебудував систему аксіом Гільберта, включивши замість аксіом конгруентності аксіоми руху,тобто в аксіоматиці Шура вихідними поняттями є «точка», «пряма», «площина», «належати», «лежати між», «рух».

Аксіоматика Ф.Шура евклідової геометрії складається з аксіом I, II, IV, V груп системи аксіом Гільберта і аксіом руху (III група). Перелічимо аксіоми руху.

III'_1. Якщо задано рух, то він відображає дану точку A на одну певну точку A'.

III'_2.Якщо задано рух, то він відображає на довільну точку A' деяку точку A.

III'_3.Рух зберігає відношення «лежати між».

III'_4.Кожен рух відображає пряму на пряму,площину на площину, зберігаючи відношення належності.

III'_5.Композиція будь-яких двох рухів є рух.

III'_6.Перетворення, обернене до руху, є рух.

III'_7.Якщо задано два репери, то існує рух,який відображає один з них на інший.

III'_8.Якщо дано два репери, то існує не більше як один рух, який відображає один з них на другий.

На основі аксіом належності,порядку і руху можна довести гільбертові аксіоми конгруентності. Навпаки, на основі аксіом належності,порядку і конгруентності в системі аксіом Гільберта можна довести аксіоми руху в аксіоматиці Шура. А це означає, що аксіоми конгруентності і аксіоми руху еквівалентні відносно I-II груп аксіом.

<u>3.Аксіоматика Віллерса</u>

Кожен рух є композицією не більше трьох симетрій. Тому за вихідне поняття можна брати поняття «симетрії» і сформулювати аксіоми симетрії. Цю ідею здійснив німецький математик Віллерс (1922р.). Він запропонував групу аксіом симетрії, еквівалентну групі аксіом руху відносно І-ІІ груп системи аксіом Гільберта.

<u>Аксіоми симетрії:</u>

III^*_1.Кожній точці А однієї з двох півплощин,на які дана пряма *а* ділить площину, відповідає точка А' другої півплощини. Ця точка називається симетричною А відносно *а*.

III^*_2.Точка А', про яку сказано в аксіомі $III_1{}^*$, єдина.

III^*_3.Якщо точка А належить прямій *а*, то А' збігається з А.

Відображення множини точок площини на себе, при якому кожній точці А цієї площини відповідає симетрична відносно прямої *а* точка А', називається *симетрією* з віссю *а*.

Композиція скінченного числа симетрій називається <u>рухом.</u>

III^*_4.Якщо деякий рух відображає точку А площини на саму себе, а точку В – на таку В' променя АВ, то для будь-якої третьої точки *С* її образ *С'* у цьому русі або збігається з *С*, або симетричний С відносно прямої АВ.

Олексій Погорєлов

III^*_5.Для кожних двох точок А і В існує така пряма *а*, що В симетрична А відносно *а*.

III^*_6.Для променів ОА й ОВ із спільним початком існує така пряма *а*, що кожна точка променя ОВ симетрична відносно *а* деякій точці променя ОА.

<u>4. Аксіоматика О.В. Погорєлова</u>

У своїй праці «Основи геометрії» [II, 17] О.В. Погорєлов наводить систему аксіом, яка одержується з аксіом Гільберта, заміною груп аксіом порядку і конгруентності групою аксіом, які розкривають властивості відношення слідування для пар точок та напряму, і аксіомами руху.

Отже, вихідними (основними) поняттями геометрії у системі аксіом Погорєлова є: «точка», «пряма», «площина», «належність», «напрям», «передувати», «рух». Аксіоми порядку означають поняття «напрям» і «передувати».

Вважається, що на прямій є два взаємно протилежних напрями і щодо кожного з них будь-яка пара точок перебуває у відношенні «передувати». Вираз «А передує В» записується так: $A<B$.

<u>Аксіоми порядку.</u>

II^*_1.Якщо $A<B$ в одному напрямі,то $B<A$ у протилежному напрямі.

II^*_2.В одному з двох напрямів $A<B$ виключає $B<A$.

II^*_3.В одному з двох напрямів,якщо $A<B$,а $C<A$,то $A<C$.

II^*_4.В одному з двох напрямів для кожної точки В знайдуться такі точки А і С, що $A<B<C$.

Якщо для точок А, В, С виконується умова $A<B<C$ або $C<B<A$, то точка В лежить між точками А і С.

II^*_5.Пряма *a*, що лежить у площині α, розбиває цю площину на дві частини (півплощини) так, що коли X і Y – дві точки однієї півплощини, то відрізок XY не перетинається з прямою *a*, якщо ж X і Y належить різним півплощинам, то відрізок XY перетинається з прямою *a*.

Ідея прийняття за вихідне відношення між точками, виражене словами «передувати у даному напрямі», належить італійському математику Дж. Вайлаті. У посібнику О.В. Погорєлова дається модифікація відповідної групи аксіом Вайлаті.

Аксіоми руху, перелічені в посібнику, по-суті, збігаються з аксіомами III'_1-III'_8 Шура.

<u>5. Аксіоматика Ф. Бахмана</u>

Ідеї Пієрі і Віллерса розвинув далі німецький математик Фрідріх Бахман (1954 р.). У своїй праці «Побудова геометрії на основі поняття

Фрідріх Бахман

симетрії» він дає побудову плоскої метричної геометрії, яка систематично використовує симетрії і породжену ними групу рухів. В системі Бахмана осьові і центральні симетрії є навіть неосновними «відношеннями», що пов'язують точки і прямі, а самі приймаються за основні об'єкти геометрії, замінюючи тим самим точки і прямі. Вводиться новий метод проведення доведень у геометрії.

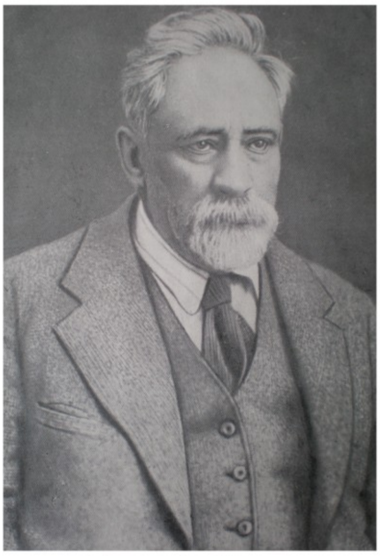
З аксіоматикою Бахмана можна ознайомитися у [II, 6].

6. Метричний шлях обґрунтування евклідової геометрії

6.1. Аксіоматика В.Ф.Кагана

Французьким математиком М.Фреше у 1906 році у математику було введене загальне поняття метричного простору.

Поняття метричного простору широко застосовується як у самій математиці, так і у прикладних науках, пов'язаних з нею.



Веніамін Каган

У 1904 році В. Ф. Каган (1869-1953рр.) у своїй роботі «Досвід обґрунтування евклідової геометрії» навів аксіоматику евклідової геометрії, взявши за основні поняття «точка», «відстань», «рух».

Система аксіом складається з 10 аксіом. Множина всіх точок називається простором. Будь які дві точки A і B пов'язані відношенням,яке називається відстанню і позначається через |AB|. Точки A, B, C розміщені прямолінійно,якщо відстані між ними зв'язані співвідношенням |AB|+|BC|=|AC|. У такому випадку точка B *лежить між* точками A і C.

Прямолінійним образом називається така множина точок, в якій будь-які три точки розміщені прямолінійно. *Прямою AB* називається множина точок A, B і всіх точок, розміщених відносно них прямолінійно.

Аксіома 1. Між будь-якими двома точками A і B на довільній відстані, меншій за |AB|, від кожної з точок A і B є точка,розміщена прямолінійно відносно точок A і B.

Аксіома 2. Якщо кожна з двох точок розміщена прямолінійно відносно двох інших точок,то перші точки утворюють з останніми прямолінійний образ.

Аксіома 3. Якщо деякий рух відображає різні точки A і B на дві різні точки A' і B', то відстані |AB| і |A'B'| рівні.

Аксіома 4. Ніякий рух не відображає всіх точок на одну і ту саму точку.

Аксіома 5. Якими б не були два рухи,існує рух, що є їх композицією.

Рух, який відображає точку A на саму себе, називається *поворотом* навколо точки A.

Аксіома 6. Поворотом навколо двох точок A і B кожна третя точка C може бути відображена на будь-яку точку C',якщо виконуються рівності |AC|=|AC'| і |BC|=|BC'|.

Якщо множина точок,відстані кожної з яких до двох даних точок A і B рівні між собою,містить точки, що не належать одній прямій, то вона називається *площиною*. Точки A і B при цьому називаються *полюсами площини*.

Аксіома 7. Існує принаймні одна площина.

Означення відрізка, його кінців, внутрішніх точок дається, так як і в аксіоматиці Гільберта.

Нехай маємо площину α і дві пари точок A, B і C, D, що їй належать. Якщо в площині не існує прямої,яка проходить через точки C і D і внутрішню точку відрізка AB, то точки A і B лежать у площині α з *одного боку* від точок C і D.

Аксіома 8. Якщо три точки A, B, C лежать в одній площині і з трьох пар точок AB, BC, CA дві пари розміщені в цій площині з одного боку від точок M і H, то точки третьої пари також лежать з одного боку від точок M і H. (Ця аксіома є видозміненою аксіомою Паша).

Аксіома 9. Існує площина, в якій для будь-яких трьох точок, що не мають прямолінійного розміщення, існує принаймні одна точка, яка міститься від цих трьох точок на однакових відстанях. (Ця аксіома є еквівалентом V постулату Евкліда).

Аксіома 10.Існує така площина, що коли кожна її точка відображається рухом на себе, то і довільна точка відображається на себе.

6.2. Аксіоматика Дж. Біркгофа

Георг-Девід Біркгоф

У 1904 р. американський математик О. Веблен дає побудову евклідової геометрії на основі «метричної» аксіоматики. Його дослідження продовжив інший американський математик Р. Л. Мур у 1908 р. Але найбільш поширеною з «метричної» аксіоматики стала система аксіом американського математика Дж. Біркгофа, який навів систему аксіом планіметрії, що ґрунтується на використанні масштабної лінійки і транспортира(1932р.).

У 1933р. був опублікований підручник з геометрії,в якому наведена метрична аксіоматика Біркгофа (співавтор – Р. Бейтлі).

У 1933 р. вийшов у світ ще один підручник, побудований на аксіоматиці Біркгофа, авторами якого є Едвін Моіз і Флойд Даунс.

Цю книжку перекладено на російську мову (див. [IV, 12]).

Ми не будемо наводити аксіоматику, запропоновану в цій книжці, зауважимо лише, що основними поняттями в ній є поняття «відстань», «міра кута», «точка», «пряма».

6.3. Аксіоматика О. В. Погорєлова

У підручнику О. В. Погорєлова [II, 19] прийнято модифікацію аксіоматики Біркгофа. Вихідними поняттями в системі аксіом є: «точка», «пряма», «площина», «належність», «лежати між», «довжина відрізка», «градусна міра кута».

Аксіоми планіметрії розбито на шість груп:

1)аксіоми належності;

2)аксіоми взаємного розміщення точок на прямій і на площині;

3)аксіоми вимірювання відрізків і кутів;

4)аксіоми відкладання відрізків і кутів;

5)аксіоми рівності трикутників;

6)аксіома паралельних.

Ця система аксіом з деякими змінами була покладена в основу шкільного курсу геометрії (див. [IV, 13]).

Наведемо систему аксіом шкільного курсу геометрії за підручником О. В. Погорєлова.

I. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

II. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

III. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

IV. Пряма, що належить площині, розбиває цю площину на дві півплощини.

V. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180˚. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

VI. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини, і тільки один.

VII. Від будь-якої півпрямої на площині, що містить її, у даній півплощині можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою за 180˚, і тільки один.

VIII. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому у даній площині у заданому розміщенні відносно даної півпрямої у цій площині.

IX. На площині через точку,що не лежить на даній прямій,можна провести не більше як одну пряму,паралельну даній.

Перша аксіома є аксіома належності, друга і четверта аксіоми – аксіоми взаємного розміщення точок на прямій і на площині, третя, п’ята – аксіоми вимірювання відрізків і кутів; шоста, сьома – аксіоми відкладання відрізків і кутів; восьма – аксіома існування трикутника, що дорівнює даному; дев’ята – аксіома паралельності.

<u>Аксіоми стереометрії</u>

C_1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині і точки, які не належать їй.

C_2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

C_3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж тільки одну.

До «метричної» аксіоматики належить також і аксіоматика А. М. Колмогорова, яка була покладена в основу шкільного курсу геометрії в 80-х роках минулого століття.

Спроба аксіоматичної побудови курсу геометрії для учнів шкіл і класів з поглибленим вивченням математики здійснена авторським колективом під керівництвом академіка О. Д. Александрова у навчальних посібниках з геометрії для 8-9 і 10-11 класів [IV, 2, 3].

Формулювання аксіом у цих посібниках передбачає,що учням відома арифметика дійсних чисел і поняття додатної величини.

Таким чином, ми розглянули три різні напрями обґрунтування евклідової геометрії. Ці напрями відрізнялись один від одного не тільки вибором вихідних понять, а й тим, яке з понять «конгруентність», «рух», «відстань» вважалось «найголовнішим» у даній побудові геометрії. Вони відрізнялись також і свої ставленням до використання у побудові геометрії понять теорії множин і арифметики.

В аксіоматиці Гільберта за вихідне поняття береться поняття конгруентності. «Рух» і «відстань» означаються через конгруентність. Поняття арифметики і теорії множин грають другорядну роль.

У другому напрямі обґрунтування геометрії за вихідне поняття взято «рух», як відображення простору на себе, що має властивості, перелічені в аксіомах. Отже, поняття множини і відображення є найважливішими для такого способу побудови геометрії. «Конгруентність» фігур означається через «рух». Поняття відстані є другорядним. Арифметика не використовується як апарат для побудови геометрії.

У третьому - метричному - напрямі обґрунтування геометрії за вихідне поняття беруть «відстань». Арифметика грає тут істотну роль у побудові геометрії.

Четвертий (векторний) напрям обґрунтування геометрії розглянутий у главі 5. Це –векторна аксіоматика, розроблена Г. Вейлем.

Контрольні запитання

1. Які основні шляхи обґрунтування геометрії?

2. Назвіть систему аксіом евклідової геометрії, в якій основним поняття є поняття «руху».

3. В чому суть аксіоматики Віллерса?

4. Дайте характеристику аксіоматики О. В. Погорєлова.

5. В чому суть метричного шляху обґрунтування евклідової геометрії?

6. Які поняття є основними в системі аксіом шкільного курсу за О. В. Погорєловим?

7. Сформулюйте аксіоми міри для відрізків і кутів, існування трикутника, рівного даному.

Рекомендована література: [I, 5]; [II, 3-8, 10, 13, 16-19]; [IV, 12, 13, 15, 16].

Глава 7. Логічні проблеми системи аксіом Гільберта евклідової геометрії

§7.1. Несуперечливість системи аксіом Гільберта евклідової геометрії

Було б великою помилкою вважати,що строгість у доведенні-ворог проблем. Численні приклади переконують нас у протилежному:строгі методи є водночас найпростішими і найдоступнішими. Власне, саме прагнення до строгості і приводить до відшукання найпростіших доведень.

Д.Гільберт

Різні галузі геометрії перебувають у тісних і часто неочікуваних взаємозв'язках одна з одною.

Д.Гільберт

Для доведення несуперечливості геометрії Евкліда ми повинні побудувати таку її модель,об'єкти якої були б не пов'язані з нашими просторовими уявленнями. В якості таких об'єктів візьмемо множину всіх дійсних чисел,причому несуперечливість аксіоматики арифметики дійсних чисел будемо вважати встановленою.

Для простоти обмежимося розглядом інтерпретації евклідової планіметрії.

Розглянемо системау аксіом Гільберта, що складається для цього випадку з аксіом I_{1-} ,II_{1-} ,III_{1-} ,IV_{1} ,V_{1} груп.

<u>Інтерпретаційний словник</u>

1) «Точкою» називається будь-яка пара дійсних чисел (*x, y*), взятих в певному порядку.

2) «Прямою» називається відношення трьох дійсних чисел $(a:b:c)$, взятих в певному порядку, при умові, що принаймні одне з двох чисел a або b не дорівнює нулеві.

3) Будемо говорити,що точка (*x, y*) інцидентна прямій $(a:b:c)$, якщо числа x, у задовольняють лінійне рівняння $ax+by+c=0$

4) Нехай три точки А (x_1,y_1), В(x_2,y_2), С(x_3,y_3) лежать на прямій $(a:b:c)$. Якщо $b\neq0$, то будемо говорити,що точка В лежить між точками А, С, якщо $x_1<x_2<x_3$ або $x_1>x_2>x_3$. Якщо $b=0$ (в цьому випадку $x_1=x_2=x_3=-\frac{c}{a}$), то будемо говорити, що точка В лежить між точками А і С, якщо $y_1<y_2<y_3$ або $y_1>y_2>y_3$.

Тлумачення понять конгруентності відрізків і кутів дамо пізніше,ввівши спочатку тлумачення відрізка і кута.

I група. Аксіоми інцидентності

1) Аксіома I_1 має місце. Справді, нехай А(x_1,y_1) і В(x_2,y_2) - дві різні точки, тобто точки, для яких має місце одна з нерівностей $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$. Потрібно довести, що існує пряма $(a:b:c)$, інцидентна обом точкам А і В. Для цього потрібно показати, що система двох однорідних рівнянь

$$\begin{cases} ax_1+by_1+c=0, \\ ax_2+by_2+c=0 \end{cases}$$

з трьома невідомими *a, b, c* має хоча б один розв'язок, причому принаймні одне з чисел *a* або *b* не дорівнює нулеві.

Розв'язавши систему, одержимо:

$$a:b:c=\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \text{ або}$$

$$a:b:c=(y_1-y_2):(x_2-x_1):(x_1y_2-x_2y_1).$$

Так як або $y_1\neq y_2$,або $x_1\neq x_2$, матимемо, що принаймні одне з чисел a або b відмінне від нуля.

2) Аксіома I_2 виконується. Справді, якщо припустити що існує інша пряма $a':b':c'$, яка проходить через точки A і B, то, повторюючи міркування в попередньому пункті, прийдемо до рівності $a':b':c' = a:b:c$, тобто ця пряма збігається з першою.

3) Аксіома I_3 має місце. Дійсно,рівняння $ax+by+c=0$ має нескінченну множину розв'язків (x,y), а це означає,що на прямій є не тільки дві, а нескінченна множина різних точок.

I$_4$. Нехай дана пряма $(a:b:c)$. Ми можемо вказати три точки A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3), які лежать на цій прямій. Візьмемо тепер точку D(x_3,y_4), де $y_4 \neq y_3$. Тоді числа (x_3,y_4) не задовольняють рівняння $ax + by + c = 0$, тобто точка D не лежить на даній прямій. Значить, точки A, B і D не лежать на одній прямій. Доведення справедливе у припущенні, що $b \neq 0$. Якщо $b = 0$, то $x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{c}{a}$. Тоді точка D ($x_4,y$), де $x_4 \neq x_1$ не лежить на даній прямій.

II група. Аксіоми порядку

Аксіоми II_1, II_2, II_3 виконуються з очевидністю. Перевіримо виконуваність аксіоми Паша (II_4). Раніше дане тлумачення поняття «лежить між» замінимо рівносильним.

Нехай дві точки A (x_1,y_1), B(x_2,y_2) лежать на даній прямій $(a:b:c)$. Тоді маємо

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0, \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0 \qquad (*)$$

Нехай тепер (x, y) – довільна третя точка тієї ж прямої $(a:b:c)$. Отже, виконуються рівності $ax + by + c = 0$, $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ (**)

З рівностей (*) і (**) маємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t$$

Тому всі точки (x, y) прямої $(a:b:c)$ визначаються двома параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \end{cases} \qquad (\alpha)$$

де параметр t пробігає значення ($-\infty;+\infty$). При $x_1 \neq x_2$ перша рівність визначає x, як строго монотонну функцію від t; аналогічно друга рівність при $y_1 \neq y_2$ визначає у, як строго монотонну функцію від t. Таким чином, різним значенням t будуть відповідати і різні точки (x,y), що лежать на даній прямій $(a:b:c)$, причому якщо для трьох значень параметра t_1, t_2, t_3 мають місце нерівності $t_1 < t_2 < t_3$, то одночасно будемо мати при $x_1 \neq x_2$ або $x_1' < x_2' < x_3'$, або $x_1' > x_2' > x_3'$ і навпаки.

Аналогічно будемо мати і для y (у випадку $y_1 \neq y_2$). Тому тлумачення «лежить між», яке було дане вище, можна виразити в рівносильному вигляді: Якщо точки, які лежать на прямій $(a:b:c)$, визначаються параметричними рівняннями (α) і трьом точкам C, D, E цієї прямої відповідають значення параметра t_1 , t_2, t_3, то будемо говорити, що точка D лежить між точками C і E, якщо $t_1 < t_2 < t_3$ або $t_1 > t_2 > t_3$.

Дамо означення відрізка:

Система двох точок A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) прямої $(a:b:c)$ називається відрізком [AB] або [BA]. Точки A і B називаються кінцями відрізка. Точки прямої, які відповідають в рівняннях (α) значенням параметра t, що задовольняють нерівностям $0<t<1$, називаються *внутрішніми точками* відрізка [AB]. Всі останні точки прямої називаються зовнішніми точками до відрізка [AB].

Для перевірки аксіоми II_4 доведемо дві леми.

Лема 1. Нехай A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) - кінці відрізка, M(x_0, y_0) - внутрішня точка відрізка AB. Тоді для кожної прямої $(a:b:c)$, яка проходить через точку M і відмінна від прямої AB, числа

$\delta_1 = ax_1 + by_1 + c$ і $\delta_2 = ax_2 + by_2 + c$

мають протилежні знаки.

Доведення. Всі точки прямої AB визначаються з рівнянь (α). Внутрішній точці M(x_0,y_0) відрізка [AB] відповідає в цих рівняннях деяке значення параметра t= t_0, причому $0<t_0<1$.

Нехай $(a:b:c)$,- деяка пряма, що проходить через M, але не збігається з прямою AB. Тоді

$ax_0+by_0+c=0$; $\delta_1=ax_1+by_1+c\neq 0$; $\delta_2=ax_2+by_2+c\neq 0$

Так як $x_0=x_1+(x_2-x_1)t_0$,

$y_0=y_1+(y_2-y_1)t_0$,

то з першої рівності маємо

$a[x_1+(x_2-x_1)t_0]+b[y_1+(y_2-y_1)t_0]+c=0$

Цю рівність перетворимо до вигляду

$(1-t_0)\,\delta_1=-t_0\delta_2$.

Але $t_0>0$; $1-t_0>0$ отже, δ_1 і δ_2 мають протилежні знаки.

Має місце і обернена

<u>Лема 2.</u> Нехай A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) - кінці відрізка і для прямої $(a:b:c)$ числа $\delta_1=ax_1+by_1+c$ і $\delta_2=ax_2+by_2+c$ мають протилежні знаки. Тоді пряма $(a:b:c)$ проходить через деяку внутрішню точку M(x_0,y_0) відрізка [AB].

<u>Доведення.</u> Для означеності покладемо, що $\delta_1>0$, $\delta_2<0$. Пряма $(a:b:c)$ не збігається тому з прямою AB. Точки прямої AB визначаються рівняннями (α).

Визначимо спільну точку M прямих AB і $(a:b:c)$. Значення параметра t_0, що відповідає точці M, повинно задовольняти рівняння

$a[x_1+(x_2-x_1)t_0]+b[y_1+(y_2-y_1)t_0]+c=0$ або

$(1-t_0)(ax_1+by_1+c)+t_0(ax_2+by_2+c)=0$, або $(1-t_0)\delta_1+t_0\delta_2=0$.

Звідси $t_0=\dfrac{\delta_1}{\delta_1-\delta_2}$.

Так як $\delta_1>0$, $\delta_2<0$, то $\delta_1-\delta_2>\delta_1$ і $0<t_0<1$. Отже, пряма $(a:b:c)$ проходить через точку $M(x_0,y_0)$, де $x_0=x_1+(x_2-x_1)t_0$; $y_0=y_1+(y_2-y_1)t_0$, причому M- внутрішня точка відрізка AB. Лема доведена.

На основі цих лем перевіримо виконання аксіоми Паша.

Нехай $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ - три точки, що не лежать на одній прямій, і пряма $(a:b:c)$ проходить через внутрішню точку відрізка [AB], але не проходить ні через одну з точок A, B, C. Тоді числа δ_1, δ_2, δ_3 будуть відмінні від нуля $\delta_1 = ax_1 + by_1 + c \neq 0$; $\delta_2 = ax_2 + by_2 + c \neq 0$; $\delta_3 = ax_3 + by_3 + c \neq 0$;.

За лемою 1 числа δ_1 і δ_2 мають протилежні знаки. Тоді число δ_3 має знак протилежний або з δ_1,або з δ_2. Якщо δ_3 протилежне за знаком з δ_1, то за лемою 2 пряма $(a:b:c)$ проходить через внутрішню точку [AC] і не проходить через внутрішню точку відрізка [BC], якщо ж δ_3 протилежне за знаком з δ_2, то за лемою 2 пряма $(a:b:c)$ проходить через внутрішню точку відрізка [BC], але не проходить через внутрішню точку відрізка [AC].

Отже, аксіома II_4 виконується.

Дамо тлумачення понять «промінь» і «кут». Нехай дана пряма $(a:b:c)$ і на ній точка $O(x_0,y_0)$. Взявши на тій же прямій яку-небудь другу точку $A(x_1,y_1)$, ми одержимо всі точки прямої з рівнянь

$$\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt, \end{aligned} \qquad (\beta)$$

де $m=x_1-x_0$; $n=y_1-y_0$.

З (β) маємо $\dfrac{x-x_0}{y-y_0}=\dfrac{m}{n}$.

Точці $O(x_0,y_0)$ відповідає t=0.

Розділимо точки прямої $(a:b:c)$ на два класи, до I-класу віднесемо всі точки, яким відповідають значення $t>0$, а до II- класу- всі точки, для яких $t<0$. Точка $O(x_0,y_0)$ лежить між точками різних класів.

Означення «променя»

«Променем» прямої $(a:b:c)$ з вершиною в точці O(x_0,y_0) називається *множина всіх точок цієї прямої, які визначаються рівняннями $x=x_0+mt$,* y=y_0+nt, що відповідають або значенням t >0, або значенням t <0.

Промені будемо позначати так:

$$h=(x_0,y_0,\ m:\ n),\ \ h'=(x_0,y_0,-\ m:-\ n).$$

Означення «кута»

«Кутом» називається сукупність двох променів h і k з вершиною в точці (x_0,y_0). Будемо позначати кут так: $\angle$(h,k). Перевіримо тепер аксіоми III групи. Дамо тлумачення конгруентності відрізків і кутів.

Означення конгруентності відрізків

Нехай дано дві пари точок A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) і C(x_3,y_3), D(x_4,y_4). Відрізки [AB] і [CD] називаються «конгруентними», якщо має місце рівність

[illegible]

Означення конгруентності кутів

Нехай дані два кути:один з вершиною в точці A(x_1,y_1) визначається променями $h_1(x_1,y_1;m_1:n_1)$ і $k_1(x_1,y_1;m'_1:n'_1)$, другий з вершиною в точці B(x_2,y_2) визначається променями $h_2(x_2,y_2;m_2:n_2)$; $k_2(x_2,y_2;m'_2:n'_2)$. Будемо кути ($h_1,\ k_1$) і ($h_2,\ k_2$) називати «конгруентними», якщо має місце рівність

[illegible]

Перевіримо тепер виконання аксіом III групи.

1) Аксіома III_1 виконується. Справді, нехай дані довільна пряма $(a:b:c)$, точки якої визначаються рівняннями $x=x_0+mt$, $y=y_0+nt$, і довільний відрізок [AB], що визначається кінцями A(x_1,y_1) і B(x_2,y_2). Покажемо, що на прямій $(a:b:c)$ по обидві сторони від точки O(x_0,y_0) існують такі точки C і C', що [OC]$\cong$[AB], [OC']$\cong$[AB].

Шукані точки (x,y) повинні задовольняти рівність

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ або $m^2t^2+n^2t^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$.

Звідси шукані значення параметра t:

$$t=\pm\sqrt{\frac{\dots}{n^2+\dots}}$$

Ми одержали дві точки, розміщені на прямій $(a:b:c)$ по різні сторони від точки О(x_0,y_0) і які задовольняють вимозі конгруентності відрізку [AB].

2) Справедливість аксіом III_2 і III_3 очевидна.

3)Аксіома III_4 має місце.

Нехай дана довільна пряма $(a:b:c)$, точки якої визначаються рівняннями $x=x_0+m_0t,\ y=y_0+n_0t$, і довільний кут (h,k) з вершиною в точці А(x_1,y_1), утворений променями $h(x_1,y_1;m_1:n_1)$ і $k(x_1,y_1;m_2:n_2)$. Покажемо, що існує кут з вершиною в точці (x_0,y_0), для якого промінь ($x_0,y_0;m_0:n_0$) при t>0 є однією з сторін і який конгруентний даному куту (h,k).

Шуканий промінь ($x_0,y_0;m:n$) визначається з умови

$$\frac{m_1\dots+\dots}{\sqrt{m_1^2+\dots}\ \dots}=\frac{\dots+\dots}{\dots+\dots}$$

Позначимо число, яке стоїть в лівій частині рівності, через S, а числа $\frac{m_0}{\sqrt{m_0^2+\dots}}$ і $\frac{n_0}{\sqrt{m_0^2+\dots}}$ - через α і β .

Покажемо,що

$|S|\le 1,\ \alpha^2+\beta^2=1$.

Розглянемо різницю

$$\dots .$$

Отже, $|m_1m_2+\dots|\le\sqrt{m_1^2+\dots}\ \sqrt{m_2^2+\dots}$.

Звідси $|S|=\frac{|m_1m_2+\dots|}{\sqrt{m_1^2+\dots}\ \sqrt{m_2^2+\dots}}\le 1$.

Невідомі $\frac{m}{\sqrt{m^2+\dots}}$ і $\frac{n}{\sqrt{m^2+\dots}}$ позначимо відповідно через ξ і η; очевидно, що $\xi^2+\eta^2=1$. Таким чином, маємо систему двох рівнянь: $\alpha\xi+\beta\eta=S$; $\xi^2+\eta^2=1$. (ξ, η – невідомі). Ця система має два дійсні розв’язки:

$$\begin{cases} \xi_{-} = \alpha + \beta\sqrt{1-s^2};\ \xi_{-} = \alpha - \beta\sqrt{1-s^2}, \\ \eta_{-} = \beta - \alpha\sqrt{1-s^2};\ \eta_{-} = \beta + \alpha\sqrt{1-s^2} \end{cases}$$

Будь-які числа m і n, що задовольняють умову $\frac{m}{n} = \frac{\xi_{-}}{\eta_{-}}$ або $\frac{m}{n} = \frac{\xi_{-}}{\eta_{-}}$, визначають два променя з вершиною в точці O(x_0,y_0), які утворюють з променем ($x_0,y_0;m_0:n_0$) кути, конгруентні куту (h,k). Ці промені розміщені по різні сторони від прямої $(a:b:c)$.

Аксіома III_5 виконується.

Нехай дано трикутник АВС з вершинами A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) і C(x_3,y_3), і трикутник A'B'C' з вершинами A'(x_4,y_4), B'(x_5,y_5) і C'(x_6,y_6), причому [AB]$\cong$ [illegible], [AC]$\cong$ [illegible], $\angle$A$\cong$ $\angle$ [illegible].

Це означає, що мають місце рівності

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(x_5-x_4)^2+(y_5-y_4)^2, \qquad (7.1)$$

$$(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2=(x_6-x_4)^2+(y_6-y_4)^2, \qquad (7.2)$$

[illegible] =

= [illegible] (7.3)

Враховуючи (7.1) і (7.2), рівність (7.3) можна переписати в простішому вигляді $(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)=(x_5-x_4)(x_6-x_4)+(y_5-y_4)(y_6-y_4)$ (7.4)

Нам потрібно довести, що $\angle$B$\cong$ $\angle$ [illegible], тобто показати, що має місце рівність

[illegible] =-

= [illegible] (7.5)

Якщо взяти до уваги (7.1),то (7.5) запишеться так:

[illegible]

$$= \frac{[illegible]}{\sqrt{[illegible]}}. \qquad (7.6)$$

Якщо додати (7.1) і (7.2) і відняти подвоєну рівність (7.4),то ми доведемо рівність знаменників у співвідношенні (7.6). Якщо від (7.4) відняти (7.1),то ми переконаємось,що рівні чисельники у виразі (7.5). Отже, рівність (7.5) має місце, а тому має місце і аксіома III_5.

IV група. Аксіома неперервності Дедекінда

Нехай дані дві точки A(x_1,y_1) і B(x_2,y_2), які визначають відрізок [AB]. Всі точки прямої AB визначаються з рівнянь

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \end{cases} \text{ де } m = x_2 - x_1,\ n = y_2 - y_1 \qquad (d)$$

Всі точки відрізка [AB], включаючи і його кінці, одержуються з рівностей (d) при значеннях параметра: $0 \leq t \leq 1$.

Припустимо тепер, що всі точки [AB] розділені на 2 класи так, що при цьому виконані всі умови аксіоми Дедекінда, тобто:

1. Кожна точка відрізка [AB] належить одному і тільки одному з цих класів, точка A належить першому, а точка B - другому класу.

2. Кожна точка першого класу, відмінна від A, лежить між A і будь-якою точкою другого класу.

Доведемо, що тоді виконується і висновок аксіоми Дедекінда.

Для цього розіб'ємо всі числа $0 \leq t \leq 1$ також на два класи. До I класу віднесемо ті числа t, яким в рівностях (d) відповідають точки (x,y) відрізка [AB] I класу, а до II класу віднесемо ті числа t, яким відповідають в рівностях (d) точки [AB], що належать II класу. При такому розбитті кожне число t ($0 \leq t \leq 1$) попадає в один і тільки один клас, причому число 0 попадає в I-ий, а число 1 - в II клас.

Користуючись першим тлумаченням поняття «лежить між», бачимо, що коли M(x',y') є яка-небудь точка I класу, а N(x'',y'')-довільна точка II класу і тому за умовою 2) аксіоми Дедекінда M лежить між A і N, то відповідні значення параметра t' -I класу і t'' -II класу задовольняють нерівності $0 < t' < t''$, тобто у розбитті чисел відрізка $0 \le t \le 1$ кожне число І класу менше будь-якого числа ІІ класу.

Таким чином, всі дійсні числа t, $0 \le t \le 1$ розділені на два класи, які задовольняють умовам теореми Дедекінда про неперервність множини всіх дійсних чисел.

Тому на основі цієї теореми на відрізку [0,1] існує єдине число t_0 таке, що всі числа, які задовольняють нерівність $0 \le t \le t_0$, відносяться до І класу,а всі числа t, для яких $t_0 < t \le 1$, відносяться до ІІ класу. Значенню параметра $t = t_0$ на відрізку [AB] відповідає деяка єдина точка $C(x_0, y_0)$, де $x_0 = x_1 + mt_0$, $y_0 = y_1 + nt_0$.

Візьмемо тепер яку-небудь точку $M(x,y)$, яка лежить між A і C. Це означає, що відповідне значення параметра t задовольняє нерівності $0 \le t \le t_0$, тобто t належить І класу точок. Аналогічно покажемо, що будь-яка точка N, що лежить між C і B, належить ІІ класу точок. Отже, точка C - межова.

Аксіома неперервності Дедекінда виконується.

<u>**V група. Аксіома паралельності**</u>

Нехай дана пряма $(a : b : c)$ і точка $A(x_0, y_0)$, що не лежить на цій прямій, тобто

$$ax_0 + by_0 + c \neq 0 \qquad (7.7)$$

З аксіом І-IV груп випливає існування принаймні однієї прямої, що проходить через точку (x_0, y_0) і не має спільної точки з прямою $(a : b : c)$. Зокрема, це пряма

$$(a : b : -(ax_0 + by_0)).$$

Справді, рівність $ax_0 + by_0 - (ax_0 + by_0) = 0$ справедлива, тобто ця пряма проходить через точку (x_0, y_0). З іншого боку, ця пряма не має спільної точки з прямою $(a : b : c)$, бо рівняння

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax + by - (ax_0 + by_0) = \end{cases}$$

утворюють несумісну систему, так як $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}=0$ і вільні члени не рівні, бо має місце (7.7).

Доведемо, що другої прямої, що має таку властивість, не існує. Справді, припустимо ,що існує ще одна пряма $(a':b':c')$, яка проходить через точку (x_0,y_0) і не має спільної точки з прямою $(a:b:c)$. Тоді, по-перше, повинна виконуватися рівність

$$a'x_0+b'y_0+c'=0 \qquad (7.8)$$

і, по-друге, повинна бути несумісною система рівнянь

$$\begin{cases} a'x+b'y+c'=0, \\ ax+by+c=0. \end{cases}$$

Але така система може бути несумісною тільки в тому випадку, якщо має місце рівність

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b=0 \text{ або } \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=$$

Значить, $a'=\lambda a$, $b'=\lambda b$. З умови (7.8) маємо: $c'=-\lambda(ax_0+by_0)$. Таким чином, маємо співвідношення

$$a':b':c'=a:b:-(ax_0+by_0),$$

тобто пряма $(a':b':c')$ збігається з першою прямою.

Отже, аксіома паралельності Евкліда виконується.

Побудована арифметична модель планіметричних аксіом Гільберта і доводить несуперечливість планіметрії Евкліда. Аналогічно ми могли б побудувати арифметичну модель простору, в якій виконувались би всі аксіоми Гільберта.

Таким чином, якщо арифметика дійсних чисел несуперечлива, то несуперечлива і система аксіом Гільберта I-V груп, тобто несуперечлива геометрія Евкліда.

Відзначимо, що побудована аналітична модель дає можливість без протиріч переводити кожне твердження евклідової геометрії на мову лінійної алгебри, а всі проведені вище доведення геометричних аксіом є не що інше як вправи з аналітичної геометрії.

§7.2. Повнота системи аксіом Гільберта евклідової геометрії

Раніше була побудована арифметична модель планіметрії Евкліда (§7.1). Позначимо її $\mathcal{M}_1$. Розглянемо модель $\mathcal{M}$ системи плоских аксіом Гільберта. Доведемо,що будь-яка модель $\mathcal{M}$ ізоморфна $\mathcal{M}_1$. Для доведення введемо у моделі $\mathcal{M}$ декартову систему координат (говорять, що модель координатизується). При цьому, передусім, встановлюється взаємно однозначна відповідність між точками прямої і дійсними числами. Ідея встановлення цієї відповідності полягає в наступному.

Нехай O,E_1-дві різні точки прямої. На промені OE_1 відкладаємо відрізки E_1E_2, E_2E_3,….., конгруентні відрізку OE_1, а на доповняльному промені OF_1 відкладаємо відрізки OF_1, F_1F_2, F_2F_3,….., конгруентні відрізку OE_1. Точці O ставимо у відповідність число 0, точкам E_i - числа i (i=1,2….), точкам F_i - співставляємо числа (-i). Розділивши кожен з побудованих відрізків на 10 рівних частин, одержимо точки, які відповідають числам вигляду $\frac{n}{10}$, де n-ціле. Продовжуючи цей процес поділу необмежено, побудуємо точки, які відповідають числам вигляду $\frac{n}{10^k}$, $n \in$, $k \in$. Якщо тепер M - довільна точка прямої, то за допомогою аксіоми Архімеда (IV_1) ми зможемо знайти таке ціле число n, що точка M знаходиться на відрізку з кінцями в точках, які відповідають числам n, n+1, але не збігається з точкою, що відповідає числу n+1. Потім ми можемо знайти таке число a_1(0,1,2,…..,9), що точка M знаходиться на відрізку з кінцями в точках, які відповідають числам $n+\frac{a_1}{10}$ і $n+\frac{a_1+}{10}$, але не збігаються з другою з цих точок. Потім ми знайдемо таке число a_2 (=0,1,2,…..,9), що точка M знаходиться на відрізку з кінцями в точках, які відповідають числам $n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}$ і $n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+}{10^2}$, і т.д.

Тепер точці M поставимо у відповідність дійсне число

$$n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\ldots\ldots$$

Побудована відповідність між точками прямої та дійсними числами є взаємно однозначною і має такі дві властивості:

1). Якщо *x, y, z* – три дійсні числа, що задовольняють нерівності $x<y<z$ (або $x>y>z$), а M, N, P - точки, які відповідають числам *x, y, z*, то точка N знаходиться між точками M і P;

2). Якщо $x-x'=y-y'$, то точки M, M', N, N', які відповідають числам *x, x', y, y'* мають ту властивість, що відрізок MM' дорівнює відрізку NN'.

Введемо тепер у модель m системи плоских аксіом Гільберта декартову систему координат. Це виконується так, як в шкільному підручнику геометрії: береться довільна точка, дві взаємно перпендикулярні прямі, які перетинаються в ній, яким взаємно однозначно співставлені дійсні числа, як описано вище, і т. д. Кожній точці M моделі m буде відповідати впорядкована пара дійсних чисел (*x,y*) і, навпаки, кожній парі дійсних чисел (*x,y*) буде відповідати «точка» моделі m з координатами (*x,y*). При цьому кожній «прямій» буде відповідати певне відношення $(a:b:c)$ трьох дійсних чисел (де a, b одночасно не дорівнюють нулеві) таке, що для координат «точок», інцидентних цій «прямій», задовольняється рівняння $ax+by+c=0$; і, навпаки, кожному такому відношенню $(a:b:c)$ буде відповідати певна «пряма» моделі m. Будуючи таким шляхом аналітичну геометрію у множині об’єктів моделі m, ми одержимо всі звичайні формули в декартових координатах, які ми вже одержали для аналогічних відношень між об’єктами арифметичної моделі, які також названі «точками» і «прямими». Це і буде означати, що між об'єктами моделі m і об'єктами арифметичної моделі m_1 встановлена ізоморфна відповідність.

Повнота евклідової геометрії, побудованої на основі всіх аксіом Гільберта, випливає також з наявності тривимірної арифметичної моделі цієї системи аксіом, тобто фактично, з аналітичної геометрії у просторі.

§7.3. Незалежність системи аксіом Гільберта евклідової геометрії

Доведемо незалежність деяких аксіом системи аксіом Гільберта.

1.Незалежність аксіоми паралельності (V.1) від аксіом I-IV груп системи аксіом Гільберта випливає з існування моделі системи аксіом, яка складається з аксіом I-IV груп і аксіоми Лобачевського, яка є запереченням аксіоми паралельності Евкліда (V.1), тобто з доведення несуперечливості геометрії Лобачевського, яке буде виконане у главі 8 (§8.7).

2.Незалежність аксіоми Архімеда (IV.1).

Геометрію, в якій виконуються всі аксіоми евклідової геометрії, крім аксіоми Архімеда ,називають неархімедовою. Доведення її несуперечливості - це і є доведення незалежності аксіоми Архімеда від останніх аксіом Гільберта.

Шукана модель будується аналітичним методом так само, як будувалась аналітична модель всієї системи аксіом Гільберта при доведенні її несуперечливості (§7.1). Відмінність полягає в тому, що ця модель будується не на базі поля дійсних чисел, а на базі поля комплексних чисел, в якому відношення порядку вводиться так: число $a+bi$ вважається більшим числа a'+b'i, якщо $b>b'$, а у випадку, коли $b=b'$, якщо $a>a'$. Тому, якщо в полі дійсних чисел для будь-яких двох чисел a і b, з яких $a>b$, існує таке натуральне число n, що $nb>a$ (ця властивість дійсних чисел і забезпечує виконання аксіоми Архімеда на прямій), то в полі комплексних чисел з введеним відношенням порядку існують такі числа α і β, що $\alpha>\beta$ і для яких не існує натурального числа n, для якого мала б місце нерівність $n\beta>\alpha$. Справді, такими числами є, наприклад, числа $\alpha=i=0+1i$; $\beta=1=1+0i$. Зрозуміло, що для них $\alpha=0+1i<1+0i=\beta$, але $n\beta= n+0i$ при всіх n менше числа $\alpha=0+1i$. Одержуємо неархімедову систему чисел.

Далі будуємо саму модель. Точкою (у випадку планіметрії) назвемо впорядковану пару чисел (x,y) з побудованої неархімемедової системи чисел, прямою-відношення $(a:b:c)$ трьох чисел з цієї системи, які задовольняють умові, щоб хоча одне з перших двох чисел a, b були відмінними від нуля. Всі відношення між геометричними об'єктами визначимо так само, як це робилось при побудові аналітичної моделі системи аксіом Гільберта (§7.1). Проаналізувавши аксіоми Гільберта та їх доведення при побудові аналітичної моделі, ми бачимо, що у всіх доведеннях використовуються такі властивості дійсних чисел, які характеризують їх систему як поле, тобто звичайні властивості додавання і множення дійсних чисел (асоціативність, комутативність, дистрибутивність і т.д). Але всі ці властивості має також і поле комплексних чисел. Отже, в нашій новій моделі над полем неархімедових чисел будуть виконуватись всі аксіоми Гільберта, в доведенні яких задіяні тільки ці властивості системи чисел. Виключення складають дві аксіоми-аксіома Архімеда (IV_1) і Кантора (IV_2) (аксіоми неперервності).

3.Незалежність аксіоми Кантора (IV_2).

Доводиться незалежність за допомогою побудови моделі «некanторової геометрії», тобто з допомогою доведення несуперечливості цієї ще однієї неевклідової геометрії. Модель будується, як і раніше, аналітично (точки-впорядковані пари чисел (x,y), прямі-відношення трійок чисел $(a:b:c)$,але базисна система чисел вибирається специфічним чином.). Це є підполе поля дійсних чисел, елементи якого одержуються з одиниці застосуванням скінченної кількості операцій додавання, віднімання, множення, ділення і добування квадратного кореня. (Ця модель тісно пов'язана з проблемою розв'язності задач на побудову за допомогою циркуля та лінійки). Тому, коли на прямій $y=0$ задані відрізки A_1B_1, A_2B_2,…., що задовольняють умову аксіоми Кантора, причому значення x для точок A_1, A_2, B_1, B_2,… - раціональні числа, які при $n\to\infty$ прямують до дійсного числа, яке не входить у вказане підполе, то точки M, існування якої стверджується аксіомою Кантора, в цій моделі не існує.

4. <u>Незалежність аксіоми III_5.</u>

В якості моделі знову розглядається аналітична модель над полем дійсних чисел, побудована в §7.1. Але поняття конгруентності відрізків в ній визначимо інакше. Відрізки [AB] і [CD] з кінцями A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3), D(x_4,y_4) називаються конгруентними, якщо:

Величини, які записані в обох частинах цієї рівності можна назвати довжинами відрізків [AB] і [CD].

Тоді перевірка виконання аксіом I, II, IV,V груп в цій моделі повністю співпадає з такою перевіркою в аналітичній моделі системи всіх аксіом Гільберта. Не зазнає змін і перевірка аксіоми III_4. Майже не буде відрізнятись перевірка аксіоми III_1. Виконуваність аксіоми III_2 очевидна.

Перевіримо виконання аксіоми III_3. Для цього досить показати, що коли точка B лежить між точками A і C, то сума відстаней (у визначеному в цій моделі смислі) від A до B і від B до C рівна відстані від A до C.

Нехай A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3) і точка B лежить між точками A і C.За означенням відношення «між» для аналітичної моделі це означає, що $x_2=x_1+(x_3-x_1)t_2$, $y_2=y_1+(y_3-y_1)t_2$ для деякого $0<t_2<1$. Тоді довжини відрізків [AB], [BC], [AC] виражаються відповідно так:

і, отже, сума довжин відрізків [AB], [BC] рівна довжині відрізка [AC].

Таким чином,аксіома III_3 виконується.

Покажемо, що аксіома III_5 для трикутників в цій моделі не виконується. В якості прикладу розглянемо 4 точки: O(0,0), A(1,0), B(-1,0), C(0,$\frac{\sqrt{2}}{2}$) і два трикутники з вершинами в цих точках: ΔAOC, ΔBOC. Покажемо, що вони задовольняють умовам аксіоми III_5.

Відрізки [OA], [OB], [OC] мають довжину рівну одиниці, отже, [OA]$\cong$ [OC], [OC]$\cong$ [OB].

Покажемо, що конгруентні кути AOC і BOC. Кут AOC утворений променями [OA)=(0,0;1:0) і [OC)=(0,0;0:$\frac{\sqrt{2}}{2}$), так що для нього

[illegible]

Кут BOC, утворений променями [OB)=(0,0;-1:0) і [OC)=(0,0;0:$\frac{\sqrt{2}}{2}$) так, що для цього значення відповідний вираз дорівнює 0. Значить, кути AOC і BOC конгруентні.

Покажемо, що кути OAC і OCB не конгруентні. Справді, кут OAC утворений променями [AO)=(1,0;-1:0) і [AC)=(1,0;-1:$\frac{\sqrt{2}}{2}$). Тому для нього

[illegible]

а кут OCB, утворений променями [CO)=(0,$\sqrt{\frac{2}{2}}$;0:-$\sqrt{\frac{2}{2}}$) і [CB)=(0,$\sqrt{\frac{2}{2}}$;-1:-$\sqrt{\frac{2}{2}}$), і для нього значення відповідного виразу дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Таким чином, кути AOC і OCB не конгруентні, і аксіома III_5 не виконується.

Отже, ми показали, що система аксіом Гільберта евклідової геометрії є несуперечливою, незалежною і повною.

Контрольні запитання

1. Як доводиться несуперечливість системи аксіом?

2. Що таке інтерпретація системи аксіом?

3. Доведіть несуперечливість I групи аксіом Гільберта (аксіоми належності).

4. Доведіть несуперечливість аксіом порядку системи Гільберта.

5. Як тлумачити поняття «променя» і «кута», конгруентності в аналітичній моделі системи аксіом Гільберта?

6. Дати схематичне доведення несуперечливості аксіом конгруентності системи Гільберта.

7. Перевірити виконання аксіоми неперервності Дедекінда в аналітичній моделі.

8. Перевірити виконання аксіоми паралельності Евкліда в аналітичній моделі.

9. Довести повноту системи аксіом Гільберта.

10. Довести незалежність окремих аксіом від інших системи аксіом Гільберта.

Рекомендована література: [II, 4, 5, 10, 12-15, 19, 21].

Глава 8. Логічні проблеми системи аксіом Вейля евклідової геометрії

Найбільшу радість тілу дає світло сонця , найбільшу радість духу-ясність математичної істини.

Леонардо да Вінчі

§ 8.1 Несуперечливість системи аксіом Вейля евклідової геометрії

Для доведення несуперечливості системи аксіом Вейля евклідової геометрії потрібно побудувати модель цієї системи.

Розглянемо арифметичну модель,тобто модель в теорії дійсних чисел.

Складемо інтерпретаційний словник.

1.Під «вектором» будемо розуміти впорядковану трійку дійсних чисел,яку будемо записувати у вигляді одностовпцевої матриці:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

2. «Точкою» будемо називати впорядковану трійку дійсних чисел,яку будемо записувати у вигляді рядка:

M=(m_1, m_2, m_3)

3. Під «сумою» двох векторів $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ і $\vec{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$.

Будемо розуміти вектор $\vec{a} + b = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 \end{pmatrix}$.

4.Під «добутком» вектора $\vec{a}$ на число λ розуміємо вектор $\lambda a = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \lambda\alpha_3 \end{pmatrix}$.

5. «Скалярним добутком» двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаємо число, яке визначається так:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

6.Будемо говорити,що точки $A = (a_1, a_2, a_3)$ $B = (b_1, b_2, b_3)$ інцидентні вектору

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

тобто $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, якщо виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= \alpha_1 \\ b_2 - a_2 &= \alpha_2 \qquad (*) \\ b_3 - a_3 &= \alpha_3 \end{aligned}$$

Легко бачити,що при таких тлумаченнях основних понять виконуються всі аксіоми I-II, IV груп системи аксіом Вейля. При цьому роль вектора $\vec{0}$ відіграє стовпець $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Для прикладу покажемо виконання аксіоми I_1:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad (1)$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix};\ \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 \end{pmatrix},\ \vec{b} + \vec{a} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \alpha_1 \\ \beta_2 + \alpha_2 \\ \beta_3 + \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Для доведення (1) потрібно показати,що

$$\alpha_i + \beta_i = \beta_i + \alpha_i \qquad (2) \qquad (i=1,2,3).$$

Ця рівність має місце,бо α_i, β_i - дійсні числа, для яких виконується (2)

Тому перевірка аксіом I-II, IV груп зводиться , по-суті, до перевірки відповідних властивостей дійсних чисел.

Покажемо, що аксіоми III групи виконуються.

Аксіома III $_1$. Візьмемо три вектори

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Покажемо,що вони лінійно незалежні. Справді,складемо лінійну комбінацію з цих векторів і прирівняємо до нуль-вектора.

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\cdot 1+\mu\cdot 0+\sigma\cdot 0=0,\\ \lambda\cdot 0+\mu\cdot 1+\sigma\cdot 0=0,\\ \lambda\cdot 0+\mu\cdot 0+\sigma\cdot 1=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0,\\ \mu=0,\\ \sigma=0.\end{cases}$$

Має місце і обернене твердження. Таким чином, $\lambda\vec{e}_1+\mu\vec{e}_2+\sigma\vec{e}_3=\vec{0}$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\lambda=\mu=\sigma=0$, а отже, вектори $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ лінійно незалежні.

Аксіома III2. Покажемо, що будь-які чотири вектори тривимірного евклідового простору лінійно залежні.

Складаємо лінійну комбінацію з чотирьох векторів і прирівнюємо її до нуль-вектора.

$$t\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}t\cdot\alpha_1+\gamma\cdot\beta_1+\mu\cdot q_1+k\cdot\delta_1=0,\\ t\cdot\alpha_2+\gamma\cdot\beta_2+\mu\cdot q_2+k\cdot\delta_2=0,\\ t\cdot\alpha_3+\gamma\cdot\beta_3+\mu\cdot q_3+k\cdot\delta_3=0.\end{cases}\qquad(3)$$

Система (3) є системою з трьох рівнянь відносно чотирьох шуканих t,γ,μ,k. А тому вона завжди має ненульовий розв'язок, що й доводить, виконання аксіоми III2.

Перевіримо виконання аксіом V групи.

Аксіома V1. Нехай дана точка $A=(a_1,a_2,a_3)$ і вектор $\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$.

Покажемо, що існує єдина точка $B=(b_1,b_2,b_3)$ така, що $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

Це співвідношення еквівалентне (згідно тлумачення 5) системі рівностей (*)

$$b_1-a_1=\alpha_1$$
$$b_2-a_2=\alpha_2$$
$$b_3-a_3=\alpha_3$$

Звідси трійка (b_1,b_2,b_3) визначається однозначно.

Аксіома V2. Нехай $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1.c_2.c_3)$ - довільні точки.

Тоді маємо $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} c_1 - b_1 \\ c_2 - b_2 \\ c_3 - b_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}$.

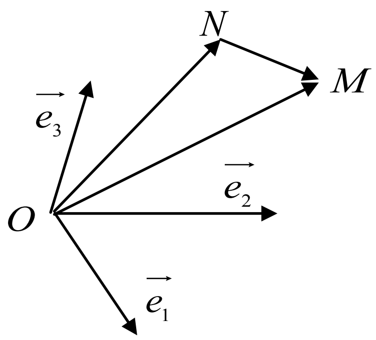
$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 + c_1 - b_1 \\ b_2 - a_2 + c_2 - b_2 \\ b_3 - a_3 + c_3 - b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}.$$

Таким чином, ми довели, що <u>система аксіом Вейля евклідового простору несуперечлива, якщо несуперечлива арифметика дійсних чисел.</u>

§ 8.2. Повнота системи аксіом Вейля евклідового простору

Для доведення повноти потрібно показати,що будь-які дві моделі системи аксіом ізоморфні.

Нехай R' – довільна модель для цієї аксіоматики. Виберемо в R' ортонормований базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ (теорема 6, §5.3). Для кожного вектора $\vec{p} \in R'$ ми можемо знайти такі числа p_1, p_2, p_3, що $\vec{p} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3$ і потім поставимо у відповідність вектору $\vec{p}$ трійку чисел $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$. Ми одержимо взаємно однозначну відповідність між векторами моделі R' і трійками $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, тобто елементами арифметичної моделі, яка побудована раніше.



Нехай вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ побудовані в точці О.

Точка М простору визначається вектором $\overrightarrow{OM}$:

$\overrightarrow{OM} = m_1\vec{e}_1 + m_2\vec{e}_2 + m_3\vec{e}_3$. $M = (m_1, m_2, m_3)$.

Таким чином, кожній точці $M \in R'$ відповідає впорядкована трійка чисел (m_1, m_2, m_3).

Отже, між елементами моделі R' і елементами арифметичної моделі встановлена взаємно однозначна відповідність.

Доведемо, що ця відповідність є <u>ізоморфізмом.</u>

1) Нехай вектору $\vec{p}$ відповідає трійка $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, а вектору $\vec{g}$ - трійка $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$,

тобто $\vec{p} = p_1\vec{e_1} + p_2\vec{e_2} + p_3\vec{e_3}$, $\vec{g} = g_1\vec{e_1} + g_2\vec{e_2} + g_3\vec{e_3}$. Тоді маємо

$\vec{p} + \vec{g} = (p_1\vec{e_1} + p_2\vec{e_2} + p_3\vec{e_3}) + (g_1\vec{e_1} + g_2\vec{e_2} + g_3\vec{e_3}) =$

$= (p_1 + g_1)\vec{e_1} + (p_2 + g_1)\vec{e_2} + (p_3 + g_3)\vec{e_3}$.

А тому вектору $\vec{p} + \vec{g}$ відповідає трійка $\begin{pmatrix} p_1 + g_1 \\ p_2 + g_2 \\ p_3 + g_3 \end{pmatrix}$, тобто сума векторів $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$ в арифметичній моделі.

2) Вектору $\lambda\vec{p} = \lambda p_1\vec{e_1} + \lambda p_2\vec{e_2} + \lambda p_3\vec{e_3}$ відповідає трійка $\begin{pmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \\ \lambda p_3 \end{pmatrix}$, тобто

добуток вектора $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ на число λ в арифметичній моделі.

3) Скалярний добуток векторів $\vec{p}$ і $\vec{g}$ обчислиться безпосереднім підрахунком $\vec{p} \cdot \vec{g} = (p_1\vec{e_1} + p_2\vec{e_2} + p_3\vec{e_3}) \cdot (g_1\vec{e_1} + g_2\vec{e_2} + g_3\vec{e_3}) =$

$= (p_1 g_1)\vec{e_1}\vec{e_1} + (p_1 g_1)\vec{e_2}\vec{e_2} + \ldots + (p_3 g_3)\vec{e_3}\vec{e_3}$.

$\vec{e_1}\vec{e_1} = \vec{e_2}\vec{e_2} = \vec{e_3}\vec{e_3} = 1$, $\vec{e_1}\vec{e_2} = \vec{e_1}\vec{e_3} = \vec{e_2}\vec{e_3} = 0$.

Отже, скалярний добуток $\vec{p} \cdot \vec{g} = p_1 g_1 + p_2 g_2 + p_3 g_3$, тобто рівний скалярному добутку векторів $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$ в арифметичній моделі.

4) Нехай дані дві точки $M=(m_1,m_2,m_3)$, $N=(n_1,n_2,n_3)$, тобто $\overrightarrow{OM}=m_1\vec{e}_1+m_2\vec{e}_2+m_3\vec{e}_3$; $\overrightarrow{ON}=n_1\vec{e}_1+n_2\vec{e}_2+n_3\vec{e}_3$.

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(n_1-m_1)\overrightarrow{e_1}+(n_2-m_2)\overrightarrow{e_2}+(n_3-m_3)\overrightarrow{e_3}.$$

Отже, відношення інцидентності точок вектору у моделі R' переноситься на однойменне відношення в арифметичній моделі.

Таким чином, модель R' (геометрична модель) і арифметична модель ізоморфні.

Ми могли б побудувати іншу алгебраїчну модель системи аксіом Вейля і показати, що вона ізоморфна геометричній моделі. Постільки відношення ізоморфізму має властивість транзитивності,то ми б могли показати,що будь-які 2 моделі системи аксіом Вейля ізоморфні.

§ 8.3. Незалежність системи аксіом Вейля евклідового простору

Система аксіом Вейля складається з 16 аксіом. Для доведення її незалежності потрібно побудувати 16 моделей,на кожній з яких виконується 15 аксіом, а одна не виконується. Тому зрозуміло, наскільки клопітке дослідження незалежності системи аксіом Вейля.

Наведемо приклади доведення незалежності аксіом V групи від інших.

Приклад 1. Довести незалежність аксіоми V_1 від інших аксіом.

Для доведення потрібно побудувати модель системи аксіом I-IV груп, V_2, ($-V_1$), де ($-V_1$) - заперечення аксіоми V_1.

Поняття «вектора», «додавання векторів», «множення вектора на скаляр», «скалярне множення векторів», будемо інтерпретувати так само, як при доведенні несуперечливості всієї системи аксіом Вейля.

Поняття «точки».

Під «точкою» будемо розуміти четвірку дійсних чисел (x_1,x_2,x_3,x_4).

Поняття «інцидентності точок вектору».

Будемо говорити,що точки $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ належать вектору $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, тобто $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath}$, якщо виконуються рівності

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= \iota \\ b_2 - a_2 &= \iota \\ b_3 - a_3 &= \iota \end{aligned} \qquad (*)$$

Як і раніше, легко перевірити виконання аксіом I-IV груп та аксіоми V_2.

Покажемо тепер,що аксіома V_1 не виконується. Нехай задана точка A=(a_1, a_2, a_3, a_4) і вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$. Доведемо,що існує безліч (не одна)точок $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ таких, що $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath}$.

Використовуючи тлумачення належності точок вектору (*), маємо три рівняння для визначення точки B:

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= \iota \\ b_2 - a_2 &= \iota \\ b_3 - a_3 &= \iota \end{aligned}$$

з яких знайдемо b_1, b_2, b_3. На b_4 не накладаємо ніяких умов,тому існує безліч значень b_4, а отже безліч точок B таких, що $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath}$.

<u>Приклад 2.</u>

Показати незалежність аксіоми V_2 від інших аксіом системи Вейля евклідового простору.

Побудуємо модель системи аксіом I-IV груп, V_1, (-V_2), де (-V_2) – заперечення V_2. Тлумачення «вектора» та відношення між векторами, «точки» візьмемо такими, як при складанні моделі, що доводить несуперечливість системи аксіом Вейля.

<u>Поняття «належності точок вектору».</u>

Будемо говорити, що точки $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ належать вектору $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, тобто $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, якщо виконуються співвідношення $\begin{cases} b_1 + a_1 = \alpha_1 \\ b_2 + a_2 = \alpha_2 \\ b_3 + a_3 = \alpha_3 \end{cases}$ (**)

Візьмемо три довільні точки $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$. Тоді

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} c_1 + b_1 \\ c_2 + b_2 \\ c_3 + b_3 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c_1 + a_1 \\ c_2 + a_2 \\ c_3 + a_3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 + c_1 + b_1 \\ b_2 + a_2 + c_2 + b_2 \\ b_3 + a_3 + c_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + c_1 + 2b_1 \\ a_2 + c_2 + 2b_2 \\ a_3 + c_3 + 2b_3 \end{pmatrix}$$

Для довільних b_i: $a_i + c_i + 2b_i \neq a_i + c_i$ $(i = 1,2,3)$.

А це означає, що аксіома V_2 не виконується. Таким чином, ми довели незалежність аксіоми V_2 від інших аксіом Вейля.

Зауважимо, що коли система аксіом є незалежною, то вона містить мінімальну кількість тверджень, необхідних для логічного доведення всіх останніх тверджень даної математичної теорії. Важливо підкреслити, що коли невиконання умови несуперечливості означає повну непридатність всієї аксіоматики, то невиконання умови незалежності цього зовсім не означає.

Якщо система аксіом несуперечлива, але не є незалежною, то це свідчить про логічну недосконалість цієї системи. Інколи з педагогічних або практичних міркувань допускається відхід від виконання вимоги незалежності.

Проблема несуперечливості системи аксіом геометрії не виникала аж до XIX століття. Проблема ж незалежності аксіом (проблема V постулату) здавна привертала до себе увагу багатьох математиків.

До Лобачевського в математиці не були відомі методи доведення незалежності аксіом.

Контрольні запитання

1. Яке тлумачення основних понять в арифметичній моделі системи аксіом Вейля?

2. Обґрунтувати несуперечливість системи аксіом Вейля.

3. Доведіть незалежність деяких аксіом Вейля.

4. Які моделі системи аксіом математичної теорії називаються ізоморфними?

5. Покажіть, що система аксіом Вейля повна.

Рекомендована література: [II, 1, 3, 4, 7, 8, 10, 13].

Глава 9. Геометрія Лобачевського

Як учений Лобачевський є в повному розумінні слова революціонером в науці: до його відкриттів нікому не приходило в голову сумніватися в тому, що евклідова геометрія становить єдину можливу систему геометричного пізнання, єдину можливу сукупність тверджень про просторові форми.

П. Александров

Основне значення праць Лобачевського полягає в тому, що на їхньому ґрунті зросли всі сучасні погляди на геометрію як на суто математичну науку.

А. Колмогоров

Математика - це знаряддя, за допомогою якого людина пізнає і підкорює собі навколишній світ. Але це особливе знаряддя. Воно підкорює не тільки зовнішній світ, воно владно підкорює собі і того, хто за нього береться. А підкоривши, воно не зупинить його перед тим ,щоб принести в ім'я науки будь-які жертви, які вона від нього вимагатиме.

М. Кованцов

§9.1. Створення неевклідової геометрії

Довготривалі безуспішні пошуки доведення V постулату відіграли ту позитивну роль, що допомогли глибше проникнути в структуру геометрії, встановити зв'язок між її найважливішими твердженнями, вони підготували ґрунт для виникнення у передових вчених припущення ,що V-ий постулат не можна довести за допомогою інших аксіом геометрії Евкліда.

Тут повторилося прекрасне явище, що неодноразово спостерігалось в історії науки взагалі і математики зокрема. коли нові ідеї виникали у кількох вчених одночасно. Цю обставину досить яскраво виражено в одному з листів Фаркаша Бойяї до свого сина Яноша «Як весною відразу скрізь з'являються фіалки, так і для наукових відкриттів бувають епохи, коли одні і ті ж думки спалахують у вчених в різних місцях». Протягом перших десятиліть XIX ст.. проблема V постулату була розв'язана кількома вченими майже одночасно і незалежно один від одного, але зовсім не так, як припускали це попередні вчені: була створена нова геометрія, незалежна від V постулату, заснована на твердженні, що заперечує V постулат.

До відкриття нової, так званої «неевклідової» геометрії прийшли троє:

1) професор Казанського університету Микола Іванович Лобачевський (1792-1856);
2) видатний німецький математик Карл Фрідріх Гаусс (1777-1855);
3) угорський офіцер Янош Бойяї, син Фаркаша Бойяї.

Однак вклад у створення нової геометрії, зроблений цими вченими, далеко не рівнозначний.

Гаусс не залишив ніяких слідів систематичного викладу своїх відкриттів в галузі неевклідової геометрії і за життя не опублікував ні одного рядка з цього питання. Все, що нам відомо про його міркування про основи геометрії, викладено ним у вигляді окремих зауважень і висловлювань про свої думки в приватних листах до друзів, які були опубліковані вже після його смерті. З цих листів. а також з паперів, які залишились після смерті Гаусса, дізнаємось, що він вже в 1816 р. володів деякими основними ідеями неевклідової геометрії і далі розвивав їх. Проте, побоюючись втратити свій величезний авторитет в очах вченого світу, який був не підготовлений до сприймання нових, надзвичайно незвичних ідей, Гаусс не тільки не

Карл Фрідріх Гаусс

наважився опублікувати результати своїх досліджень і не тільки забороняв друзям розголошувати зміст своїх листів до них, але і не виявив відкритої моральної підтримки Яношу Бойяї, М. Лобачевському та іншим, які приходили до тих же думок, але не були зрозумілі сучасниками і піддавались насмішкам.

Янош Бойяї

Янош Бойяї прийшов до відкриття неевклідової геометрії в 1823 р., але опублікував свої результати в 1832 р. у вигляді додатку до підручника математики, виданого його батьком. Цей твір, написаний на латинській мові, відомий в історії математики під назвою «Апендикс» (що означає «додаток»). Більше жодного твору з нової геометрії Я. Бойяї не опублікував. Незрозумілий своїми сучасниками, зустрівши стримане, нечуйне ставлення з боку Гаусса, він впав у глибокий відчай. Останні роки свого життя він провів у злиднях, невідомості і повній самотності.

Проте все зроблене в галузі нової геометрії Гауссом і Бойяї є лише першими кроками у порівнянні з глибокими дослідженнями М. І. Лобачевського, який все життя наполегливо розробляв з різних точок зору своє вчення, довів його до високого ступеня досконалості і опублікував кілька великих творів з нової геометрії. Тому як з формального боку (перше публічне повідомлення у 1826 р.), так і по суті, перше місце серед осіб, що розділяють славу створення неевклідової геометрії, слід віддати М. І. Лобачевському, ім’ям якого і названа створена ним геометрія.

Ось як яскраво описує створення неевклідової геометрії в своїй промові на урочистому засіданні, присвяченому 100-річчю з дня відкриття геометрії Лобачевского, В. Ф. Каган: «Две тысячи лет тому назад геометрия застыла в своих величавих, прекрасных формах, как зачарованная красавица в народной сказке. Но 100 лет тому назад пришли три витязя: один из немецкой (Гаусс), другой из венгерской (Бойяи), третий из русской земли (Лобачевский). Они окропили ее мертвой и живой водой. Мертвая вода смыла самовластие евклидовой геометрии, заставила ее отказаться от того абсолютного господства, с которым она владычествовала в пространственных отношениях. Живая вода дала ей, самой евклидовой геометрии, вечное бытие».

В історії науки є немало дорогоцінних сторінок. Але, мабуть, історія відкриття і створення неевклідової геометрії не має собі подібних:тут з'єдналось минуле, сучасне і майбутнє багатьох наук; тут складно і трагічно переплелись долі вчених різних країн, різних поглядів і переконань, різних характерів і душевного складу. Героям цієї історії довелось розв'язувати (кожному по-своєму) і найскладнішу наукову задачу, що вимагала особливої сили і сміливості мислення, і задачу, що вимагала великої людської мужності. Історія ця виразно яскраво, як може ніяка інша глава науки, показала, що подвиг мислення увінчається перемогою лише тоді, коли він спряжений з великим подвигом духу, з безстрашною людською мужністю, з неухильним слідуванням мети.

Цій сторінці історії математики присвячена книга «Три судьбы» Анни Ліванової, написана прекрасною, образною мовою [III, 13].

§9.2. М. І. Лобачевський – видатний вчений, педагог

В історії науки нелегко знайти вченого, який би мав таку силу абстрактної думки, весь життєвий облік був би в той же час сповнений такого широкого емоційного руху,такої патетики в найкращому і найбільш справжньому розумінні цього слова, як М. Лобачевський. І рідко в кого особиста наукова творчість такою мірою, як у Лобачевського, перепліталася з великою громадсько-культурною роботою, зі справжнім служінням освіті рідної країни.

Микола Лобачевський

Микола Іванович Лобачевський народився 1 грудня 1792 р. в Нижньому Новгороді, в сім'ї дрібного чиновника. Дитинство майбутнього великого геометра пройшло в злиднях, які особливо загострилися після смерті батька (1797 р.). Завдяки виключній енергії своєї матері (Параски Олександрівни Лобачевської), хлопчик вступив до Казанської гімназії в 1802 р. Після закінчення гімназії в 1807 році поступив в Казанський університет, який був відкритий в 1804 році. В стінах цього університету і пройшло все життя Лобачевського, від ранніх юнацьких років до старості.

Говорячи про роки навчання Лобачевського в гімназії, не можна не згадати його вчителя математики Григорія Івановича Карташевського. Це був блискучий педагог і неординарна людина, який виявив величезний вплив на розвиток математичних здібностей майбутнього геометра.

В університеті Лобачевський вчився у видатного професора математики Бартельса і прекрасно оволодів під його керівництвом математичною наукою свого часу, головним чином за першоджерелами, класичними творами Гаусса і Лапласа.

Видатні математичні здібності студента Лобачевського проявились рано: вже в 1809 році, коли йому було ще неповних 17 років, він дістав досить похвальний відзив при обранні в так звані «камерні» студенти-так називали студентів, які мали відмінні успіхи і обирались своїми товаришами для спостереження за заняттями і поведінкою всіх студентів.

У 1811 році після закінчення університету Лобачевському присвоєно ступінь магістра, і Бартельс залучає його до педагогічної роботи на правах свого асистента. Далі університетська кар’єра молодого Лобачевського розвивається досить швидко. У 1814 році він затверджується ад’юнктом і починає вести серйозне університетське викладання: читає лекції з теорії чисел, слідуючи класичним роботам Гаусса і Лежандра. З 1816 Лобачевський – екстраординарний професор. Він читає в університеті курси алгебри та геометрії «за власними зошитами». Ці лекції для нас мають особливий інтерес, так як в них Лобачевський, мабуть, впритул підійшов до питання, розв’язання якого принесло йому славу-до питання про евклідову аксіому паралельних.

У 1820 році Лобачевський стає деканом фізико-математичного факультету. Одночасно він бере на себе турботи по впорядкуванню запущеної університетської бібліотеки і тратить на це великі сили і багато часу. Професорська діяльність в цей час наповнюється новим змістом: у зв’язку з від’їздом професора Симонова Лобачевський читає протягом двох років і фізику та астрономію. З 1822 року Лобачевський – член, а потім – голова будівельного комітету по ремонту старих і будівництву нових приміщень Казанського університету. Проводячи велику наукову і педагогічну роботу, він знаходить сили і час, щоб із запалом віддаватись новим завданням. Він вивчає будівельну справу і мистецтво архітектури, бере участь в складані технічних і архітектурних проектів приміщень.

У 1827 році Лобачевський обирається ректором університету і займає цей пост 19 років. Свої ректорські обов’язки він розуміє широко: від ідейного керівництва всім життям навчального закладу до входження в усі дрібниці повсякденних потреб університету.

Прогресивний для свого часу світогляд Лобачевського формувався під сильним впливом матеріалістичних традицій, закладених в російській науці Ломоносовим, а також під впливом сенсуалізма Локка і французьких матеріалістів XVIII ст., твори яких Лобачевський уважно вивчав.

Лобачевський був знайомий з матеріалістичними поглядами талановитого професора математики Харківського університету Т. Ф. Осиповського, пристрасного противника вчення Канта про простір та час та інших ідеалістичних вчень.

Твердо ставши на матеріалістичні позиції в питаннях відношення мислення до буття, Лобачевський вважав, що джерелом нашого пізнання є відчуття як результат впливу на наші органи чуття зовнішнього світу. Лобачевський був рішучим противником теорії вроджених ідей, він повністю відкидав філософію Канта, яка розглядала час і простір, як апріорні, до-досвідні форми свідомості. «Перші поняття, з яких починаються яка-небудь наука, повинні бути ясні і зведені до найменшого числа. Тоді тільки вони можуть служити міцною і достатньою основою вчення. Такі поняття називаються відчуттями:вродженим не треба вірити» («О началах геометрии», 1829-1830).

Лобачевський вважав, що основні поняття і аксіоми геометрії запозичені із зовнішнього світу шляхом чуттєвих сприймань і практики.

Істинність геометрії полягає в її відповідності з властивостями реального простору. Критерієм її істинності для Лобачевського був досвід, практика. Лобачевський підходив до геометрії як природодослідник і бачив в геометрії науку про реальний простір, а не чисто логічну систему. Погляди ж Лобачевського на фізичний простір різко відрізнялися від тих поглядів в науці, які встановились на той час і містили геніальні догадки, що задовго передбачили сучасні фізичні теорії простору, в тому числі ідею сучасного принципу відносності Ейнштейна про взаємозв’язок часу, простору і матерії. Лобачевський розглядав простір не як порожнє вмістилище для матерії, не як всюди однаковий за своїми властивостями і однорідний, а як форму існування тіл природи, геометричні ж властивості простору як органічно пов’язані з фізичними властивостями матерії. Звідси його думка про те, що в різних областях простору можуть здійснюватися і різні геометрії.

Матеріалістичний характер поглядів Лобачевського в питаннях пізнання, його матеріалістичні погляди на простір і природу геометричних понять мали першочергове значення в тому відношенні, що дозволили йому сміливо переступити через встановлені століттями звички і філософські забобони.

Лобачевський до 1823 року стояв ще повністю на тих позиціях, які панували тоді в теорії паралельних і вірив у доведення V постулату, йдучи по шляху Саккері, Ламберта і Лежандра, тобто методом від супротивного.

Як і Саккері, він розвивав із гіпотези гострого кута ряд наслідків, але на противагу Саккері він швидко прийшов до твердого переконання, що перед ним розгортається нова геометрична система, позбавлена протиріччя.

І ось 25 лютого 1826 року Лобачевський на засіданні фізико-математичного факультету робить доповідь про відкриття ним нової геометрії, основаної на всіх аксіомах Евкліда, крім V постулату, і на твердженні, що заперечує цей постулат.

Ця дата є однією із самих прекрасних в усій історії математики і природознавства, бо цей день був межею між двома епохами в розвитку знань людства про космос: епохою безроздільного панування евклідової геометрії, як єдино можливої, коли аксіоми геометрії вважались абсолютними і незмінними істинами, і новою епохою широких узагальнень наших поглядів на простір, початок яких покладено відкриттям геометрії Лобачевського.

З цього моменту починається самовіддана, вперта боротьба Лобачевського за визнання нових ідей. Нова геометрія була настільки незвичною, настільки суперечила встановленим століттями поглядам на властивість простору і звичним уявленням, що ніхто з сучасників не зміг зрозуміти нового вчення.

Лише один Гаусс, ознайомившись з творами Лобачевского, їх зрозумів, захоплено відгукнувся про них в одному приватному листі, не відважившись висловити свою думку публічно. Навіть видатні російські математики Остроградський і Буняковський не зрозуміли ідей Лобачевського.

В процесі відстоювання права на існування своєї «уявної» геометрії (так називав свою геометрію сам Лобачевський) і роз’яснення нової теорії Лобачевський неухильно в своїх творах розробляє нову геометрію з усіх точок зору і шукає її оправдання, застосувавши до обчислення невизначених інтегралів. Він удосконалює своє творіння, доводить його до того ж рівня, що і геометрія Евкліда, створивши неевклідову планіметрію, тригонометрію, стереометрію і аналітичну геометрію. Він шукає шляхи до найбільш популярного викладу своєї системи. Він, нарешті, впритул підходить до доведення несуперечливості своєї системи і намагається дослідити питання про реалізацію її в фізичному просторі.

З нової геометрії Лобачевський написав такі твори:

1. О началах геометрии (1829-1830рр.)
2. Воображаемая геометрия (1835 р.,на французькій мові в 1837р.)
3. Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам (1836 р.)
4. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных (1835-1838 рр.)
5. Геометрические исследования по теории параллельных (на нім. мові в 1840 р.)
6. Пангеометрия (1855 р.).

Не можна без хвилювання пройти повз боротьби Лобачевського за визнання своїх ідей, поістину дивовижної стійкістю і мужністю. В цій боротьбі проявилась вся велич його духу, всі його високі моральні якості героїчного сміливого революціонера в науці. Лобачевський не злякався, подібно Гауссу, насмішок своїх сучасників. Насмішницька стаття про його твори, надрукована в журналі «Сын отечества» в 1834 р., замовчування нових ідей навіть з боку близьких друзів та учнів, тяжкі образи по службі, особисті нещастя не зломили Лобачевського: він не склав зброї, не впав духом. В цій боротьбі Лобачевського підтримувала непорушна віра в свою правоту і беззавітна відданість науці і людському прогресу.

Характеристика діяльності Лобачевського була б не повною, якби ми не вказали ще на одну сторону його діяльності, яка відіграла особливу роль у розвитку російської науки, культури, народної освіти. Це його адміністративна і громадсько-педагогічна діяльність. Яскравіше, як дав оцінку діяльності Лобачевського видатний математик П.С.Александров, важко зробити.

«Лобачевський належить не тільки світовій і російській науці, він належить і російській культурі і російській освіті в самому широкому смислі слова. Пам'ятником його кипучої діяльності, як одного з організаторів нової вищої школи, є Казанський університет, самі каміння якого, здається, говорять про Лобачевського. Лобачевський, по суті, створив цей університет, ректором якого він був цілих 19 років… Лобачевський був не тільки одним з найвеличніших математиків всіх часів, але однією із найяскравіших і многогранно обдарованих осіб, які знає історія російської культури». (П. С. Александров, Н. И. Лобачевский. Успехи математических наук, т. I, вып. I, 1946).

Лобачевський був талановитим педагогом-вихователем. Цікавлячись всім розвитком молодої людини від дитячого до пізнього юнацького віку, він вимагав від виховання багато. Його ідеал людської особистості був досить високим.

Промова «Про важливі предмети виховання» на урочистих зборах Казанського університету в 1828 р., видатна за глибиною думки, розкриває погляди Лобачевського на мету і значення виховання і освіти.

Багато з того, що висловлено Лобачевським про виховання молоді, не втратило свого значення до наших днів. Червоною ниткою всієї промови Лобачевського є його слова: «Жить – значит чувствовать, наслаждаться жизнью, чуствовать непрестанно новое, которое бы напоминало, что мы живем!»

Ця промова звернена до молоді: не проходьте повз всього того багатства, яке вас оточує, багатства всіх можливостей, які надає вам життя в суспільстві і серед людей, багатства, створеного людиною, багатства, яке дає вам наука,мистецтво,природа; вбирайте все це багатство в себе. Це і означає «наслаждаться жизнью». Бійтеся бідності інтересів, убогості внутрішнього життя.

Лобачевський може бути прикладом, мабуть, найвеличнішої людини, і навіть якби він не написав ні одного рядка самостійних наукових досліджень, ми повинні були б згадувати про нього, як про визначного університетського діяча. Але в тому то справа, що ,Лобачевський, крім того, був ще геніальним вченим. Право на безсмертя в історії науки він ,без сумніву, завоював своїми геометричними працями. За всю багатогранну діяльність Лобачевському «віддячив» уряд імператора Миколи І. У 1846 році його звільнили з посади ректора проти бажання його самого і вченої ради університету. Одночасно його звільнили з посади професора кафедри. Для Лобачевського, який все життя віддав Казанському університету, взагалі народній освіті, це був тяжкий удар, якого він вже пережити не міг. Його здоров’я швидко згасало. Він став сліпнути і до кінця свого життя осліп зовсім. Свій останній науковий твір «Пангеометрія» він писав під диктовку. До всього цього приєдналася смерть його улюбленого сина Олексія, який так був схожий на батька. Розбитий життям, хворий, сліпий, він помер 25 лютого 1856 року.

Буває мужність однієї дії, одного акту, але якщо мужністю, подвигом стає все життя, то немає міри, щоб оцінити таке служіння людству і науці.

«Подвиг мысли дороже нам всех других подвигов, ибо только наука, мысль и знание суть основы благосостояния общественного», -говорив на похоронах Лобачевського професор Булич.

Пушкін сказав якось, що натхнення в геометрії потрібно так само, як і в поезії. Якщо поет мислить образами, то і геометру потрібно безпосереднім розсудом розуміти суть тих закономірностей, які він потім доводить тонким логічним аналізом, копіткою працею, довгими зусиллями. Без цих зусиль натхнення не злітає на геометра, як і не злітає воно і на поета. «Натхнення» в розумінні чогось, що не залежить від вольових зусиль людини, ми не знайдемо в творчості великих поетів, музикантів, вчених. Справжнє натхнення, те, яке є джерелом і необхідною частиною творчості, є не що інше, як зосередження сил вольових, інтелектуальних, емоційних, тобто всіх сил, які має психіка людини.

Із великих людей, що працювали в різних галузях людської творчості, ми вражаємось цій здібності зосередження сил. І Пушкіну, і Толстому, і Франкові, і Бетховену, і Чайковському, і Гауссу, і Лобачевському творчі осяяння давались в результаті колосальної праці. Цікава деталь: Лобачевський включив в свій фамільний герб зображення бджоли, як символ працелюбства. Лобачевський оправдав цей символ. Він все життя працював і працював не тільки над своїми науковими працями, хоча, здавалось би, що мав право вважати, що може в своєму житті нічого, крім них не робити. Ні, він робив все, що вважав необхідним для того, щоб своїм життям внести вклад і в науку і в культурне життя своєї батьківщини. Він робив все і в своїх діях керувався не тільки своїми творчими пошуками, але і самим простим, прямим почуттям обов’язку.

Ось чому образ Лобачевського живе і буде жити в свідомості і нашого, і майбутнього покоління не тільки як образ великого вченого, але і як образ великої людини в самому справжньому, повному і хвилюючому розумінні цього слова.