

УДК 517.977.1:517.929.4

В. В. Пічкур¹, В. В. Собчук², М. С. Таїрова³, О. М. Башняков¹

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка

²Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

³Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

КРИТЕРІЇ КЕРОВАНОСТІ З МНОЖИНИ ПОЧАТКОВИХ СТАНІВ НА ТЕРМІНАЛЬНУ МНОЖИНУ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Розглядаються умови керованості для лінійних нестационарних дискретних систем з множини початкових станів на термінальну множину. Введено означення трьох видів керованості: з множини в множину; зі всієї множини початкових умов на термінальну множину; з множини початкових умов на всю термінальну множину. Для кожного з них побудовано функції керованості, обґрунтовано необхідні і достатні умови керованості, а також наведено відповідні приклади.

MSC: 93B05.

Ключові слова: дискретні системи, керованість, керування, функція керованості.

Вступ. Проблема керованості є однією з центральних в теорії керування. Для лінійних дискретних систем керування відомі критерії керованості для стаціонарних і нестационарних систем [1, 2]. Втім, якщо задані геометричні обмеження на функцію керування, а також множину початкових і кінцевих станів системи, то такі критерії не можуть бути застосовані. Для лінійних систем керування, що описуються у формі звичайних диференціальних рівнянь, критерій керованості для такого випадку одержано в [3]. Для цього вводиться функція керованості, яка залежить від опорних функцій множини обмежень на керування, а також множин початкових і кінцевих станів. Основний результат полягає в тому, що аналізується невід'ємність знаку такої функції на одиничній сфері.

В статті обґрунтовуються умови керованості для лінійних нестационарних дискретних систем з множини початкових станів на термінальну множину. Вказані множини вибираються в класі опуклих компактів. В постановках задач фіксованим є інтервал, на якому розглядається система, а також значення вектору керування належать відомим компактним множинам. Розвиваючи підхід роботи [3], ми даємо означення трьох видів керованості: з множини в множину; зі всієї множини початкових умов на термінальну множину; з множини початкових умов на всю термінальну множину.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Будемо використовувати такі позначення: \mathbb{R}^n – n -вимірний евклідовий простір; $\|\cdot\|$ – евклідова норма в \mathbb{R}^n ; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток в \mathbb{R}^n ; $conv(\mathbb{R}^n)$ – сукупність непорожніх опуклих компактів в \mathbb{R}^n ; $c(A, \psi)$ – опорна функція множини $A \subset \mathbb{R}^n$, $\psi \in \mathbb{R}^n$; $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ – одинична сфера; $K_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ – замкнена куля радіусу $r > 0$ з центром а точці $x \in \mathbb{R}^n$; $\lambda_{min}(\cdot)$, $\lambda_{max}(\cdot)$ – відповідно мінімальне та максимальне власні числа матриці.

1. Керованість з множини в множину. Розглянемо лінійну дискретну систему керування

$$x(k+1) = A(k)x(k) + C(k)u(k), k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор стану, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор керування, $A(k)$ – $n \times n$ - матриці; $C(k)$ – $n \times m$ - матриці, $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Керування $u(k) \in U(k)$, де $U(k) \in \text{conv}(\mathbb{R}^m)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Множина M_0 початкових станів і множина кінцевих станів M_N системи (1) є опуклими компактами в \mathbb{R}^n . Множина досяжності системи (1) записується так

$$X(k, M_0) = \Theta(k)M_0 + \sum_{s=0}^{k-1} \Theta(k, s+1)C(s)U(s), \quad (2)$$

де $\Theta(k) = \Theta(k, 0)$, $\Theta(k, s) = A(k-1)A(k-2)\dots A(s)$, $0 \leq s \leq k$. Виходячи з формули (2), опорна функція множини досяжності $X(k, M_0)$ має вигляд

$$c(X(k, M_0), \psi) = c(M_0, \Theta^*(k)\psi) + \sum_{s=0}^{k-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(k, s+1)\psi), \quad (3)$$

де $\psi \in \mathbb{R}^n$. Введемо таке означення.

Означення 1. Система (1) називається керованою на інтервалі $0 \leq k \leq N$ з множини M_0 в множину M_N , якщо знайдуться точки $x_0 \in M_0$, $x_N \in M_N$ і допустиме керування $u(k) \in U(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ такі, що

$$x(N, x_0, u(0)) = x_N.$$

Тут $x(N, x_0, u(0)) = x_N$ позначає розв'язок системи (1) за умови $x(0) = x_0$ в силу допустимого керування $u(\cdot)$, визначеного в точках $k = 0, N-1$.

Функція

$$\Phi(\psi) = c(M_0, \Theta^*(N)\psi) + c(M_N, -\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi), \psi \in \mathbb{R}^n$$

називається функцією керованості системи (1) з множини M_0 в множину M_N на інтервалі $0 \leq k \leq N$. Має місце таке твердження.

Теорема 1. Для того, щоб система (1) була керованою на інтервалі $0 \leq k \leq N$ з множини M_0 в множину M_N необхідно і достатньо, щоб функція керованості $\Phi(\psi) \geq 0$ для всіх $\psi \in S$.

Доведення. Необхідність. Нехай система (1) є керованою на інтервалі $0 \leq k \leq N$ з множини M_0 в множину M_N . Це означає, що

$$X(N, M_0) \cap M_N \neq \emptyset.$$

Останнє співвідношення можна записати у еквівалентній формі

$$0 \in X(N, M_0) + (-1)M_N.$$

Використовуючи властивості опорної функції [4], одержуємо

$$c(X(N, M_0), \psi) + c(M_N, -\psi) \geq 0$$

для всіх $\psi \in S$. Підставимо (3) в останню нерівність

$$c(M_0, \Theta^*(N)\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) + c(M_N, -\psi) \geq 0, \psi \in S.$$

Отже, $\Phi(\psi) \geq 0, \psi \in S$. Достатність обґрунтовується аналогічно до необхідності, але в зворотньому порядку. Теорему доведено.

Приклад 1. Розглянемо умови теореми 1 у випадку, якщо $M_0 = K_{p_0}(a)$, $M_N = K_{p_N}(b)$, $U(k) = K_{q(k)}(0), k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Тут $a, b \in \mathbb{R}^n, p_0 > 0, p_N > 0, q(k) > 0, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Тоді функція керованості має вигляд

$$\begin{aligned} \Phi(\psi) = & p_0 \|\Theta^*(N)\psi\| + \langle a, \Theta^*(N)\psi \rangle + p_N \|\psi\| - \langle b, \psi \rangle + \\ & + \sum_{s=0}^{N-1} q(s) \|C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi\|, \psi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Умову $\Phi(\psi) \geq 0, \psi \in S$ можна записати так

$$p_0 \|\Theta^*(N)\psi\| + p_N + \sum_{s=0}^{N-1} q(s) \|C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi\| \geq \langle b - \Theta(N)a, \psi \rangle. \quad (4)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \|\Theta^*(N)\psi\| & \geq \sqrt{\lambda_{\min}(\Theta(N)\Theta^*(N))}, \\ \|C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi\| & \geq \sqrt{\lambda_{\min}(\Theta(N)C(s)C^*(s)\Theta^*(N))}, \\ \max_{\psi \in S} \langle b - \Theta(N)a, \psi \rangle & = \|b - \Theta(N)a\|, \end{aligned}$$

то нерівність (4) буде виконуватися для всіх $\psi \in S$, якщо

$$\begin{aligned} & p_0 \sqrt{\lambda_{\min}(\Theta(N)\Theta^*(N))} + p_N + \\ & + \sum_{s=0}^{N-1} q(s) \sqrt{\lambda_{\min}(\Theta(N)C(s)C^*(s)\Theta^*(N))} \geq \|b - \Theta(N)a\|. \end{aligned} \quad (5)$$

Отже, якщо параметри $a, b, p_0, p_N, q(s)$ задовольняють (5), то система (1) буде керованою з M_0 в M_N на $0 \leq k \leq N$.

2. Керованість зі всієї множини початкових станів. Розглянемо таке означення.

Означення 2. Система (1) називається керованою на інтервалі $0 \leq k \leq N$ зі всієї множини M_0 в множину M_N , якщо для будь-якої точки $x_0 \in M_0$ знайдеться стан $x_N \in M_N$ та допустиме керування $u(k) \in U(k), k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ таке, що $x(N, x_0, u(0)) = x_N$.

Функція

$$W(\psi) = c(M_N, -\psi) - c(M_0, -\Theta^*(N)\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi),$$

називається функцією керованості в системі (1) зі всієї множини M_0 в множину M_N на інтервалі $0 \leq k \leq N$, де $\psi \in \mathbb{R}^n$. Має місце такий критерій.

Теорема 2. Для того, щоб система (1) була керованою на інтервалі $0 \leq k \leq N$ зі всієї множини M_0 в множину M_N необхідно і достатньо, щоб $W(\psi) \geq 0$ для всіх $\psi \in S$.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що система (1) є керованою зі всієї множини M_0 в множину M_N при $0 \leq k \leq N$. Це означає, що для довільної точки $x_0 \in M_0$ виконується співвідношення

$$X(N, x_0) \cap M_N \neq \emptyset,$$

або еквівалентне до нього включення

$$0 \in X(N, x_0) + (-1)M_N.$$

Використовуючи (2) і (3), одержимо, що для всіх $x_0 \in M_0$

$$\langle x_0, \Theta^*(N)\psi \rangle + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) + c(M_N, -\psi) \geq 0, \psi \in S.$$

З останньої нерівності випливає

$$\begin{aligned} \min_{x_0 \in M_0} \langle x_0, \Theta^*(N)\psi \rangle + c(M_N, -\psi) + \\ + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) \geq 0, \psi \in S. \end{aligned} \quad (6)$$

Оскільки

$$\min_{x_0 \in M_0} \langle x_0, \Theta^*(N)\psi \rangle = - \max_{x_0 \in M_0} \langle x_0, -\Theta^*(N)\psi \rangle = -c(M_0, -\Theta^*(N)\psi),$$

то з (6) одержуємо

$$c(M_N, -\psi) - c(M_0, -\Theta^*(N)\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) \geq 0, \psi \in S.$$

Отже, $W(\psi) \geq 0, \psi \in S$.

Достатність теореми обґрунтовується тим, що при доведенні необхідності використовувались твердження, які є необхідними і достатніми. Теорему доведено.

Приклад 2. Розглянемо умови керованості зі всієї множини M_0 в множині M_N при $0 \leq k \leq N$, в умовах прикладу 1. У цьому випадку

$$W(\psi) = p_N \|\psi\| + \langle b, -\psi \rangle - p_0 \|\Theta^*(N)\psi\| + \langle a, \Theta^*(N)\psi \rangle + \\ + \sum_{s=0}^{N-1} q(s) \|C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi\|, \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Умову $W(\psi) \geq 0, \psi \in S$ можна записати так

$$p_N + \sum_{s=0}^{N-1} q(s) \|C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi\| \geq \\ \geq p_0 \|\Theta^*(N)\psi\| + \langle b - \Theta(N)a, \psi \rangle, \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Використовуючи оцінки прикладу 1 і $\|\Theta^*(N)\psi\| \leq \sqrt{\lambda_{max}(\Theta(N)\Theta^*(N))}$, одержуємо

$$p_N + \sum_{s=0}^{N-1} q(s) \sqrt{\lambda_{min}(\Theta(N)C(s)C^*(s)\Theta^*(N))} \geq \\ \geq p_0 \sqrt{\lambda_{max}(\Theta(N)\Theta^*(N))} + \|b - \Theta(N)a\|.$$

Отже, якщо параметри задачі задовільняють одержаній оцінці, то дискретна система (1) буде керованою зі всієї множини M_0 на множині M_N при $0 \leq k \leq N$.

3. Керованість з множини на всю множину. Результати даного пункту статті будуються на такому означенні.

Означення 3. Система (1) називається керованою на інтервалі $0 \leq k \leq N$ множини M_0 в на всю множину M_N , якщо для будь-якого стану $x_N \in M_N$ існує точка $x_0 \in M_0$ і допустиме керування $u(k) \in U(k), k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ такі, що $x(N, x_0, u(0)) = x_N$.

Функція

$$Z(\psi) = c(M_0, \Theta^*(N)\psi) - c(M_N, \psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi)$$

називається функцією керованості в системі (1) з множини M_0 на всю множину M_N на інтервалі $0 \leq k \leq N$, де $\psi \in \mathbb{R}^n$. Має місце така теорема.

Теорема 3. Для того, щоб система (1) була керованою на інтервалі $0 \leq k \leq N$ з множини M_0 на всю множину M_N необхідно і достатньо, щоб $Z(\psi) \geq 0$ для всіх $\psi \in S$.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що система (1) є керованою з множини M_0 на всю множину M_N . Тоді з означення 3 випливає, що

$$X(N, x_0) \supset M_N.$$

Використовуючи властивості опорних функцій [4], одержуємо

$$c(X(N, M_0), \psi) - c(M_N, \psi) \geq 0, \forall \psi \in S.$$

Підставимо в останню нерівність формулу (3)

$$c(M_0, \Theta^*(N)\psi) - c(M_N, \psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) \geq 0, \psi \in S.$$

Це означає, що $Z(\psi) \geq 0$ для всіх $\psi \in S$.

Достатність обґрунтовується аналогічно до необхідності з використанням властивостей опорної функції в зворотньому порядку. Теорему доведено.

Приклад 3. Знайдемо функцію керованості в умовах прикладу 1. Тоді

$$Z(\psi) = p_0 \|\Theta^*(N)\psi\| + \langle a, \Theta^*(N)\psi \rangle - p_N \|\psi\| - \langle b, \psi \rangle + \sum_{s=0}^{N-1} q(s) \|C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi\|, \psi \in \mathbb{R}^n.$$

З того, що $Z(\psi) \geq 0, \psi \in S$ випливає, що

$$\begin{aligned} p_0 \|\Theta^*(N)\psi\| + \sum_{s=0}^{N-1} q(s) \|C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi\| &\geq \\ &\geq p_N + \langle b - \Theta(N)a, \psi \rangle, \psi \in S. \end{aligned}$$

Ця нерівність виконується, якщо

$$\begin{aligned} p_0 \sqrt{\lambda_{\min}(\Theta(N)\Theta^*(N))} + \sum_{s=0}^{N-1} q(s) \sqrt{\lambda_{\min}(\Theta(N)C(s)C^*(s)\Theta^*(N))} &\geq \\ &\geq p_N + \|b - \Theta(N)a\|. \end{aligned}$$

Отже, якщо параметри задачі задовільняють наведеній оцінці, то система (1) буде керованою з множини M_0 на всю множину M_N при $0 \leq k \leq N$.

Висновки. В роботі обґрунтовано необхідні і достатні умови керованості для лінійних нестационарних дискретних систем у трьох випадках: з множини початкових станів на термінальну множину; зі всієї множини початкових умов на термінальну множину; з множини початкових умов на всю термінальну множину. Для кожного з них побудовано функції керованості та наведено приклади їх застосування.

1. **Katsuhiko Ogata.** Discrete-Time Control Systems / Katsuhiko Ogata – University of Minnesota, 1995. – 760 p.
2. **Krabs W.** Dynamical Systems: Stability, Controllability and Chaotic Behavior/ Krabs W., Pickl S.// Springer, 2010. - 249 p.

3. **Благодатских В. И.** Задача управляемости для линейных систем / Благодатских В. И. // Труды МИАН, 1977, том 143, стр. 57–67
4. **Благодатских В. И.** Введение в оптимальное управление / Благодатских В. И. - М.: Высшая школа, 2001. – 239 с.

Пичкур В. В., Собчук В. В., Таирова М. ., Башняков А. Н.

КРИТЕРИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ ИЗ МНОЖЕСТВА НАЧАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ НА ТЕРМИНАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Резюме

В статье рассматриваются условия управляемости для линейных нестационарных дискретных систем из множества начальных состояний на терминальное множество. Введено определение трех видов управляемости: из множества в множество; со всего множества начальных условий на терминальное множество; из множества начальных условий на все терминальное множество. Для каждого из них построены функции управляемости, обоснованы необходимые и достаточные условия управляемости, а также приведены соответствующие примеры.

Ключевые слова: дискретные системы, управляемость, управление, функция управляемости .

Pichkur V. V., Sobchuk V. V., Tairova M. S., Bashnyakov O. M.

LINEAR DISCRETE SYSTEMS CONTROLLABILITY FROM A SET OF INITIAL STATES TO A TERMINAL SET

Summary

In the article we consider controllability conditions from an initial set to a terminal set for a linear non-homogenous discrete system. We introduce three types of controllability: from an initial set to a terminal set; from a whole set of initial conditions to a terminal set; from a set of initial conditions to an entire terminal set. Necessary and sufficient conditions of controllability are proved using controllability function.

Key words: discrete systems, controllability, control, controllability function.

REFERENCES

1. Katsuhiko Ogata (1995). *Discrete-Time Control Systems*. University of Minnesota, 760 p.
2. Krabs W. & Pickl S. (2010). *Dynamical Systems: Stability, Controllability and Chaotic Behavior*. Springer, 249 p.
3. Blagodatskikh V. I. (1977). Zadacha upravlyaemosti dlya lineynykh sistem [Controllability problem for linear systems]. *Trudy MIAN*, vol. 143, pp. 57–67.
4. Blagodatskikh V. I. (2001). *Vvedenie v optimalnoe upravlenie [Introduction to Optimal Control]*. Moscow, «Vysshaya shkola», 239 p.