УДК 517.9

В.В. Собчук[1], И.В. Хитько[2]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц.,
доц. кафедры дифференциальных уравнений и математической физики
Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки
[2]канд. физ.-мат. наук, инженер-программист Симкорп Украина, ООО
e-mail: v.v.sobchuk@gmail.com

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ И ЯВНЫЙ ВИД ТОЧЕК ПОРЯДКА ШАРКОВСКОГО

Для уравнения Льенара с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени показано, что задача о существовании его периодических решений эквивалентна задаче о существовании периодических точек некоторого отображения отрезка прямой в себя. Даны примеры функций импульсного воздействия $I(\dot{x})$*, при которых уравнения Льенара имеют периодические решения и для которых имеет место сосуществование периодических решений согласно порядку Шарковского. Последнее обеспечивается изменениями параметра в функции* $I(\dot{x})$*.*

В связи с развитием современного естествоведения и техники возникает необходимость исследования нелинейных динамических систем, для которых присущи кратковременные (мгновенные) процессы или которые находятся под действием внешних сил, длительностью которых можно принебречь при составлении соответсвующих математических моделей.

Такие системы встречаются, например, в механике, химической технологии, медицине и биологии, динамике летательных аппаратов, математической экономике, теории управления и в иных областях науки и техники, где приходится изучать системы, пребывающие под воздействием кратковременных (импульсных) внешних сил, которые называют системами с импульсным воздействием.

Как оказалось, наличие импульсного воздействия может существенно усложнить поведение траекторий таких систем даже для случаев сравнительно простых дифференциальных уравнений. В общем случае при наличиии импульсного воздействия поведение решений дифференциальных уравнений (даже линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициетами) может быть существенно нелинейным и значительно отличаться от поведения таких систем при отсутсвии импульсного воздействия.

Рассмотрим динамическую систему, движение в которой описывается дифференциальным уравнением Льенара вида

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0\,, \tag{1}$$

($x \in M \subset R^3$, $M -$ фазовое пространство системы (1), $t \in R -$ время) и которая подвержена влиянию мгновенных сил, которые определяются некоторым оператором A_t. В моменты прохождения движущейся точкой некоторого фиксированного положения $x = x_*$ он действует согласно правилу $(x,\, t) \to (t,\, A_t x)$. Импульсное воздействие в такой системе происходит в нефиксированные моменты времени и увеличивает количество движения в системе на некоторую величину $I(\dot{x})$, которая зависит от скорости движущейся точки в момент прохождения ею положения $x = x_*$. Далее положим, что $I(y)$, где $y = \dot{x}$ как функция своего аргумента непрерывна.

Если t_* некоторый момент времени, в который движущаяся точка достигает положения $x = x_*$, в котором подвергается импульсному воздействию, то импульсные возмущения движущейся точки записывают [1]:

$$\Delta \frac{dx}{dt}\bigg|_{x=x_*} = \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=t_*+0} - \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=t_*-0} = A_t x - x = I(\dot{x}) . \qquad (2)$$

Описания физической интерпретации уравнения Льенара и характеристика его фазового портрета детально изучена в [3].

Уравнение (1) записывается эквивалентным образом в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y. \end{cases} \qquad (3)$$

В дальнейшем используются обозначения:

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,ds, \qquad G(x) = \int_0^x g(s)\,ds.$$

Определение. *Дифференциальное уравнение* (1), *удовлетворяющее условию*

$$x\,g(x) > 0 \quad \text{для} \quad x \neq 0 \qquad (4)$$

и

$$f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = -g(x), \qquad (5)$$

называется согласно Опялю дифференциальным уравнением типа ***S***.

Обозначим $y_* = \sqrt{2G(x_*)}$. Допустим, что:

1. Дифференциальное уравнение Льенара (1) явяелтся уравнением типа ***S*** и удовлетворяет условию существования и единственности решения.

2. Прямая $x = x_*$ трансверсальна потоку (1) везде, кроме траектории, для которой прямая $x = x_*$ является касательной. В этом случае считаем, что $I(0) = 0$.

3. Оператор импульсного воздействия является неперервным относительно своих переменных.

Допустим также, что $|\min G(x)| > 1$.

При изучении движение фазовой точки системы (1), (2) в [3] построено отображение Пуанкаре для прямой $x = x_*$, которое используется для исследования вопроса о существовании периодических решений задачи (1), (2). Также показано, что задача о существовании периодических решений системы (1), (2) сводится к задаче о существовании периодичеких и неподвижных точек некоторого отображения интервала в этот же интервал, которое определяется формулой

$$f(y) = -y + I(-y), \qquad (6)$$

где $I(-y) < y, \quad y \neq 0, \quad y = \dot{x}$.

Рассмотрим задачу о существовании периодических решений задачи (1), (2), когда функция импульсного воздействия имеет вид:

$$I(y) = \begin{cases} (\lambda - 1)y - \lambda\, y_*, & y \geq 0, \\ -(\lambda + 1)y - \lambda\, y_*, & y < 0, \end{cases} \qquad (7)$$

где $y = \dot{x}, \quad \lambda$ – некоторый параметр, причем $0 < \lambda \leq \left|\min G(x)\right|$.

Отображение

$$f(y) = -y + I(-y) = \begin{cases} \lambda\ (y_* - y), & y \geq 0, \\ \lambda\ (y_* + y), & y < 0 \end{cases} \tag{8}$$

непрерывно для всех $y \in R$ и имеет такие свойства: при $0 < \lambda < 1$ существует только одна неподвижная точка, которая является устойчивой; при $1 < \lambda \leq |\min G(x)|$ – две неподвижные точки:

$$\left\{ \frac{\lambda}{1-\lambda} y_* \right\} \text{ и } \left\{ \frac{\lambda}{1+\lambda} y_* \right\},$$

периодическую точку периода 2:

$$\left\{ \frac{\lambda - \lambda^2}{1+\lambda^2} y_*;\quad \frac{\lambda + \lambda^2}{1+\lambda^2} y_* \right\}.$$

Точки периода 3 для отображения (8) образуют два цикла:

$$\left\{ \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3}{1+\lambda^3} y_*;\quad \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3}{1+\lambda^3} y_*;\quad \frac{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3}{1+\lambda^3} y_* \right\},$$

$$\left\{ \frac{\lambda - \lambda^2 + \lambda^3}{1-\lambda^3} y_*;\quad \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3}{1-\lambda^3} y_*;\quad \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3}{1-\lambda^3} y_* \right\}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (1) с импульсным воздействивем (2), (7), где $y = \dot{x}$, при $1 < \lambda \leq |\min G(x)|$, имеет $T(n)$-периодические решения такие, что фазовая точка данной системы при движении вдоль соответствующей траектории подвергается ровно n импульсным воздействиям за период, где n – произвольное натуральное число [2; 3]. Точки, задающие циклы, которые соответствуют периодическим решениям задачи (1), (7), удовлетворяют порядку Шарковского.

Покажем, что точки, утворяющие периодическим циклам для отображения (8), необходимо искать среди дробей вида

$$y = \frac{P^n(\lambda)}{1 \pm \lambda^n} y_*, \tag{9}$$

где $P^n(\lambda)$ – многочлен вида $P^n(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_2\lambda^2 + \lambda,\quad a_i = \pm 1,\ i = \overline{2,\ n}$.

Докажем равенство (9), используя метод математической индукции. В частности, при $n = 2$ получим:

$$y = \lambda(y_* \pm \lambda(y_* \pm y)) = (\lambda \pm \lambda^2) y_* \pm \lambda^2 y,$$

$$(\lambda^2 \pm \lambda) y_* = (1 \pm \lambda^2) y,$$

$$y = \frac{\lambda \pm \lambda^2}{1 \pm \lambda^2} y_* = \frac{P^2(\lambda)}{1 \pm \lambda^2} y_*.$$

Допустим, что (9) спарведливо для $n = k$, т.е. справедливо равенство:

$$y = \frac{P^k(\lambda)}{1 \pm \lambda^k} y_*. \tag{10}$$

Используя (10), докажем, что равенство (9) справедливо для $n = k + 1$.

Запишем (10) в виде $(1 \pm \lambda^{k}) y = P^{k}(\lambda) y_{*}$, или, что то же самое, в виде

$$y = P^{k}(\lambda) y_{*} \pm \lambda^{k} y. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (8), получаем:

$$y = \lambda (y_{*} \pm (P^{k}(\lambda) y_{*} \pm \lambda^{k} y)) = \lambda y_{*} \pm \lambda P^{k}(\lambda) y_{*} \pm \lambda^{k+1} y =$$
$$= \lambda y_{*} \pm P^{k+1}(\lambda) y_{*} \pm \lambda^{k+1} y = P^{k+1}(\lambda) y_{*} \pm \lambda^{k+1} y,$$
$$y = \frac{P^{k+1}(\lambda)}{1 \pm \lambda^{k+1}} y_{*}.$$

Таким образом, доказано

Утверждение 1. *Дифференциальное уравнение* (1) *с импульсным воздействием* (2), (7), *где* $y = \dot{x}$, *при* $1 < \lambda \le |\min G(x)|$, *имеет* $T(n)$*-периодические решения такие, что фазовая точка данной системы при движении вдоль соответствующей траектории подвергается ровно* n *импульсных воздействий за период, где* n *– произвольное натуральное число. При этом точки воздействия импульсных сил, соответствующие* $T(n)$*-периодеским решениям, необходимо искать среди дробей вида*

$$y = \frac{P^{n}(\lambda)}{1 \pm \lambda^{n}} y_{*}, \tag{9}$$

где $P^{n}(\lambda)$ *– многочлен, вида* $P^{n}(\lambda) = a_{n}\lambda^{n} + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{2}\lambda^{2} + \lambda, \quad a_{i} = \pm 1, \ i = \overline{2,\ n}$.

Изучим детальнее задачу о виде периодических точек отображения (8), которые соответсвуют $T(n)$-периодическим решениям задачи (1), (7).

Построим многочлены $P^{n}(\lambda)$ в явном виде. Построение начнем с точки $y = \dfrac{\lambda - \lambda^{2} - \lambda^{3} - \ldots - \lambda^{n}}{1 + \lambda^{n}} y_{*}$. Подействуем на эту точку отображением (8)

$$f(y) = \lambda \left(y_{*} \pm \frac{\lambda - \lambda^{2} - \lambda^{3} - \ldots - \lambda^{n}}{1 + \lambda^{n}} y_{*}\right), \tag{12}$$

или

$$f(y) = \lambda y_{*} \frac{1 + \lambda^{n} \pm (\lambda - \lambda^{2} - \lambda^{3} - \ldots - \lambda^{n})}{1 + \lambda^{n}}.$$

Согласно Утверждению 1, многочлен в знаменателе дроби должен содержать степень n, таким образом, знак перед дробью в (12) будет «+», а $y < 0$.

Произведя соответствующие преобразования (12), получим следующую точку:

$$y = \frac{\lambda + \lambda^{2} - \lambda^{3} - \ldots - \lambda^{n}}{1 + \lambda^{n}} y_{*}, \tag{13}$$

причем

$$\frac{\lambda - \lambda^{2} - \lambda^{3} - \ldots - \lambda^{n}}{1 + \lambda^{n}} y_{*} < 0,$$

или, что то же самое,

$$\lambda-\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^n<0. \qquad (14)$$

Повторив аналогичные суждения для (13), получим точку:

$$y=\frac{\lambda+\lambda^2+\lambda^3-\ldots-\lambda^n}{1+\lambda^n}y_*, \qquad (15)$$

где опять же $\frac{\lambda+\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^n}{1+\lambda^n}y_*<0$, или

$$\lambda+\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^n<0. \qquad (16)$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что если числитель дроби (9) будет равным $1+\lambda^n$, то многочлены $P^n(\lambda)$ в знаменателе соответствующих точек цикла будут иметь вид:

$$\begin{array}{l}
\lambda-\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n,\\
\lambda+\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n,\\
\lambda+\lambda^2+\lambda^3-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n,\\
\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n,\\
\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^n,\\
\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^n.
\end{array} \qquad (17)$$

Кроме того, для λ должна быть справедливой система неравенств

$$\begin{cases}
\lambda-\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n<0,\\
\lambda+\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n<0,\\
\lambda+\lambda^2+\lambda^3-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n<0,\\
\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n<0,\\
\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^n<0,\\
\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^n>0.
\end{cases} \qquad (18)$$

Очевидно, что для того, чтобы число λ удовлетворяло систему неравенств (18), достаточно, чтобы оно удовлетворяло предпоследнему неравенству системы (18), т.е. $\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^n<0$. Таким образом, можно показать, что при увеличении n сужается интервал, с которого можно выбирать значения параметра λ.

Повторяя вышеприведенные рассуждения для случая, когда числитель дроби (9) равен $1-\lambda^n$, т.е. когда начальная точка имеет вид $y=\frac{\lambda-\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^n}{1-\lambda^n}y_*$, получаем представления соответствующих многочленов $P^n(\lambda)$ в его знаменателе. Эти многочлены будут иметь вид:

$$\begin{array}{l}\lambda-\lambda^{2}-\lambda^{3}-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^{n},\\ \lambda-\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^{n},\\ \lambda+\lambda^{2}-\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^{n},\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots-\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^{n},\\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}+\lambda^{n},\\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^{n}.\end{array}\tag{19}$$

В этом случае система неравенств, которые определяют интервал существования параметра λ, сведется к виду:

$$\begin{cases}\lambda-\lambda^{2}-\lambda^{3}-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^{n}<0,\\ \lambda-\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^{n}>0,\\ \lambda+\lambda^{2}-\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^{n}>0,\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots-\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}+\lambda^{n}>0,\\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}+\lambda^{n}>0,\\ \lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^{n}<0.\end{cases}\tag{20}$$

Как и для системы (18), для того, чтобы число λ удовлетворяло систему неравенств (20), достаточно, чтобы оно удовлетворяло последнему неравенству системы (20), т.е. $\lambda+\lambda^{2}+\lambda^{3}+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^{n}<0$.

Таким образом, мы получили для обоих рассмотренных случаев одинаковое неравенство, которое определяет интервал для параметра λ: для всех

$$n\geq 3\ \ \lambda\in\left(\alpha,\ \left|\min G(x)\right|\right],$$

где α является решением уравнения

$$r+r^{2}+r^{3}+\ldots+r^{n-2}+r^{n-1}-r^{n}=0$$

на интервале $\left(1,\left|\min G(x)\right|\right]$. В частности, при $n=3$ $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}61803$, при $n=4$ $\alpha=\frac{1}{3}+\sqrt[3]{\frac{19}{27}+\frac{\sqrt{33}}{9}}+\sqrt[3]{\frac{19}{27}-\frac{\sqrt{33}}{9}}\approx 1{,}83928$.

Отметим, что все рассуждения проведены для случая, когда в качестве начальной точки отображения (8) выбирали точки $y=\frac{\lambda-\lambda^{2}-\lambda^{3}-\ldots-\lambda^{n}}{1\pm\lambda^{n}}y_{*}$. Если в качестве начальной точки выбрать иную точку, то получим набор точек, которые определяют периодический цикл отображения (8), отличный от приведенных выше.

Следовательно, из (17) и (19) видим, что среди точек периодических циклов периода n отображения (8), когда фазовая точка при движении фазовой траекторией уравнения (1) подвержена импульсному воздействию (7) ровно n раз за период, обязательно будут точки вида:

$$\frac{\lambda-\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n}{1\pm\lambda^n} \text{ и } \frac{\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^n}{1\pm\lambda^n}. \qquad (21)$$

Используя (21), можно найти набор точек для отображения (8), определяющих соответствующее $T(n)$ – периодическое решение задачи (1), (7).

Необходимо отметить, что с учетом (17) точка $\frac{\lambda-\lambda^2}{1-\lambda^2}$, которая является точкой периода 2, совпадает с неподвижной точкой $\frac{\lambda}{1+\lambda}$.

Таким образом, справедливо

Утверждение 2. *Точки, определяющие периодический цикл периода n на интервале $(1, |\min G(x)|]$ для отображения* (8)*, когда фазовая точка при движении фазовой траектории уравнения* (1) *подвержена импульсному воздействию* (7) *ровно n раз за период, имеют вид:*

$$\frac{\lambda-\lambda^2-\lambda^3-\ldots-\lambda^{n-2}-\lambda^{n-1}-\lambda^n}{1\pm\lambda^n} \text{ и } \frac{\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{n-2}+\lambda^{n-1}-\lambda^n}{1\pm\lambda^n}.$$

При этом с увеличением n будет сужаться интервал, из которого выбираются значения параметра λ, а именно, $\lambda\in(\alpha, |\min G(x)|]$, где α – решение уравнения $r+r^2+r^3+\ldots+r^{n-2}+r^{n-1}-r^n=0$ на интервале $(1, |\min G(x)|]$.

Проведенный анализ качественного поведения системы (1), (2), (8) демонстрирует сложный характер поведения траекторий систем, определенных дифференциальными уравнениями и условиями импульсного воздействия, причем в таких системах могут проявляться некоторые специфические эффекты (изменение асимптотических свойств решения (при $t\to\infty$), сосуществование периодических решений), обусловленные именно импульсным воздействием.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – Киев : Вищ. шк., 1987. – 252 с.

2. Самойленко, А. М. Про періодичні розв’язки рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією / А. М. Самойленко, В. Г. Самойленко, В. В. Собчук // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 6. – С. 827–834.

3. Самойленко, В. Г. Періодичні розв’язки рівняння Льєнара з імпульсною дією / В. Г. Самойленко, В. В. Собчук // Нелінійні коливання. – 2000. – Т. 3, № 2. – С. 256–265.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 20.06.2017

Sobchuk V.V., Khitko I.V. **Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations with Impulse Effect and Exclusive Views Point of Order of Sharkovsky**

In the paper for the Lienard equation with impulse effect at non-fixed instants of time, it is shown that the problem of the existence of its periodic solutions is equivalent to the problem of the existence of periodic points of some mapping of the line segment into itself. Examples of impulse effect functions $I(\dot{x})$ are given for which the Lienard equations have periodic solutions and for which the coexistence of periodic solutions in accordance with the Sharkovskii order takes place. The latter is provided by changes in the parameter in the function $I(\dot{x})$.