## ЗМІСТ

# ВСТУП

Теорія диференціальних рівнянь посідає чільне місце серед інших математичних дисциплін. Гармонійне поєднання теоретичного і прикладного аспектів робить її однаково привабливою й цікавою як для суто математиків, так і для тих, хто займається застосуванням математики в різноманітних галузях знань. Механіка, фізика, радіоелектроніка, хімія, біологія, економіка, машинобудування, математика (варіаційне числення, оптимальне управління, геометрія, топологія, рівняння математичної фізики тощо), інформатика - це далеко не повний перелік наук, в яких знаходять широке застосування диференціальні рівняння.

Дана методична розробка покликана допомогти студентам глибоко засвоїти знання основ теорії звичайних диференціальних рівнянь та виробити вміння застосовувати ці знання при дослідженні і розв'язанні конкретних диференціальних рівнянь та їх систем.

У практикуму вміщено 720 завдань з цієї теорії, що сформовані у блоки по 30 задач на кожен вагомий тип рівнянь. У посібнику наведено ряд розв'язаних прикладів на основні класи рівнянь та проілюстровані основні методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь та їх систем.

Така структура посібника дасть змогу, з одного боку, викладачеві забезпечити кожного студента групи конкретним завданням, а з іншого – майбутнім фахівцям допоможе проявити ініціативу при підготовці до практичних занять.

Запропонований практикум дозволить максимально активізувати і оптимізувати навчальний процес студентів при вивченні курсів „Диференціальні та інтегральні рівняння” та „Диференціальні рівняння”, спонукатиме студентів до самостійної роботи, саморозвитку та самовдосконалення.

## Розділ 1.

### 1.1. Завдання №1

У кожному варіантізнайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

1.1. $y^2dx - 2xy\,dy = 4y\,dy - dx.$

1.2. $\sqrt{9-y^2}dx - 4dy = x^2dy.$

1.3. $ydy + \sqrt{y^2+4}dx = 2x^2ydy.$

1.4. $y^2dx - x\,dy = 2\,dy - 4\,dx.$

1.5. $x^2dy = 2x\sqrt{y^2+4}dx - dy.$

1.6. $\sqrt{9-y^2}dx - 2\,dy = x\,dy.$

1.7. $2xy^2dx - dy = x^2dy - 8xdx.$

1.8. $dy = \sqrt{y^2+4}dx - x\,dy.$

1.9. $2x\sqrt{4-y^2}dx - dy = x^2dy.$

1.10. $x^2\,dy = \sqrt{y^2+1}dx + 8y\,dy.$

1.11. $y^2dx - 2ydy = 2xydy - 4\,dx.$

1.12. $9\,dy = \sqrt{4-y^2}dx - x^2dy.$

1.13. $2x^2ydy = \sqrt{y^2+1}dx + 8ydy.$

1.14. $9\,dx - x\,dy = dy - y^2dx.$

1.15. $2x\sqrt{y^2+1}dx = x^2\,dy = 4\,dy.$

1.16. $dy = \sqrt{4-y^2}dx - x\,dy.$

1.17. $18xdx - x^2dy = d\,dy - 2xy^2dx.$

1.18. $\sqrt{y^2+1}dx - 2\,dy = x\,dy.$

1.19. $4\,dy = 2x\sqrt{9-y^2}dx - x^2dy.$

1.20. $\sqrt{y^2+4}dx - 9\,dy = x^2dy.$

1.21. $dy - 2xy\,dx = 4x\,dx - x^2dy.$

1.22. $4\,dx = \sqrt{9-x^2}dy - y^2dx.$

1.23. $2xy^2dx = \sqrt{x^2+4}dy + xdx.$

1.24. $4\,dy - y\,dx = 2\,dx - x^2dy.$

1.25. $dx = 2y\sqrt{x^2 + 4}dy - y^2dx.$

1.26. $2\ dx = \sqrt{9 - x^2}dy - y\ dx.$

1.27. $8ydy - dx = y^2dx - 2x^2ydy.$

1.28. $\sqrt{x^2 + 4}dy - dx = y\ dx.$

1.29. $dx = 2y\sqrt{4 - x^2}dy - y^2dx.$

1.30. $-y^2dx + \sqrt{x^2 + 1}dy = 4\ dx.$

## 1.2. Завдання №2

У кожномуваріантізнайтизагальнийінтегралдиференціальногорівняння:

2.1. $(2x - y)dy = (4x + 2y)dx.$

2.2. $(x^2 + 2xy + 3y^2)dx = 2x(x + y)dy.$

2.3. $(6y^3 + 2x^2y)dx = (5xy^2 + x^3)dy.$

2.4. $2xy' = 2y + x\, tg\, \frac{2y}{x}.$

2.5. $(x + 3y)dx = (3x - y)dy.$

2.6. $(4x^2 + 4xy + 3y^2)dx = (4x^2 + 2xy)dy.$

2.7. $(6y^3 + 4x^2y)dx = (5xy^2 + 2x^3)dy.$

2.8. $xy' = y + (2x + y)(\ln(2x + y) - \ln x).$

2.9. $(6x - y)dy = (9x + 6y)dx.$

2.10. $(2x^2 + 4xy)dy = (x^2 + 2xy + 5y^2)dx.$

2.11. $6y(x^2 + y^2)dx = (5xy^2 + 3x^3)dy.$

2.12. $xy' = \sqrt{9x^2 - y^2} + y.$

2.13. $(5x - y)dy = (x + 5y)dx.$

2.14. $(4x^2 + 5xy + 3y^2)dx = (6x^2 + 2xy)dy.$

2.15. $2x^2y' = y^2 + 5xy + 2x^2.$

2.16. $(4x + 4y)dx = (4x - y)dy.$

2.17. $(3x^2 + 2xy)dy = (x^2 + 3xy + 3y^2)dx.$

2.18. $x(3y^2 + x^2)dy = (4y^3 + 2x^2y)dx.$

2.19. $3xy' = 3y + x\, tg\, \frac{3y}{x}.$

2.20. $(6x - y)dy = (x + 6y)dx.$

2.21. $(4x^2 + 4xy + 5y^2)dx = 4x(x + y)dy.$

2.22. $x(3y^2 + 2x^2)dy = 4y(y^2 + x^2)dx.$

2.23. $xy' = y + (x + 2y)(\ln(x + 2y) - \ln x).$

2.24. $(9x + 3y)dx = (3x - y)dy.$

2.25. $(3x^2 + 4xy)dy = (x^2 + 3xy + 5y^2)dx.$

2.26. $3x(y^2 + x^2)dy = (4y^3 + 6x^2y)dx.$

2.27. $xy' = \sqrt{4x^2 - y^2} + y.$

2.28. $(4x - y)dy = (x + 4y)dx.$

2.29. $(4x^2 + 6xy + 5y^2)dx = (6x^2 + 4xy)dy.$

2.30. $4x^2y' = y^2 + 9xy + 6x^2.$

## 1.3. Завдання №3

У кожномуваріантізнайтизагальнийінтегралдиференціальногорівняння:

(вказівка: зробити замінуневідомої функції$y(x) = xz(x)$):

3.1. $(x^2+4)(xdy - ydx) = x\sqrt{y^2+x^2}dx.$

3.2. $(1+x)(xdy - ydx) = x\sqrt{y^2+4x^3}dx.$

3.3. $(9+x^2)(xdy - ydx) = x\sqrt{4x^2-y^2}dx.$

3.4. $x(2x+y)dx = \sqrt{9-x^2}(xdy - ydx).$

3.5. $x\sqrt{9x^2-y^2}dx = (4+x^2)(xdy - ydx).$

3.6. $x\sqrt{y^2+4x^2}dx = (x^2+9)(xdy - ydx).$

3.7. $(1+x)(xdy - ydx) = x\sqrt{4x^2-y^2}dx.$

3.8. $2x^2(4x^2-y^2)dx = (x^2+1)(xdy - ydx).$

3.9. $2x^2\sqrt{y^2+x^2}dx = (4+x^2)(xdy - ydx).$

3.10. $(9x^2+y^2)dx = (x+1)(x\,dy - y\,dx)$

3.11. $(4+x^2)(x\,dy - y\,dx) = 2x^2\sqrt{9x^2-y^2}.$

3.12. $2x(y^2+4x^2)dx = (x^2+1)(x\,dy - y\,dx).$

3.13. $x^2\sqrt{y^2+4x^2}dx = y(2x^2-1)(x\,dy - y\,dx).$

3.14. $(4x^2+y^2)dx = \sqrt{9-x^2}(x\,dy - y\,dx).$

3.15. $x(y^2+4x^2)dx = 2y(x+1)(x\,dy - y\,dx).$

3.16. $(4+x^2)(x\,dy - y\,dx) = x(2x+y)dx.$

3.17. $(1+x^2)(x\,dy - y\,dx) = 2x^2(2x+y)dx.$

3.18. $2y(x^2-4)(xdy - ydx) = x^2\sqrt{y^2+x^2}dx.$

3.19. $x(x^2+y^2)dx = 2y\sqrt{x^2+4}(x\,dy - y\,dx).$

3.20. $\sqrt{x^2+1}(x\,dy - y\,dx) = (4x^2+y^2)dx.$

3.21. $2x(x^2+y^2)dx = (4+x^2)(x\,dy - y\,dx).$

3.22. $(1+x^2)(x\,dy - y\,dx) = 2x^2\sqrt{y^2+4x^2}dx.$

3.23. $x\sqrt{y^2+x^2}dx = (x+2)(x\,dy - y\,dx).$

3.24. $x(x^2+y^2)dx = 2y\sqrt{4-x^2}(xdy - ydx).$

3.25. $x(x^2 + y^2)dx = 2y(x + 2)(x\,dy - y\,dx)$.

3.26. $2y(4 + x^2)(x\,dy - y\,dx) = x(x^2 + y^2)$.

3.27. $x\sqrt{9x^2 - y^2}dx = (x + 2)(x\,dy - y\,dx)$.

3.28. $(y^2 + 4x^2)dx = (x + 2)(xdy - ydx)$.

3.29. $\sqrt{x^2 + 4}(x\,dy - y\,dx) = x(x + y)dx$.

3.30. $x(2y^2 - x^2)dx = \sqrt{x^2 + 4}(x\,dy - y\,dx)$.

## 1.4. Завдання №4

У кожномуваріантізнайтирозв'язок завданнязпочатковою умовою:

4.1. $y' - \frac{1}{x}y = xe^x, \quad y(1) = e.$

4.2. $y' = \operatorname{ctg} x \cdot y = \sin x \cdot \cos x\,, \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.3. $y' - \frac{4}{x}y = x^4 \cos x\,, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^4}{16}.$

4.4. $y' - \frac{1}{x \ln x}y = \frac{\ln x}{x}, \ y(e) = 0.$

4.5. $y' - \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}\arcsin\frac{x}{3}}y = \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}, y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$

4.6. $y' - \frac{1}{x}y = 2xe^{2x}, \ y(1) = e^2.$

4.7. $y' - 3\operatorname{tg} x \cdot y = 3\operatorname{tg}^2 x, \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.8. $y' - \frac{3}{x}y = x^3 \cos x\,, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8}.$

4.9. $y' - \frac{1}{x \ln x}y = \frac{2\ln^2 x}{x}, \ y(e) = 0.$

4.10. $y' - \frac{1}{2\sqrt{16-x^2\arcsin\frac{x}{4}}}y = \frac{1}{2\sqrt{16-x^2}\arcsin\frac{x}{4}}y = \frac{1}{2\sqrt{16-x^2}}, \ \ y(2) = \frac{\pi}{4}.$

4.11. $y' - \frac{1}{x}y = 3xe^{3x}, \ y(1) = 1.$

4.12. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 2\sin^2 x \cdot \cos x\,, \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.13. $y' - \frac{1}{x}y = x, \ y(1) = 1.$

4.14. $y' - \frac{1}{x \ln x}y, \ \ y(1) = 1.$

4.15. $y' - \frac{1}{2(1+x^2)\operatorname{arctg} x}y = \frac{1}{2(1+x^2)}, \ \ y(1) = \frac{\pi}{4}.$

4.16. $y' - \frac{1}{x}y = x^2 e^x, \ y(1) = e.$

4.17. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 3\sin^3 x \cdot \cos x\,, \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.18. $y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x\,, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$

4.19. $y' - \frac{1}{x \ln x}y = \frac{4\ln^2 x}{x}, \ y(e) = 0.$

4.20. $y' - \frac{1}{(4+x^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}y = \frac{1}{4+x^2}, \ \ y(2) = \frac{\pi}{4}.$

4.21. $y' - \frac{1}{x} y = 2x^2 e^{2x}, \;\; y(1) = e^2.$

4.22. $y' - 2 \operatorname{tg} x \cdot y = 2 \operatorname{tg} x, \;\; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.23. $y' - \frac{1}{x} y = x \cos x, \;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

4.24. $y' - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2} \arcsin x} y = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, \;\; y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$

4.25. $y' - \frac{3}{2(9+x^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{3}} y = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, \;\; y(3) = \frac{\pi}{4}.$

4.26. $y' - \frac{1}{x} y = 3x^2 x^{3x}, \;\; y(1) = e^x.$

4.27. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 4 \sin^4 x \cdot \cos x, \;\; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.28. $y' - \frac{1}{x} y = 2x^2, \;\; y(1) = 1.$

4.29. $y' - \frac{1}{2\sqrt{4-x^2} \arcsin \frac{x}{2}} y = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}, \;\; y(1) = \frac{\pi}{3}.$

4.30. $y' - \frac{2}{(16+x^2) \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}} y = \frac{2}{16+x^2}, \;\; y(4) = \frac{\pi}{4}.$

## 1.5. Завдання №5

У кожномуваріантізнайти загальний розв'язок диференціального рівняння Бернуллі:

5.1. $y' - y \operatorname{tg} x = y^{-2} \operatorname{tg}^2 x$ .

5.2. $xy' - y = x^3 e^{2x} y^{-1}$.

5.3. $y' \operatorname{tg} x - y = y^{-1} \sin^4 x$ .

5.4. $xy' - 4y = x^{-3} y \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$ .

5.5. $y' x \ln x - y = y^{-1} \ln^4 x$ .

5.6. $y' - 2y \operatorname{tg} x = 2y^{-2} \operatorname{tg}^5 x$ .

5.7. $xy' - y = 2x^3 e^{4x} y^{-1}$.

5.8. $y' - 3y \operatorname{tg} x = 3y^3 \operatorname{ctg}^7 x$ .

5.9. $xy' - 3y = x^{-2} y^2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$ .

5.10. $y' x \ln x - y = 2y^{-1} \ln^6 x$ .

5.11. $y' - 3y \operatorname{tg} x = 3y^{-2} \operatorname{tg}^8 x$ .

5.12. $xy' - y = 3x^3 e^{6x} y^{-1}$.

5.13. $y' \operatorname{tg} x - y = 2y^{-1} \sin^6 x$ .

5.14. $xy' - y = x^6 y^{-2}$.

5.15. $y' x \ln x - y = 3y^{-1} \ln^8 x$ .

5.16. $y' - 5y \operatorname{tg} x = 5y^3 \operatorname{ctg}^{11} x$ .

5.17. $xy' - y = x^5 e^{2x} y^{-1}$.

5.18. $y' \operatorname{tg} x - y = 3y^{-1} \sin^8 x$ .

5.19. $xy' - 2y = x^{-1} y^2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$ .

5.20. $y' x \ln x - y = 4y^{-1} \ln^{10} x$ .

5.21. $y' - 4y \operatorname{tg} x = 4y^2 \operatorname{ctg}^5 x$ .

5.22. $xy' - y = 2x^5 e^{4x} y^{-1}$.

5.23. $y' - 2y \operatorname{tg} x = 2y^3 \operatorname{ctg}^5 x$ .

5.24. $xy' - y = y^2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$ .

5.25. $y' x \ln x - y = 5y^2 \ln^{-6} x$ .

5.26. $y' - y \operatorname{tg} x - y = 4y^{-1} \sin^{10} x$ .

5.27. $xy' - y = 3x^5 e^{6x} y^{-1}$.

5.28. $y'\operatorname{tg} x - y = 4y^{-1}\sin^{10} x$ .

5.29. $xy' - y = 2x^9y^{-2}$.

5.30. $y'x\ln x - y = 6y^2\ln^{-7} x$ .

## 1.6. Завдання №6

У кожному варіантізнайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

6.1. $(3x^2 + 2xy^6)dx + (3y^2 + 6x^2y^5)dy = 0.$

6.2. $(3x^2 + y^2 + 3x^2y^5)dx + (2xy + 5x^3y^4)dy = 0.$

6.3. $(2xy + y^2 + 4x^3y^4)dx + (x^2 + 2xy + 4x^4y^3)dy = 0.$

6.4. $(y^2 + 5x^4y^3)dx + (2xy + 3y^2 + 3x^5y^2)dy = 0.$

6.5. $(2xy + 6x^5y^2)dx + (x^2 + 3y^2 + 2x^6y)dy = 0.$

6.6. $(3x^2 + y^2 + 2xy^6)dx + (2xy + 6x^2y^5)dy = 0.$

6.7. $(3x^2 + 2xy + 3x^2y^5)dx + (x^2 + 5x^3y^4)dy = 0.$

6.8. $(2xy + 4x^3y^4)dx + (x^2 + 3y^2 + 4x^4y^3)dy = 0.$

6.9. $(3x^2 + 5x^4y^3)dx + (3y^2 + 3x^5y^2)dy = 0.$

6.10. $(y^2 + 6x^5y^2)dx + (2xy + 3y^2 + 2x^6y)dy = 0.$

6.11. $(3x^2 + 2xy + 2xy^6)dx + (x^2 + 6x^2y^5)dy = 0.$

6.12. $(2xy + y^2 + 3x^2y^5)dx + (x^2 + 2xy + 5x^3y^4)dy = 0.$

6.13. $(y^2 + 4x^3y^4)dx + (2xy + 3y^2 + 4x^4y^3)dy = 0.$

6.14. $(3x^2 + 2y^2 + 5x^4y^3)dx + (2xy + 3x^5y^2)dy = 0.$

6.15. $(3x^2 + 2xy + 6x^5y^2)dx + (x^2 + 2x^6y)dy = 0.$

6.16. $(2xy + y^2 + 2xy^6)dx + (x^2 + 2xy + 6x^2y^5)dy = 0.$

6.17. $(2xy + 3x^2y^5)dx + (x^2 + 3y^2 + 5x^3y^4)dy = 0.$

6.18. $(3x^2 + 4x^3y^4)dx + (3y^2 + 4x^4y^3)dy = 0.$

6.19. $(3x^2 + 2xy + 5x^4y^3)dx + (x^2 + 3x^5y^2)dy = 0.$

6.20. $(2xy + y^2 + 6x^5y^2)dx + (x^2 + 2xy + 2x^6y)dy = 0.$

6.21. $2(xy + xy^6)dx + (x^2 + 3y^2 + 6x^2y^5)dy = 0.$

6.22. $(y^2 + 3x^2y^5)dx + (2xy + 3y^2 + 5x^3y^4)dy = 0.$

6.23. $(3x^2 + y^2 + 4x^3y^4)dx + (2xy + 4x^4y^3)dy = 0.$

6.24. $(2xy + y^2 + 5x^4y^3)dx + (x^2 + 2xy + 3x^5y^2)dy = 0.$

6.25. $(3x^2 + 6x^5y^2)dx + (3y^2 + 2x^6y)dy = 0.$

6.26. $(y^2 + 2xy^6)dx + (2xy + 3y^2 + 6x^2y^5)dy = 0.$

6.27. $3x^2(1 + y^5)dx + y^2(3 + 5x^3y^2)dy = 0.$

6.28. $(3x^2 + 2xy + 4x^3y^4)dx + (x^2 + 4x^4y^3)dy = 0.$

6.29. $(2xy + 5x^4y^3)dx + (x^2 + 3y^2 + 3x^5y^2)dy = 0.$

6.30. $(3x^2 + y^2 + 6x^5y^2)dx + (2xy + 2x^6y)dy = 0.$

## 1.7. Завдання №7

У кожному варіантізнайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

7.1. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{3x^2}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^3}{y^2}\right)dy=0.$

7.2. $(\operatorname{tg} y+\cos(x+y))dx+\left(\frac{x}{\cos^2 y}+\cos(x+y)\right)dy=0.$

7.3. $\frac{(2x-y)dx+(2y+x)dy}{x^2+y^2}=0$

7.4. $\left(2x+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$

7.5. $\left(y\cos x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(\sin x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$

7.6. $(\sin y+y\sin x)dx+(x\cos y-\cos x)dy=0.$

7.7. $\left(\frac{y}{\cos^2(xy)}-\frac{2x}{y}\right)dx+\left(\frac{x}{\cos^2(xy)}+\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0.$

7.8. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}+\frac{2}{x}\right)dx+\left(\frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}-\frac{2}{y}\right)dy=0.$

7.9. $\left(-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}\right)dy=0.$

7.10. $(\ln(1+y^2)-\sin(x+y))dx+\left(\frac{2xy}{1+y^2}-\sin\,(x+y)\right)dy=0.$

7.11. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0.$

7.12. $(3x^2\operatorname{tg} y+\cos(x+y))dx+\left(\frac{x^3}{\cos^2 y}+\cos(x+y)\right)dy=0.$

7.13. $\frac{(2x-3y)dx+(3x+2y)dy}{x^2+y^2}=0.$

7.14. $\left(4x^3+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$

7.15. $\left(3y\sin^2 x\cos x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(\sin^3 x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$

7.16. $(3x^2\sin y+y\sin x)dx+(x^3\cos y-\cos x)dy=0.$

7.17. $\left(\frac{y}{\cos^2(xy)}-\frac{6x^5}{y}\right)dx+\left(\frac{x}{\cos^2(xy)}+\frac{2x^6}{y^2}\right)dy=0.$

7.18. $\left(\frac{x}{(x^2+y^4)^{5/6}}+\frac{6}{x}\right)dx+\left(\frac{2y^3}{(x^2+y^4)^{5/6}}-\frac{2}{y}\right)dy=0.$

7.19. $\left(-\frac{3y}{x^2}\cos\frac{3y}{x}+\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\right)dx+\left(\frac{3}{x}\cos\frac{3y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}\right)dy=0.$

7.20. $(\ln(1+y^6)-\sin(x+y))dx+\left(\frac{6xy^5}{1+y^6}-\sin(x+y)\right)dy=0.$

7.21. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y^2}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2x}{y^3}\right)dy=0.$

7.22. $(\operatorname{tg} y+2\cos(2x+y))dx+\left(\frac{x}{\cos^2 y}+\cos(2x+y)\right)dy=0.$

7.23. $\frac{(4x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+y^2}=0.$

7.24. $\left(2x+ye^{x/y}\right)dx+e^{x/y}(2y-x)dy=0.$

7.25. $\left(y^2\cos x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(2y\sin x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$

7.26. $(\sin y+y^2\sin x)dx+(x\cos y-2y\cos x)dy=0.$

7.27. $\left(\frac{y^2}{\cos^2(xy^2)}-\frac{2x}{y}\right)dx+\left(\frac{2xy}{\cos^2(xy^2)}+\frac{2x^2}{y^2}\right)dy=0.$

7.28. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^6}}+\frac{2}{x}\right)dx+\left(\frac{3y^5}{\sqrt{x^2+y^6}}-\frac{4}{y}\right)dy=0.$

7.29. $\left(-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{2}{y}\sin\frac{2x}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{2x}{y^2}\sin\frac{2x}{y}\right)dy=0.$

7.30. $(\ln(1+y^2)-2\sin(2x+y))dx+\left(\frac{2xy}{1+y^2}-\sin(2x+y)\right)dy=0.$

## 1.8. Завдання №8

У кожномуваріанті проінтегруватидиференціальне рівняння Клеро:

8.1. $y = xy' - e^{y'} + y'$.

8.2. $3y = 3xy' - (y')^3 + 3y'$.

8.3. $y = xy' - \ln y' + 2y'$.

8.4. $2y = 2xy' - (y')^2 + 6y'$.

8.5. $y = xy' - e^{3y'} + 2y'$.

8.6. $y = xy' - e^{2y'} + y'$.

8.7. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 3y'$.

8.8. $y = xy' - 2\ln y' + 2y'$.

8.9. $y = xy' - (y')^2 + 3y'$.

8.10. $y = xy' - e^{4y'} + 2y'$.

8.11. $y = xy' - e^{y'} + 2y'$.

8.12. $3y = 3xy' - (y')^3 + 6y'$.

8.13. $y = xy' - \ln y' + y'$.

8.14. $2y = 2xy' - (y')^2 + 4y'$.

8.15. $y = xy' - e^{3y'} + y'$.

8.16. $y = xy' - e^{2y'} + 2y'$.

8.17. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 6y$.

8.18. $y = xy' - 2\ln y' + y'$.

8.19. $y = x' - (y')^2 + 2y'$.

8.20. $y = xy' - e^{4y'} + y'$.

8.21. $y = xy' - e^{y'} + 3y'$.

8.22. $3y = 3xy' - (y')^3 + 9y'$.

8.23. $y = xy' - \ln y' + 3y'$.

8.24. $2y = 2xy' - (y')^2 + 2y'$.

8.25. $y = xy' - e^{3y'} + 3y'$.

8.26. $y = xy' - e^{2y'} + 3y'$.

8.27. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 9y'$.

8.28. $y = xy' - 2\ln y' + 3y'$.

8.29. $y = xy' - (y')^2 + y'$.

8.30. $y = xy' - e^{4y'} + 3y'$.

## 1.9. Завдання №9

У кожномуваріанті проінтегруватидиференціальне рівняння Лагранжа:

9.1. $y = 2xy' + (y)^2$.

9.2. $y = x((y')^2 + y') + \frac{3}{y'}$.

9.3. $y = 3xy' + (y')^5$.

9.4. $y = ((y')^2 + 2y') + 2(y')^3 + 3(y')^2$.

9.5. $2y = xy' + 2(y')^{5/2}$.

9.6. $y = x(2(y')^2 - y') + 2(y')^{3/2}$.

9.7. $y = \frac{x}{y'} + ((y')^2 - 1)^{5/2}$.

9.8. $y = x(2(y')^2 + y') + \frac{4}{y'}$.

9.9. $y = \frac{4x}{y'} + ((y')^2 - 4)^{3/2}$.

9.10. $y = x((y')^2 + y') + \frac{2}{y'}$.

9.11. $y = 3xy' + (y')^4 + (y')^2$.

9.12. $y = x((y')^2 + 2y') + 4(y')^3 + 6(y')^2$.

9.13. $2y = xy' + 2(y')^{5/2} + (y')^{3/2}$.

9.14. $y = x(2(y')^2 - y') + 4(y')^{3/2}$.

9.15. $y = \frac{x}{y'} + ((y')^2 - 1)^{3/2}$.

9.16. $y = x(2(y')^2 + y') + \frac{5}{y'}$.

9.17. $y = \frac{4x}{y'} + \sqrt{(y')^2 - 4}$.

9.18. $y = x(y')^2 + (y')^3 + 2(y')^2$.

9.19. $y = 2xy' + (y')^5 + (y')^3$.

9.20. $y = x((y')^2 + 2y') + 6(y')^3 + 9(y')^2$.

9.21. $2y = xy' + 4(y')^{5/2} + 2(y')^{3/2}$.

9.22. $y = x(2(y')^2 - y') + 4(y' - 1)^{3/2}$.

9.23. $y = \frac{x}{y'} + \sqrt{(y')^2 - 1}$.

9.24. $y = x(2(y')^2 + y') + \frac{6}{y'}$.

9.25. $y = \frac{4x}{y'} + ((y')^2 - 4)^{5/2}.$

9.26. $y = x(y')^2 + 2(y')^3 + (y')^2.$

9.27. $y = 2xy' + 2(y')^4 + 3(y')^2.$

9.28. $y = x((y')^2 + y') + \frac{1}{y'}.$

9.29. $y = 3xy' + 5(y')^3 + 2(y')^2.$

## 1.10. Завдання №10

У кожному варіантізнайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

10.1. $xy''' = y'' + 2$.

10.2. $x^3y''' + 3x^2y'' = 2\cos\ln x$.

10.3. $(x^2 - x)y''' = (2 - x)y''$.

10.4. $xy''' - 2y'' = 4$.

10.5. $y'''(2\ln x + 3)x = 2y''$.

10.6. $\mathrm{tg}x \cdot y''' + 2y'' = 0$.

10.7. $y''' = \frac{3}{x}y'' + 12x$.

10.8. $y''' + 3(y'')^2\sqrt{1 - 2x} = 0$.

10.9. $\mathrm{tg}\, 3x \cdot y''' = 6y''$.

10.10. $x^3y''' + 3x^2y'' = 8\sin\ln x$.

10.11. $xy''' - y'' = 12x^2$.

10.12. $y''' = 6(y'')^2\sqrt{x + 1}$.

10.13. $(2x^2 - x)y''' = 2(1 - x)y''$.

10.14. $y''' - \frac{2}{x}y'' = 6$.

10.15. $\mathrm{tg}x \cdot y''' = y''$.

10.16.$y''' = (y'')^2\sqrt{6x + 5}$.

10.17. $xy''' - 3y'' = 12x$.

10.18. $\mathrm{tg}\, 3x \cdot y''' = 3y''$.

10.19. $x^3y''' + 3x^2y'' = 4\cos\ln x$.

10.20. $\operatorname{tg} 2x \cdot y''' + 4y'' = 0$.

10.21. $y''' = \frac{y''}{x} + 40x^2$.

10.22. $y''' = 3(y'')^2\sqrt{2x + 7}$.

10.23. $(x^2 - 2x)y''' = (4 - x)y''$.

10.24. $xy''' = 2y'' + 20x^3$.

10.25. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' + 6y'' = 0$.

10.26. $y''' = 2(y'')^2\sqrt{3x + 4}$.

10.27. $xy''' - 6 = 3y''$.

10.28. $x^3y''' + 3x^2y'' = 6 \sin \ln x$.

10.29. $\operatorname{tg} 2x \cdot y''' = 4y''$.

10.30. $y''' + (y'')^2\sqrt{1 - x} = 0$.

## 1.11. Завдання№11

У кожному варіанті знайти розв'язання задачі з початковимиумовами:

11.1. $y'' = 8(1+3y)(1+y), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 8.$

11.2. $y'' + y'^2 = 2e^{-y},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

11.3. $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

11.4. $2yy'' \ln y = {y'}^2(1 + 2\ln y), \quad y(0) = e,\ \ y'(0) = e.$

11.5. $y'' = 16y(y-1)(2y-1), \quad y(0) = \frac{1}{2},\ y'(0) = 1.$

11.6. $y^2 y'' + y' = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

11.7. $4y'' = \sin 4y\,, \quad y(0) = \frac{\pi}{4},\ y'(0) = \frac{1}{2}.$

11.8. $y^6 y'' + 5y' = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = \frac{1}{32}.$

11.9. $y'' = 2(1 + 4y + 3y^2), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

11.10. $y'' + y'^2 = 8e^{-y}, \quad y(0) = 2\ln 2\,,\ y'(0) = 2.$

11.11. $y'' = \frac{4\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = \frac{\pi}{6},\ y'(0) = \frac{4}{\sqrt{3}}.$

11.12. $3yy'' \ln y = {y'}^2(2 + 3\ln y), \quad y(0) = e,\ y'(0) = e.$

11.13. $y'' = 81y(2y-1)(4y-1), \quad y(0) = \frac{1}{3},\ y'(0) = 1.$

11.14. $y^3 y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

11.15. $y'' = \sin 4y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4},\ \ y'(0) = 1.$

11.16. $y^8 y'' + 7y' = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{128}.$

11.17. $y'' = 8(1 + 4y + 3y^2), \quad y(0) = 3, y'(0) = 16\sqrt{3}.$

11.18. $y'' + y'^2 = 8e^{-y}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 4.$

11.19. $y'' = \frac{9\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 3.$

11.20. $2yy''\ln y = {y'}^2(1 + 2\ln y), \quad y(1) = e, y'(1) = e.$

11.21. $y'' = 256y(3y - 1)(6y - 1), \quad y(0) = \frac{1}{4}, y'(0) = 1.$

11.22. $y^4 y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

11.23. $y'' = 4\sin 4y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}, y'(0) = 2.$

11.24. $y^7 y'' + 6y' = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{64}.$

11.25. $y'' = 2(1 + y)(1 + 3y), \quad y(0) = 1, y'(0) = 4.$

11.26. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}, \quad y(0) = 2\ln 2, y'(0) = 1.$

11.27. $y'' = \frac{\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = \frac{\pi}{6}, y'(0) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

11.28. $3yy''\ln y = {y'}^2(2 + 3\ln y), \quad y(1) = e, y'(1) = e.$

11.29. $y'' = 64y(y - 1)(2y - 1), \quad y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = 2.$

11.30. $y^5 y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$

## 1.12. Завдання №12

У кожному варіантізнайтизагальнийрозв'язокдиференціальногорівняння:

12.1. $xyy'' - 2xy'^2 = 3yy'$.

12.2. $x^2y'^2 + y^2 = x^2yy'' + 2xyy'$.

12.3. $e^{2x}(2yy' + yy'') = 8\sin 2 \cdot y^2 + e^{2x}y'^2$

12.4. $xyy'' + 3xy'^2 = 4yy'$.

12.5. $3xyy' + x^2yy'' = 2y^2 + x^2y'^2$.

12.6. $5xy'^2 = 7yy' - xyy''$.

12.7. $x^2y'^2 = x^2yy'' - xyy' + 2y^2$.

12.8. $e^xyy'' - 30\cos 3x \cdot y^2 = e^x(y'^2 - yy')$.

12.9. $2yy' + xyy'' = 4xy'^2$.

12.10. $x^2yy'' + 3y^2 = x^2y'^2 + 2xyy'$.

12.11. $xyy'' = 2xy'^2 + 2yy'$.

12.12. $x^2y'^2 - 2xyy' = x^2yy'' - 2y^2$.

12.13. $e^{2x}(2yy' - y'^2) = 145\sin 5x \cdot y^2 - e^{2x}yy''$.

12.14. $3xy'^2 = 5yy' - xyy''$.

12.15. $x^2yy'' = x^2y'^2 - 3xyy' + 4y^2$.

12.16. $xyy'' + 5xy'^2 = 8yy'$.

12.17. $x^2yy'' + 4y^2 = xyy' + x^2y'^2$.

12.18. $e^xyy' - 10\cos 2x \cdot y^2 = e^x(y'^2 - yy'')$.

12.19. $xyy'' - 4xy'^2 = -3yy'$.

12.20. $x^2y'^2 - 6y^2 = x^2yy'' - 2xyy'$.

12.21. $2xy'^2 = yy' + xyy''$.

12.22. $2xyy' + x^2yy'' = 5y^2 + x^2y'^2$.

12.23. $e^{2x}(yy'' - y'^2) = 39\sin 3x \cdot y^2 - 2e^{2x}yy'$.

12.24. $xyy'' = 6yy' - 3xy'^2$.

12.25. $x^2y'^2 + 6y^2 = 3xyy' + x^2yy''$.

12.26. $9yy' = 5xy'^2 + xy''$.

12.27. $x^2yy'' - xyy' = x^2{y'}^2 - 8y^2.$

12.28. $130\cos 5x \cdot y^2 + e^x{y'}^2 = e^x(yy'' + yy').$

12.29. $4x{y'}^2 = 4yy' + xyy''.$

12.30. $2xyy' + x^2{y'}^2 = 9y^2 + x^2yy''.$

## 1.13. Завдання №13

У кожному варіантізнайтизагальнийрозв'язокдиференціальногорівняння:

13.1. $y'' - 4y' + 3y = 0.$

13.2. $y'' - 4y' + 4y = 0.$

13.3. $y'' + 4y = 0.$

13.4. $y'' - y' - 2y = 0.$

13.5. $y'' - 2y' = 0.$

13.6. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

13.7. $y'' + 5y' + 4y = 0.$

13.8. $y'' + 6y' + 9y = 0.$

13.9. $y'' + 25y = 0.$

13.10. $y'' - 2y' - 3y = 0.$

13.11. $y'' + 3y' = 0.$

13.12. $y'' + 6y' + 10y = 0.$

13.13. $y'' - 5y' + 4y = 0.$

13.14. $y'' - 8y' + 16y = 0.$

13.15. $y'' + 16y = 0.$

13.16. $y'' + 2y' - 3y = 0.$

13.17. $y'' - 3y' = 0.$

13.18. $y'' - 4y' + 5y = 0.$

13.19. $y'' + 4y' + 3y = 0.$

13.20. $y'' + 4y' + 4y = 0.$

13.21. $y'' + 9y = 0.$

13.22. $y'' + y' - 2y = 0.$

13.23. $y'' + 2y' = 0.$

13.24. $y'' + 2y' + 2y = 0.$

13.25. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

13.26. $y'' - 4y = 0.$

13.27. $y'' - 6y' + 10y = 0.$

13.28. $y'' + 2y' + y = 0.$

13.29. $y'' + 3y' - 4y = 0.$

13.30. $y'' + 2y' + 6y = 0.$

## 1.14. Завдання №14

У кожномуваріантінаписати вигляд частинного розв’язку зневизначеними коефіцієнтами(незнаходячи їх числових значень):

14.1. $y'' - 5y' + 4y = xe^{4x} + \sin 4x + \cos x.$

14.2. $y'' - 6y' + 10y = e^{3x}\sin x + e^{3x} + \cos x.$

14.3. $y'' + 25y = x^5e^{5x} + \sin 5x + \cos 25x.$

14.4. $y'' + 3y' = x^3e^{-3x} + x^3 + \sin 3x.$

14.5. $y'' - y' - 2y = x^2e^{2x} + \sin x + \cos 2x.$

14.6. $y'' + y' - 2y = xe^{2x} + \sin 2x + \cos x.$

14.7. $y'' - 4y' = x^4e^{4x} + x^4 + \sin 4x.$

14.8. $y'' + 16y = x^4e^{4x} + \sin 4x + \cos 16x$

14.9. $y'' + 5y' + 4y = xe^{-x} + \sin 4x + \cos x.$

14.10. $y'' + 9y = x^3e^{3x} + \sin 9x + \cos 3x.$

14.11. $y'' + 2y' + 2y = e^{x}\sin x + e^{x} + \cos x.$

14.12. $y'' - 4y' + 3y = x^3e^{x} + \sin x + \cos 3x.$

14.13. $y'' + 6y' + 9y = x^2e^{-3x} + \sin 3x + e^{3x}.$

14.14. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin x + e^{-x} + \cos x.$

14.15. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x} + \sin x + e^{x}.$

14.16. $y'' - 2y' + 5y = e^{x}\cos 2x + e^{x} + \sin 2x.$

14.17. $y'' - 2y' - 3y = x^3e^{3x} + \sin 3x + \cos x.$

14.18. $y'' - 5y' + 6y = x^3e^{2x} + \sin 2x + \cos 3x.$

14.19. $y'' + 2y' = x^2e^{-2x} + x^2 + \sin 2x.$

14.20. $y'' + 6y' + 10y = e^{-3x}\cos x + e^{-3x} + \sin x.$

14.21. $y'' + 4y' + 3y = x^2e^{-x} + \sin x + \cos 3x.$

14.22. $y'' + 2y' - 3y = xe^{x} + \sin 3x + \cos x.$

14.23. $y'' - 4y' + 4y = x^2e^{2x} + \sin 2x + \cos x.$

14.24. $y'' - 2y' = x^2e^{2x} + x^2 + \sin 2x.$

14.25. $y'' + 3y' - 4y = xe^{x} + \sin x + \cos 4x.$

14.26. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos x + e^{2x} + \sin x.$

14.27. $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x} + \cos 2x + e^{2x}.$

14.28. $y'' - 3y' = x^3 e^{3x} + x^3 + \sin 3x.$

14.29. $y'' - 8y' + 16y = x^4 e^{4x} + \sin x + \cos 4x.$

14.30. $y'' + 4y = x^2 e^{2x} + \sin 4x + \cos 2x.$

## 1.15. Завдання №15

У кожному варіантізнайтизагальнийрозв'язокдиференціальногорівняння:

15.1. $y'' - 10y' + 26y = e^x(8\cos x + 24\sin x)$.

15.2. $y'' + 8y' + 17y = e^x(60\cos x + 5\sin x)$.

15.3. $y'' - 8y' + 25y = e^x(45\cos x + 35\sin x)$.

15.4. $y'' + 6y' + 10y = e^x(72\cos x - 16\sin x)$.

15.5. $y'' - 6y' + 18y = e^x(56\cos x + 32\sin x)$.

15.6. $y'' + 4y' + 5y = e^x(60\cos x - 27\sin x)$.

15.7. $y'' - 4y' + 20y = e^x(110\cos x + 30\sin x)$.

15.8. $y'' + 2y' + 2y = e^x(36\cos x - 28\sin x)$.

15.9. $y'' + 10y' + 29y = e^x(363\cos x - 69\sin x)$.

15.10. $y'' - 10y' + 34y = e^x(232\cos x + 104\sin x)$.

15.11. $y'' + 8y' + 20y = e^x(318\cos x - 82\sin x)$.

15.12. $y'' - 8y' + 17y = e^x(102\cos x + 81\sin x)$.

15.13. $y'' + 6y' + 13y = e^x(255\cos x - 85\sin x)$.

15.14. $y'' - 6y' + 10y = e^x(52\cos x + 60\sin x)$.

15.15. $y'' + 4y' + 8y = e^x(186\cos x - 78\sin x)$.

15.16. $y'' - 4y' + 13y = e^x(142\cos x + 41\sin x)$.

15.17. $y'' + 2y' + 5y = e^x(123\cos x - 61\sin x)$.

15.18. $y'' + 10y' + 34y = e^x(804\cos x - 172\sin x)$.

15.19. $y'' - 10y' + 29y = e^x(353\cos x + 171\sin x)$.

15.20. $y'' + 8y' + 25y = e^x(670\cos x - 167\sin x)$.

15.21. $y'' - 8y' + 20y = e^x(246\cos x + 138\sin x)$.

15.22. $y'' + 6y' + 18y = e^x(536\cos x - 152\sin x)$.

15.23. $y'' - 6y' + 13y = e^x(157\cos x + 99\sin x)$.

15.24. $y'' + 4y' + 13y = e^x(414\cos x - 127\sin x)$.

15.25. $y'' - 4y' + 8y = e^x(98\cos x + 54\sin x)$.

15.26. $y'' + 2y' + 10y = e^x(316\cos x - 92\sin x)$.

15.27. $y'' + 10y' + 26y = e^x(984\cos x - 288\sin x)$.

15.28. $y'' - 4y' + 5y = e^x(26\cos x + 57\sin x)$.

15.29. $y'' + 4y' + 20y = e^x(702\cos x - 150\sin x)$.

15.30. $y'' - 6y' + 25y = e^x(566\cos x + 139\sin x)$.

## 1.16. Завдання №16

У кожному варіантізнайтизагальнийрозв'язокдиференціальногорівняння:

16.1. $y'' + 4y = 4\cos 2x - 16\sin 2x.$

16.2. $y'' + 9y = 12\cos 3x - 24\sin 3x.$

16.3. $y'' + 16y = 24\cos 4x - 32\sin 4x.$

16.4. $y'' + 25y = 40\cos 5x - 40\sin 5x.$

16.5. $y'' + 36y = 60\cos 6x - 48\sin 6x.$

16.6. $y'' + 49y = 84\cos 7x - 56\sin 7x.$

16.7. $y'' + 64y = 112\cos 8x - 64\sin 8x.$

16.8. $y'' + 81y = 144\cos 9x - 72\sin 9x.$

16.9. $y'' + 4y = 36\cos 2x - 16\sin 2x.$

16.10. $y'' + 9y = 60\cos 3x - 6\sin 3x.$

16.11. $y'' + 16y = 8\cos 4x - 8\sin 4x.$

16.12. $y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x.$

16.13. $y'' + 36y = 36\cos 6x - 12\sin 6x.$

16.14. $y'' + 49y = 56\cos 7x - 14\sin 7x.$

16.15. $y'' + 64y = 80\cos 8x - 16\sin 8x.$

16.16. $y'' + 81y = 108\cos 9x - 18\sin 9x.$

16.17. $y'' + 4y = 28\cos 2x - 4\sin 2x.$

16.18. $y'' + 9y = 48\cos 3x - 6\sin 3x.$

16.19. $y'' + 16y = 72\cos 4x - 8\sin 4x.$

16.20. $y'' + 25y = 100\cos 5x - 20\sin 5x.$

16.21. $y'' + 36y = 12\cos 6x - 24\sin 6x.$

16.22. $y'' + 49y = 28\cos 7x - 28\sin 7x.$

16.23. $y'' + 64y = 48\cos 8x - 32\sin 8x.$

16.24. $y'' + 81y = 72\cos 9x - 36\sin 9x.$

16.25. $y'' + 4y = 20\cos 2x - 8\sin 2x.$

16.26. $y'' + 9y = 36\cos 3x - 12\sin 3x.$

16.27. $y'' + 16y = 56\cos 4x - 16\sin 4x.$

16.28. $y'' + 25y = 80\cos 5x - 20\sin 5x.$

16.29. $y'' + 36y = 108\cos 6x - 24\sin 6x.$

16.30. $y'' + 49y = 140\cos 7x - 42\sin 7x.$

## 1.17. Завдання №17

У кожному варіантізнайтизагальнийрозв'язокдиференціальногорівняння:

17.1. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \operatorname{cosec} x$ .

17.2. $y'' + 100y = 10 \operatorname{tg} 5x$ .

17.3. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$.

17.4. $y'' + 9y = 6\, tg\, 3x$.

17.5. $y'' + 2y' + 10y = \frac{\sec 3x}{e^x}$ .

17.6. $y'' + 36y = 36 \sec 6x$ .

17.7. $y'' + 9y' + 18y = \frac{9}{1+e^{3x}}$ .

17.8. $y'' - y' - 6y = \frac{1+2x+24x^2}{\sqrt{x^3}}$ .

17.9. $y'' + 64y = 8 \operatorname{tg} 4x$ .

17.10. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$ .

17.11. $y'' + 4y' = \frac{16}{1+e^{-4x}}$ .

17.12. $y'' + 4y' + 8y = \frac{\sec 2x}{e^{2x}}$ .

17.13. $y'' + 16y = 32 \operatorname{ctg} 4x$ .

17.14. $y'' - 12y' + 32y = \frac{16e^{8x}}{1+e^{4x}}$ .

17.15. $y'' + 4y = \frac{4x^2+12}{x^5}$ .

17.16. $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{cosec} x$.

17.17. $y'' + 36y = 6 \operatorname{tg} 3x$ .

17.18. $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2}$ .

17.19. $y'' + 4y = 6 \operatorname{tg} 2x$ .

17.20. $y'' + 4y' + 5y = \frac{\sec x}{e^{2x}}$ .

17.21. $y'' + 64y = 64 \sec 8x$ .

17.22. $y'' + 9y' + 18y = \frac{9}{e^{3x}(1+e^{3x})}$ .

17.23. $y'' + y' - 2y = \frac{1-2x+8x^2}{\sqrt{x^3}}$ .

17.24. $y'' + 16y = 4 \operatorname{tg} 2x$ .

17.25. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^3}$.

17.26. $y'' - 5y' = \frac{25}{1+e^{5x}}$.

17.27. $y'' + 2y' + 17y = \frac{\sec 4x}{e^x}$.

17.28. $y'' + 9y = 18 \operatorname{ctg} 3x$.

17.29. $y'' - 12y' + 32y = \frac{16}{1+e^{-4x}}$.

17.30. $y'' + y = \frac{x+6}{x^4}$.

## 1.18. Завдання №18

У кожному варіантізнайтизагальнийрозв'язокдиференціальногорівняння:

18.1. $y''' - 4y'' - 5y' = -15x^2 - 44x - 15.$

18.2. $y''' - 9y'' + 20y' = 60x^2 + 26x + 10.$

18.3. $y''' - 7y'' + 12y' = 36x^2 - 66x + 56.$

18.4. $y''' - 5y'' + 6y' = 18x^2 - 42x + 40.$

18.5. $y''' - 3y'' + 2y' = -6x^2 + 26x - 8.$

18.6. $y''' - 3y'' - 10y' = 30x^2 - 22x - 78.$

18.7. $y''' - 2y'' - 8y' = 24x^2 + 28x - 58.$

18.8. $y''' - y'' - 6y' = 18x^2 + 18 - 52.$

18.9. $y''' + y'' - 2y' = -6x^2 - 2x + 8.$

18.10. $y''' - 3y'' - 4y' = -12x^2 - 34x - 14.$

18.11. $y''' - 2y'' - 3y' = -9x^2 - 6x + 1.$

18.12. $y''' - y'' - 2y' = -6x^2 - 2x.$

18.13. $y''' - 8y'' + 15y' = -45x^2 + 108x + 37.$

18.14. $y''' - 7y'' + 10y' = -30x^2 + 82x + 24.$

18.15. $y''' - 6y'' + 5y' = -15x^2 + 26x + 41.$

18.16. $y''' - 5y'' + 4y' = -12x^2 + 22x + 36.$

18.17. $y''' - 6y'' + 8y' = 24x^2 - 4x - 10.$

18.18. $y''' - 4y'' + 3y' = 9x^2 - 12x - 4.$

18.19. $y''' - 2y'' - 15y' = -45x^2 + 18x - 35.$

18.20. $y''' - y'' - 12y' = -36x^2 + 18x - 40.$

18.21. $y''' + y'' - 6y' = 18x^2 - 30x - 32.$

18.22. $y''' + 2y'' - 3y' = 9x^2 - 24x - 16.$

18.23. $y''' + 3y'' - 4y' = 12x^2 - 10x - 40.$

18.24. $y''' + 2y'' - 8y' = 24x^2 + 4x - 74.$

18.25. $y''' + y'' - 12y' = -36x^2 - 42x - 2.$

18.26. $y''' - y'' - 20y' = -60x^2 - 86x - 38.$

18.27. $y''' + 4y'' - 5y' = -15x^2 + 34x - 17.$

18.28. $y''' + 3y'' - 10y' = -30x^2 + 38x - 40.$

18.29. $y''' + 2y'' - 15y' = 45x^2 - 72x - 73.$

18.30. $y''' + y'' - 20y' = 60x^2 - 86x - 122.$

## 1.19. Завдання №19

У кожному варіантізнайтизагальнийрозв'язокдиференціальногорівняння:

19.1. $y''' + 5y'' - y' - 5y = e^{2x}(21x + 52)$.

19.2. $y''' + 4y'' - 7y' - 10y = e^{x}(-12x - 20)$.

19.3. $y''' + 3y'' - 13y' - 15y = e^{x}(-24x - 76)$.

19.4. $y''' + 2y'' - 19y' - 20y = e^{x}(-35x - 151)$.

19.5. $y''' - 3y'' - 9y' - 5y = e^{x}(-16x - 92)$.

19.6. $y''' - 8y'' + 11y' + 20y = e^{x}(24x + 142)$.

19.7. $y''' - 6y'' + 5y' + 12y = e^{x}(12x + 80)$.

19.8. $y''' - 4y'' + y' + 6y = e^{x}(4x + 28)$.

19.9. $y''' - 3y'' - y' + 3y = e^{2x}(-3x - 4)$.

19.10. $y''' - 2y'' - 13y' - 10y = e^{x}(-24x - 62)$.

19.11. $y''' - y'' - 10y' - 8y = e^{x}(-18x - 63)$.

19.12. $y''' - 7y' - 6y = e^{x}(-12x - 52)$.

19.13. $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{2x}(12x + 79)$.

19.14. $y''' - 2y'' - 7y' - 4y = e^{x}(-12x - 80)$.

19.15. $y''' - y'' - 5y' - 3y = e^{x}(-8x - 60)$.

19.16. $y''' - 3y' - 2y = e^{x}(-4x - 32)$.

19.17. $y''' - 7y'' + 7y' + 15y = e^{x}(16x + 12)$.

19.18. $y''' - 6y'' + 3y' + 10y = e^{x}(8x + 10)$.

19.19. $y''' - 5y'' - y' + 5y = e^{2x}(-9x - 36)$.

19.20. $y''' - 4y'' - y' + 4y = e^{2x}(-6x - 29)$.

19.21. $y''' - 5y'' + 2y' + 8y = e^{x}(6x + 25)$.

19.22. $y''' - 3y'' - y' + 3y = e^{2x}(-3x - 19)$.

19.23. $y''' - y'' - 17y' - 15y = e^{x}(-32x - 240)$.

19.24. $y''' - 13y' - 12y = e^{x}(-24x - 202)$.

19.25. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = e^{x}(-8x - 6)$.

19.26. $y''' + 3y'' - y' - 3y = e^{2x}(15x + 53)$.

19.27. $y''' + 4y'' - y' - 4y = e^{2x}(18x + 81)$.

19.28. $y''' + 3y'' - 6y' - 8y = e^{x}(-10x - 37)$.

19.29. $y''' + 2y'' - 11y' - 12y = e^x(-20x - 104)$.

19.30. $y''' - 21y' - 20y = e^x(-40x - 258)$.

## 1.20. Завдання №20

У кожному варіантізнайтизагальнийрозв'язокдиференціальногорівняння:

20.1. $x^3y''' - x^2y'' - 4xy' + 4y = x^2(-6\ln x - 29)$.

20.2. $x^3y''' + 2x^2y'' - 5xy' - 3y = x(-8\ln x - 60)$.

20.3. $x^3y''' + x^2y'' - 14xy' - 10y = x(-24\ln x - 62)$.

20.4. $x^3y''' - 11xy' - 5y = x(-16\ln x - 92)$.

20.5. $x^3y''' + 3x^2y'' - 12xy' - 12y = x(-24\ln x - 202)$.

20.6. $x^3y''' - 2x^2y'' - 5xy' + 5y = x^2(-9\ln x - 36)$.

20.7. $x^3y''' + x^2y'' - 8xy' - 4y = x(-12\ln x - 80)$.

20.8. $x^3y''' - 3xy' + 3y = x^2(-3\ln x - 4)$.

20.9. $x^3y''' + 5x^2y'' - 15xy' - 20y = x(-35\ln x - 151)$.

20.10. $x^3y''' + 7x^2y'' + 4xy' - 4y = x^2(18\ln x + 81)$.

20.11. $x^3y''' + 2x^2y'' - 17xy' - 15y = x(-32\ln x - 240)$.

20.12. $x^3y''' - 3x^2y'' - 2xy' + 10y = x(8\ln x + 10)$.

20.13. $x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2(12\ln x + 79)$.

20.14. $x^3y''' - x^2y'' - 2xy' + 6y = x(4\ln x + 28)$.

20.15. $x^3y''' + 6x^2y'' - 9xy' - 15y = x(-24\ln x - 76)$.

20.16. $x^3y''' + 5x^2y'' - 8xy' - 12y = x(-20\ln x - 104)$.

20.17. $x^3y''' + 6x^2y'' + 3xy' - 3y = x^2(15\ln x + 53)$.

20.18. $x^3y''' - 3xy' + 3y = x^2(-3\ln x - 19)$.

20.19. $x^3y''' - 4x^2y'' + xy' + 15y = x(16\ln x + 12)$.

20.20. $x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' - 6y = x(-12\ln x - 52)$.

20.21. $x^3y''' - 3x^2y'' + 12y = x(12\ln x + 80)$.

20.22. $x^3y''' + 7x^2y'' - 2xy' - 10y = x(-12\ln x - 20)$.

20.23. $x^3y''' + 3x^2y'' - 20xy' + 20y = x(-40\ln x - 158)$.

20.24. $x^3y''' + 6x^2y'' - 2xy' - 8y = x(-10\ln x - 37)$.

20.25. $x^3y''' + 5x^2y'' - 2xy' - 6y = x(-8\ln x - 6)$.

20.26. $x^3y''' - 2x^2y'' - 2xy' + 8y = x(6\ln x + 25)$.

20.27. $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' - 2y = x(-4\ln x - 32)$.

20.28. $x^3y''' + 2x^2y'' - 10xy' - 8y = x(-18\ln x - 63)$.

20.29. $x^3y''' - 5x^2y'' + 4xy' + 20y = x(24\ln x + 142)$.

20.30. $x^3y''' + 8x^2y'' + 5xy' - 5y = x^2(21\ln x + 52)$.

## 1.21. Завдання №21

У кожномуваріантірозв'язатисистемудиференціальнихрівнянь методом виключення:

21.1. $\begin{cases} y' = 3y + 2z\,, \\ z' = 3y + 4z\,. \end{cases}$

21.2. $\begin{cases} y' = 3y - 4z\,, \\ z' = y - 2z\,. \end{cases}$

21.3. $\begin{cases} y' = 2y - z\,, \\ z' = 5y - 2z\,. \end{cases}$

21.4. $\begin{cases} y' = y - 2z\,, \\ z' = 7y - 8z\,. \end{cases}$

21.5. $\begin{cases} y' = 3y - 2z\,, \\ z' = 2y - z\,. \end{cases}$

21.6. $\begin{cases} y' = 4y - 2z\,, \\ z' = y + 2z\,. \end{cases}$

21.7. $\begin{cases} y' = 5y + 3z\,, \\ z' = y + 3z\,. \end{cases}$

21.8. $\begin{cases} y' = 2y - z\,, \\ z' = 5y - 4z\,. \end{cases}$

21.9. $\begin{cases} y' = 3y - z\,, \\ z' = 13y - 3z\,. \end{cases}$

21.10. $\begin{cases} y' = y - 3z\,, \\ z' = 7y - 9z\,. \end{cases}$

21.11. $\begin{cases} y' = 5y - 3z\,, \\ z' = 3y - z\,. \end{cases}$

21.12. $\begin{cases} y' = y - 9z\,, \\ z' = y + z\,. \end{cases}$

21.13. $\begin{cases} y' = 4y + z\,, \\ z' = 2y + 5z\,. \end{cases}$

21.14. $\begin{cases} y' = 5y - 3z\,, \\ z' = 4y - 3z\,. \end{cases}$

21.15. $\begin{cases} y' = y - 2z\,, \\ z' = 13y - z\,. \end{cases}$

21.16. $\begin{cases} y' = -5y + z\,, \\ z' = 3y - 4z\,. \end{cases}$

21.17. $\begin{cases} y' = 6y - z\,, \\ z' = y + 4z\,. \end{cases}$

21.18. $\begin{cases} y' = y - 2z\,, \\ z' = y + 3z\,. \end{cases}$

21.19. $\begin{cases} y' = y - 3z\,, \\ z' = 5y + 9z\,. \end{cases}$

21.20. $\begin{cases} y' = 2y - z\,, \\ z' = 4y - 3z\,. \end{cases}$

21.21. $\begin{cases} y' = 4y - 5z\,, \\ z' = 5y - 4z\,. \end{cases}$

21.22. $\begin{cases} y' = -7y + 3z\,, \\ z' = -y - 3z\,. \end{cases}$

21.23. $\begin{cases} y' = 9y - 5z\,, \\ z' = 5y - z\,. \end{cases}$

21.24. $\begin{cases} y' = y - 2z\,, \\ z' = 2y + z\,. \end{cases}$

21.25. $\begin{cases} y' = 8y - 3z\,, \\ z' = 2y + 3z\,. \end{cases}$

21.26. $\begin{cases} y' = 2y + z\,, \\ z' = 4y - z\,. \end{cases}$

21.27. $\begin{cases} y' = 2y - 5z\,, \\ z' = 4y - 2z\,. \end{cases}$

21.28. $\begin{cases} y' = -2y - 3z\,, \\ z' = 4y - 9z\,. \end{cases}$

21.29. $\begin{cases} y' = 7y - 4z\,, \\ z' = 4y - z\,. \end{cases}$

21.30. $\begin{cases} y' = y - z\,, \\ z' = y + z\,. \end{cases}$

## 1.22. Завдання №22

У кожномуваріанті побудувати фазові траєкторії длядиференціального рівняння:

13.1. $y'' - 4y' + 3y = 0.$

13.2. $y'' - 4y' + 4y = 0.$

13.3. $y'' + 4y = 0.$

13.4. $y'' - y' - 2y = 0.$

13.5. $y'' - 2y' = 0.$

13.6. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

13.7. $y'' + 5y' + 4y = 0.$

13.8. $y'' + 6y' + 9y = 0.$

13.9. $y'' + 25y = 0.$

13.10. $y'' - 2y' - 3y = 0.$

13.11. $y'' + 3y' = 0.$

13.12. $y'' + 6y' + 10y = 0.$

13.13. $y'' - 5y' + 4y = 0.$

13.14. $y'' - 8y' + 16y = 0.$

13.15. $y'' + 16y = 0.$

13.16. $y'' + 2y' - 3y = 0.$

13.17. $y'' - 3y' = 0.$

13.18. $y'' - 4y' + 5y = 0.$

13.19. $y'' + 4y' + 3y = 0.$

13.20. $y'' + 4y' + 4y = 0.$

13.21. $y'' + 9y = 0.$

13.22. $y'' + y' - 2y = 0.$

13.23. $y'' + 2y' = 0.$

13.24. $y'' + 2y' + 2y = 0.$

13.25. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

13.26. $y'' - 4y = 0.$

13.27. $y'' - 6y' + 10y = 0.$

13.28. $y'' + 2y' + y = 0.$

13.29. $y'' + 3y' - 4y = 0.$

13.30. $y'' + 2y' + 6y = 0.$

## 1.23. Завдання №23

У кожномуваріанті дослідити стан рівноваги даної системи диференціальних рівнянь і зобразитиїї фазові траєкторії на площині Oyz.

23.1. $\begin{cases} y' = 3y - z\,, \\ z' = 13y - 3z\,. \end{cases}$

23.2. $\begin{cases} y' = y - 3z\,, \\ z' = 7y - 9z\,. \end{cases}$

23.3. $\begin{cases} y' = 5y - 3z\,, \\ z' = 3y - z\,. \end{cases}$

23.4. $\begin{cases} y' = y - 9z\,, \\ z' = y + z\,. \end{cases}$

23.5. $\begin{cases} y' = 4y + z\,, \\ z' = 2y + 5z\,. \end{cases}$

23.6. $\begin{cases} y' = 5y - 3z\,, \\ z' = 4y - 3z\,. \end{cases}$

23.7. $\begin{cases} y' = y - 2z\,, \\ z' = 13y - z\,. \end{cases}$

23.8. $\begin{cases} y' = -5y + z\,, \\ z' = 2y - 4z\,. \end{cases}$

23.9. $\begin{cases} y' = 6y - z\,, \\ z' = y + 4z\,. \end{cases}$

23.10. $\begin{cases} y' = y - 2z\,, \\ z' = y + 3z\,. \end{cases}$

23.11. $\begin{cases} y' = y - 3z\,, \\ z' = 5y + 9z\,. \end{cases}$

23.12. $\begin{cases} y' = 2y - z\,, \\ z' = 4y - 3z\,. \end{cases}$

23.13. $\begin{cases} y' = 4y - 5z\,, \\ z' = 5y - 4z\,. \end{cases}$

23.14. $\begin{cases} y' = -7y + 3z\,, \\ z' = -y - 3z\,. \end{cases}$

23.15. $\begin{cases} y' = 9y - 5z\,, \\ z' = 5y - z\,. \end{cases}$

23.16. $\begin{cases} y' = y - 2z\,, \\ z' = 2y + z\,. \end{cases}$

23.17. $\begin{cases} y' = 8y - 3z\,, \\ z' = 2y + 3z\,. \end{cases}$

23.18. $\begin{cases} y' = 2y + z\,, \\ z' = 4y - z\,. \end{cases}$

23.19. $\begin{cases} y' = 2y - 5z\,, \\ z' = 4y - 2z\,. \end{cases}$

23.20. $\begin{cases} y' = -2y - 3z\,, \\ z' = 4y - 9z\,. \end{cases}$

23.21. $\begin{cases} y' = 7y - 4z\,, \\ z' = 4y - z\,. \end{cases}$

23.22. $\begin{cases} y' = y - z\,, \\ z' = y + z\,. \end{cases}$

23.23. $\begin{cases} y' = 3y + 2z\,, \\ z' = 3y + 4z\,. \end{cases}$

23.24. $\begin{cases} y' = 3y - 4z\,, \\ z' = y - 2z\,. \end{cases}$

23.25. $\begin{cases} y' = 2y - z\,, \\ z' = 5y - 2z\,. \end{cases}$

23.26. $\begin{cases} y' = y - 2z\,, \\ z' = 7y - 8z\,. \end{cases}$

23.27. $\begin{cases} y' = 3y - 2z\,, \\ z' = y - z\,. \end{cases}$

23.28. $\begin{cases} y' = 4y - 2z\,, \\ z' = y + 2z\,. \end{cases}$

23.29. $\begin{cases} y' = 5y + 3z\,, \\ z' = y + 3z\,. \end{cases}$

23.30. $\begin{cases} y' = 2y - z\,, \\ z' = 5y - 4z\,. \end{cases}$

## 1.24. Завдання №24

У кожномуваріанті знайти всі положеннярівноваги даної системи диференціальних рівнянь і кожне з них дослідити на стійкість.

24.1. $\begin{cases} y' = 6y + y^2 - z\,, \\ z' = y + y^2 + 4z\,. \end{cases}$

24.2. $\begin{cases} y' = y + y^2 - 2z\,, \\ z' = y - y^2 + 3z\,. \end{cases}$

24.3. $\begin{cases} y' = y - 3z + z^2\,, \\ z' = 5y + 9z + z^2\,. \end{cases}$

24.4. $\begin{cases} y' = 2y - y^2 - z\,, \\ z' = 4y - y^2 - 3z\,. \end{cases}$

24.5. $\begin{cases} y' = 4y - 5z + yz\,, \\ z' = 5y - 4z + yz\,. \end{cases}$

24.6. $\begin{cases} y' = -7y + 3z - z^2\,, \\ z' = -y - 3z - z^2\,. \end{cases}$

24.7. $\begin{cases} y' = 2y - 5z - yz\,, \\ z' = 5y - z - yz\,. \end{cases}$

24.8. $\begin{cases} y' = y - y^2 - 2z\,, \\ z' = 2y + y^2 + z\,. \end{cases}$

24.9. $\begin{cases} y' = 8y - 3z - 7yz\,, \\ z' = 2y + 3z + 2yz\,. \end{cases}$

24.10. $\begin{cases} y' = 2y + z - z^2\,, \\ z' = 4y - z + z^2\,. \end{cases}$

24.11. $\begin{cases} y' = 2y - 5z + 3yz\,, \\ z' = 4y - 2z - 2yz\,. \end{cases}$

24.12. $\begin{cases} y' = -2y - 3z + z^2\,, \\ z' = 3y - 9z - z^2\,. \end{cases}$

24.13. $\begin{cases} y' = 7y + y^2 - 4z\,, \\ z' = 4y + y^2 - z\,. \end{cases}$

24.14. $\begin{cases} y' = y - z + 2yz\,, \\ z' = y + z\,. \end{cases}$

24.15. $\begin{cases} y' = 3y - y^2 + 2z\,, \\ z' = 3y + y^2 + 4z\,. \end{cases}$

24.16. $\begin{cases} y' = 3y - 4z + z^2\,, \\ z' = y - 2z + z^2\,. \end{cases}$

24.17. $\begin{cases} y' = 2y - z + yz\,, \\ z' = 5y - 2z + 3yz\,. \end{cases}$

24.18. $\begin{cases} y' = y - 2z - z^2\,, \\ z' = 7y - 8z + z^2\,. \end{cases}$

24.19. $\begin{cases} y' = 3y - y^2 - 2z\,, \\ z' = 2y - y^2 - z\,. \end{cases}$

24.20. $\begin{cases} y' = 4y - 2z + z^2\,, \\ z' = y + 2z - z^2\,. \end{cases}$

24.21. $\begin{cases} y' = 5y + y^2 + 3z\,, \\ z' = y - y^2 + 3z\,. \end{cases}$

24.22. $\begin{cases} y' = 2y - z - yz\,, \\ z' = 5y - 4z - yz\,. \end{cases}$

24.23. $\begin{cases} y' = 3y - z + yz\,, \\ z' = 13y - 3z + 5yz\,. \end{cases}$

24.24. $\begin{cases} y' = y - 3z - z^2\,, \\ z' = 7y - 9z - z^2\,. \end{cases}$

24.25. $\begin{cases} y' = 5y + y^2 - 3z\,, \\ z' = 3y + y^2 - z\,. \end{cases}$

24.26. $\begin{cases} y' = y - 9z + z^2\,, \\ z' = y + z - z^2\,. \end{cases}$

24.27. $\begin{cases} y' = 4y - y^2 + z\,, \\ z' = 2y + y^2 + 5z\,. \end{cases}$

24.28. $\begin{cases} y' = 5y - 3z + z^2\,, \\ z' = 4y - 3z + z^2\,. \end{cases}$

24.29. $\begin{cases} y' = y - y^2 - 2z\,, \\ z' = 13y - y^2 - z\,. \end{cases}$

24.30. $\begin{cases} y' = -5y + z - yz\,, \\ z' = 2y - 4z + yz\,. \end{cases}$

## Розділ 2. Ілюстрація інтегрування диференціальних рівнянь на конкретних задачах

### 2.1. Приклади розв'язаних диференціальних рівнянь

***1. Розв'язати рівняння:***

$$(x + xy^2)dx - (y + yx^2)dy = 0 .$$

Оскільки це рівняння можна записати у вигляді

$$x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0,$$

то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розділимо змінні:

$\frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{2ydy}{1+y^2}$ і про інтегруємо його $\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \int \frac{2ydy}{1+y^2}$ .

Отримуємо:

$$ln(1 + x^2) = ln(1 + y^2) + ln C, C \neq 0.$$

Потенціюючи, дістаємо загальний розв'язок рівняння:

$$\frac{1+x^2}{1+y^2} = C, C \neq 0.$$

***2.Розв'язати рівняння*:**

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} .$$

Дане рівняння перепишемо у вигляді:

$$y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Отже, рівняння є однорідним. Використаємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$, тоді рівняння буде:

$$xu' + u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2, \text{ або } x\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2} .$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}; \qquad \int\frac{2du}{(u-1)^2} = \int\frac{dx}{x}; \qquad -\frac{2}{u-1} = \ln|x| + \ln|C|.$$

Загальний розв'язок рівняння буде:

$$-\frac{2}{\frac{y}{x}-1} = \ln|Cx|, \text{ або } Cx = e^{\frac{2x}{x-y}}.$$

3. ***Знайти розв'язок рівняння y'+2yx=2x, що задовольняє початкову умову y(0)=2.***

Дане рівняння є лінійним рівнянням першого порядку. Поклавши *y=uv, y'=u'v+uv',* матимемо:

*u'v +uv'+2uvx=2x;* *u'v+u(v'+2vx)=2x.*

Отримаємо два рівняння:

1) v'+2vx=0; 2) u'v=2x

$$\frac{dv}{dx} = -2vx; \qquad u'e^{-x^2} = 2x;$$

$$\int\frac{dv}{v} = -\int 2xdx; \qquad \int du = \int 2xe^{x^2}dx;$$

$$v = e^{-x^2}. \qquad u = e^{x^2} + C.$$

Загальний розв'язок рівняння:6

$$y = uv = Ce^{-x^2} + 1.$$

Знайдемо значення сталої С, при якому частинний розв'язок задовольняє задану початкову умову:

$2 = Ce^0 + 1$, звідки С=1.

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд $y = e^{-x^2} + 1$.

4. ***Розв'язати рівняння***

$$(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0.$$

У даному випадку:

$$P(x,y) = 3y^2 + 2xy + 2x, \qquad Q(x,y) = 6xy + x^2 + 3.$$

Оскільки:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y + 2x,$$

То ліва частина заданого рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, причому $\frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 + 2xy + 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + 3$. (1)

Інтегруючи, наприклад, перше з цих рівнянь по $x$ (вважаючи $y$ сталою), маємо:

$$u(x,y) = 3xy^2 + x^2 y + x^2 + \varphi(y), \tag{2}$$

Де $\varphi(y)$ – довільна диференційовна функція $y$.

Диференціюючи рівність (2) по $y$, згідно з другим рівнянням (1), дістанемо:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + \frac{d\varphi}{dy} = 6xy + x^2 + 3,$$

Тобто $\frac{d\varphi}{dy} = 3$, звідки $\varphi(y) = 3y + C_1$.

Отже, загальний інтеграл даного рівняння виражається рівністю:

$$u(x,y) = 3xy^2 + x^2 y + x^2 + 3y + C_1.$$

***5. Розв'язати рівняння***

$$y'' + 3y' = e^{2x}.$$

Покладемо $z = y'$, тоді $z' = y''$ і маємо лінійне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $z=z(x)$:

$z' + 3z = e^{2x}$.

Розв’язавши це рівняння, знайдемо $z(x) = C_1e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}$, тоді

$y' = C_1e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}$, звідки $y = -\frac{C_1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{10}e^{2x} + C_2$.

***6. Розв’язати рівняння***

$yy'' - 2(y')^2 = 0$.

Поклавши:

$y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dy}p$, дістанемо

$yp\frac{dp}{dy} - 2p^2 = 0$, або $p\left(y\frac{dp}{dy} - 2p\right) = 0$.

Це рівняння розпадається на два:

*p=0,* $\quad y\frac{dp}{dy} - 2p = 0$.

З першого маємо $y' = 0$, звідки *y*=*C*. У другому рівнянні відокремлюються змінні:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y}, \quad \ln|p| = 2\ln|y| + \ln|C_1|, \quad p = C_1y^2, \quad C_1 \neq 0.$$

Оскільки $p = \frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = C_1y^2, \ \frac{dy}{y^2} = C_1dx, \ -\frac{1}{y} = C_1x + C_2.$$

Звідси другий розв’язок рівняння буде:

$$y = \frac{1}{C_1x + C_2}.$$

Отже, задане рівняння має два розв'язки

$y=C$, $y=\dfrac{1}{C_1x+C_2}$.

***7. Розв'язати рівняння***

$$y''-2y'+y=2x+3.$$

Загальний розв'язок даного рівняння будемо шукати в вигляді $y=y_{з.о.}+y_{ч.н.}$, де $y_{з.о.}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, $y_{ч.н.}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Характеристичне рівняння $k^2-2k+1=0$ має корені $k_1=k_2=1$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_{з.о.}=e^x(C_1+C_2x)$. Оскільки правою частиною данного рівняння є функція виду $P_1(x)e^{0x}$, причому $\alpha=0\neq k_1\neq k_2$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{ч.н.}=Q_1(x)e^{0x}$, тобто $y_{ч.н.}=A+Bx$, де A і B – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $y_{ч.н.}'=B$, $y_{ч.н.}''=0$ та підставивши їх у рівняння, маємо

$-2B+A+Bx=2x+3$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} B=2; \\ -2B+A=3, \end{cases}$$

звідки $B=2$, $A=7$. Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $y_{ч.н.}=7+2x$, тому

$y=y_{з.о.}+y_{ч.н.}=e^x(C_1+C_2x)+7+2x$ – шуканий загальний розв'язок.

***8. Розв'язати рівняння***

$$y''+4y=\sin 2x.$$

Характеристичне рівняння $k^2+4=0$ має корені $k_{1,2}=\pm 2i$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$y_{з.о.} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ . Права частина даного рівняння

$f(x) = 5\sin 2x = 5\sin 2x + 0\cdot \cos 2x$, де β=2 і число β$i=2i$ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок даного рівняння шукаємо у вигляді

$y_{ч.н.} = x(a\cos 2x + b\sin 2x)$ , де $a$ і$b$ – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $y_{ч.н.}'$ та $y_{ч.н.}''$ і підставивши $y_{ч.н.}$ та $y_{ч.н.}''$ у вихідне рівняння, після спрощення дістанемо

$-4a\sin 2x + 4b\cos 2x = 5\sin 2x$ .

Прирівнюючи коефіцієнти при *sin2x*та *cos2x*у лівій і правій частині цієї рівності, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4a = 5; \\ 4b = 0, \end{cases}$$

звідки $a = -\frac{5}{4}$, $b$=0, Отже $y_{ч.н.} = -\frac{5}{4}x\cos 2x$–частинний розвя'язок даного рівняння, а загальний розв'язок буде

$y = y_{з.о.} + y_{ч.н.} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{5}{4}x\cos 2x$ .

***9. Розв'язати рівняння***

$y'' + y = tgx$ .

Характеристичне рівняння $k^2+1=0$ має корені $k_{1,2}=\pm i$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_{з.о.} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Права частина *f(x)= tgx*не є функцією спеціального виду, тому частинний розв'язок даного рівняння методом підбору шукати не можна. Знайдемо цей розв'язок методом варіації сталої. Складемо систему виду:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0; \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

де $y_1(x)=\sin x$, $y_2(x)=\cos x$, тоді система набуде вигляду:

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = 0; \\ C_1'(x)\sin x - C_2'(x)\cos x = tgx, \end{cases}$$

$C_1'(x)=\sin x$, $\qquad C_2'(x)=-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$.

Інтегруючи дістанемо:

$$C_1(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_1;$$

$$C_2(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x dx = -\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \sin x + C_2,$$

де $C_1$ і $C_2$ – довільні сталі. Отже, загальний розв’язок буде:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

## 2.2. Розв’язання систем диференціальнихрівнянь

***1. Розв’язати систему рівнянь:***

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Продиференціюємо перше рівняння:

$$x'' = -7x' + y'$$

Підставимо це в рівняння значення похідної $y'$ із другого рівняння системи:

$$x'' = -7x' + (-2x - 5y).$$

Знайшовши з першого рівняння значення $y=x'+7x$і підставивши його в знайдене рівняння, дістанемо:

$$x'' + 12x' + 37x = 0.$$

Маємо лінійне однорідне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами. Інтегруючи його, одержуємо:

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Оскільки $y = x' + 7x$, то

$$y = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) =$$
$$= e^{-6t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_1 - C_2)\sin t).$$

Отже, загальний розв’язок даної системи має вигляд:

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),$$
$$y = e^{-6t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t).$$

**ЛІТЕРАТУРА**


1. Головач Г. П. Практикум задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. / О. Калайда, Г. Головач. —К. : Техніка, 1997.— 288с.
2. ГудыменкоФ. С. Сборник задач по дифференциальным уравнениям./ Ф. Гудыменко, И. Павлюк, В. Волкова. —К. :Вища шк., 1972. — 156с.
3. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. / Н. Еругин. —М. :Наука и техника,1972. — 668с.
4. Еругин Н.П. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. / Н. Еругин, И. Штокало, П. Бондаренко —К.:Вища шк., 1974. — 472с.
5. Лопатинский Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Я. Лопатинский —К.:Вища шк., 1984. — 200с.
6. Ляшко І.І.Диференціальні рівняння. / І. Ляшко, О. Боярчук, Я. Гай, О. Калайда —К. : Вища шк., 1981. — 504с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. / Н. Матвеев —М.: Высшая шк., 1967. —564с.
8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. / И. Петровский —М.:Наука, 1970. — 280с.
9. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. / К. Пономарев — Минск.: Высшая шк., 1973. — 560с.
10. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференцыальные уравнения. / Л. Понтрягин — М.: ГИФМЛ, 1961. — 312с.
11. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння. / І. Самойленко,М. Перестюк, І. Парасюк — К.: Либідь, 1994. —360с.
12. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння в прикладах і задачах. / А. Самойленко, С. Кривошея, М. Перестюк—К.: Либідь, 1994.
13. Степанов В.В. Курс Дифференциальных уравнений. /В. Степанов — М. : ГИТТЛ, 1952. —468с.

14. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям./ А. Филиппов—М. : Наука. — 1979. — 128с.
15. Шкіль М.І. Звичайні диференціальні рівняння./ М. Шкіль, М. Сотніченко—К.:Вища шк., 1992. — 303с.
16. Тихонов А.Н.Дифференциальные уравнения. /А. Тихонов, А. Васильєва, А. Свешников — М.: Наука, 1985.
17. Кривошея С.А.Диференціальні та інтегральні рівняння. / С. Кривошея, М. Перестюк, В. Бурим. —К. : Либідь, 2004.

Навчальневидання

Автори:
Ніна ЙосипівнаПадалко,
Анатолій Михайлович Падалко,
Юрій  ІліодоровичХаркевич

Практикум з диференціальних рівнянь

Друкується в авторській редакції