Теорема. Для довільної нескінченно диференційовної функції $\varphi(t)$, $t \in [0;T]$, такої, що $\varphi(0)=0$, функція вигляду (7), (8) задовольняє співвідношення (9) та початкову умову з точністю $O(\varepsilon)$.

6. Висновки

Побудовано нульовий член асимптотичного розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами і показано, що нульовий член асимптотики залежить від кривої розриву лише в початковій точці.

1. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення солітоноподібних розв'язків збуреного рівняння Кортевега-де Фріза // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, N. 1. – С. 111 – 124. 2. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, N. 1. – С. 122 – 132. 3. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. – М.: Советское радио, 1977. – 368 с. 4. *Фаминский А.В.* Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1988. – Том.13. – ¹.56 – 105. 5. *Maslov V.P., Omel'yanov G.A.* Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: AMS. – 2001. – 243 p.

Надійшла до редколегії 30.06.10

УДК 519.925

О. Чичурін, д-р фіз.-мат. наук

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ РІВНЯНЬ ШАЗІ

Подано детальне виведення 22 умов для системи Шазі, що виникають при розв'язанні задачі про належність рівняння Шазі з шістьма особливими точками до рівнянь Р-типу. Дано метод побудови рівняння Шазі з шістьма особливими точками, коефіцієнти якого задовольняють систему Шазі. Розглянуто процедуру чисельного і аналітичного інтегрування рівнянь Шазі зі сталими коефіцієнтами.

There is given a detailed deduction of twenty two conditions of Chazy system. These conditions arise during the solving the problem of belonging the Chazy equation with six singular points to P-type. The method of building Chazy equation with six singular points, which coefficients satisfy Chazy system, is given. The procedure of numerical and analytical integration Chazy equation with constant coefficients is considered.

1. Вступ

При вивченні рівнянь вигляду

$$w''' = P(w'', w', w, z), \tag{1}$$

де P – поліном стосовно w'', w', w з аналітичними коефіцієнтами за z, Шазі [8] сподівався отримати нові рівняння достатньо простого вигляду, розв'язки яких не були би класичними функціями і які б не приводилися до канонічних рівнянь Пенлеве. Як відзначено в монографії В.А. Добровольського [1], результати цих досліджень виявилися мало обнадійними. Тоді Шазі почав розглядати рівняння вигляду

$$w''' = R(w'', w', w, z), \tag{2}$$

де $R-$ раціональна стосовно w'', w', w функція з аналітичними коефіцієнтами за z, розв'язки яких не мають рухомих критичних особливих точок. Згідно методу Пенлеве, потрібно було знайти спрощене рівняння для (2) з нерухомими критичними точками. Шазі отримав рівняння вигляду [8]

$$w''' = \frac{PQ'' - QP''}{PQ' - QP'} w' w'' - \frac{P'Q'' - Q'P''}{PQ' - QP'} \frac{w'^3}{2}, \tag{3}$$

де P, Q – поліноми четвертого ступеня стосовно *w* зі сталими коефіцієнтами, P', P'', Q', Q'' – похідні поліномів P, Q за w. Він показав [8], що рівняння (3) має не більше шести полюсів, а рівняння *P*-типу, яке допускає рівняння (3) в якості свого спрощуючого рівняння, коли стосовно змінної w всі корені рівняння $PQ' - QP' = 0$ є простими, повинно записуватися у вигляді

$$w''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{(w' - a_k')(w'' - a_k'') + A_k (w' - a_k')^3 + B_k (w' - a_k')^2 + C_k (w' - a_k')}{w - a_k} + D\, w'' \;+\; E\, w' + \prod_{i=1}^{6} (w - a_i) \sum_{k=1}^{6} \frac{F_k}{w - a_k}. \tag{4}$$

Рівняння (4) містить 32 функції змінної $z: a_k, A_k, B_k, C_k, F_k \ \ (k = \overline{1,6}), \ \ D, E$.

Розвиваючи метод Пенлеве [9] для рівняння (4), Шазі отримав систему з 31 алгебраїчних і диференціальних рівнянь, в яких як невідомі фігурують 32 функції – коефіцієнти рівняння (4). Система перших дев'яти рівнянь, що пов'язує між собою функції A_k, a_k $(k = \overline{1,6})$, згідно [8], має вигляд

$$\sum_{k=1}^{6} A_k = 0, \ \ \sum_{k=1}^{6} a_k A_k = -6, \ \ \sum_{k=1}^{6} a_k{}^2\, A_k = -2 \sum_{k=1}^{6} a_k, \tag{5}$$

$$2\, A_k^2 + \sum_j \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0 \ \ (k, j = \overline{1,6};\ j \neq k)\ . \tag{6}$$

Невідомими тут є функції A_k $(k = \overline{1,6})$. Детальний аналіз цієї системи було проведено М.О. Лукашевичем в [2]. Грунтуючись на його методі, в [3] отримано розв'язок цієї системи у вигляді

$$A_k = \frac{-6a_k^4 + 4\sigma_1 a_k^3 + 3(\alpha_2 - \sigma_2)a_k^2 - 3\beta_2 a_k + 3\beta_3 - \sigma_4}{6a_k^5 - 5\sigma_1 a_k^4 + 4\sigma_2 a_k^3 - 3\sigma_3 a_k^2 + 2\sigma_4 a_k - \sigma_5} \quad (k = \overline{1,6}), \tag{7}$$

де основні симетричні поліноми σ_k, що складені з елементів a_k $(k = \overline{1,6})$, пов'язані з величинами α_2, β_2, β_3 співвідношеннями вигляду

$$\beta_2 = \frac{(3\alpha_2 - \sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1 - 3\sigma_3) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2}, \tag{8}$$

$$\beta_3 = \frac{2\sigma_1\sigma_5 - (3\alpha_2 - \sigma_2)(12\alpha_2^2 - 4\alpha_2\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{2(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)}, \tag{9}$$

а функція α_2 задовольняє рівняння 5-го ступеня

$$\begin{aligned}
&1296\alpha_2^5 - 1296\sigma_2\alpha_2^4 + 216(2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_4)\alpha_2^3 + 24(\sigma_1^2\sigma_4 - 2\sigma_2^3 - 6\sigma_2(\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_4) - \\
&-9\sigma_1\sigma_5 + 54\sigma_6)\alpha_2^2 + (12\sigma_1(\sigma_3(2\sigma_2^2 - 3\sigma_4) + 6\sigma_2\sigma_5) + \sigma_1^2(9\sigma_2^3 - 8\sigma_2\sigma_4 + 144\sigma_6) - \\
&-12(4\sigma_2^2\sigma_4 - 9\sigma_3\sigma_5 + 72\sigma_2\sigma_6) - 4\sigma_1^3\sigma_5)\alpha_2 + (2\sigma_1\sigma_4 - 3\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_5)(\sigma_1^2\sigma_3 - 4\sigma_1\sigma_4 + \\
&+12\sigma_5) + 4(\sigma_1^2 - 6\sigma_2)^2\sigma_6 = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Детальне виведення системи (5), (6), а також повне обґрунтування отриманого розв'язку подано [4].

Решта 22 рівнянь, що пов'язують між собою коефіцієнти рівняння (4), мають вигляд

$$2D + \sum_{k=1}^{6}(B_k - 3a_k{}' A_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{6} F_k = \sum_{k=1}^{6} a_k F_k = \sum_{k=1}^{6} a_k{}^2\, F_k = 0, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&-(-\frac{5}{2}A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j})B_k + \sum_j(\frac{1}{2}A_k + \frac{1}{a_k - a_j})B_j = -A_k{}' + \\
&+A_k \sum_j \frac{a_k{}' - a_j{}'}{a_k - a_j} - 3\sum_j A_j \frac{a_k{}' - a_j{}'}{a_k - a_j} + \frac{3}{2}A_k \sum_{i=1}^{6} a_i{}' A_i,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&-(2A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j})C_k + \sum_j C_j \frac{1}{a_k - a_j} = B_k^2 - B_k{}' - B_k \sum_j \frac{a_k{}' - a_j{}'}{a_k - a_j} - \\
&-\sum_j \frac{3A_j(a_k{}' - a_j{}')^2 + 2B_j(a_k{}' - a_j{}')}{a_k - a_j} + B_k D - E - \sum_j \frac{a_k{}'' - a_j{}''}{a_k - a_j},
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&-a_k{}''' - B_k C_k + C_k{}' + \sum_j \frac{(a_k{}' - a_j{}')(a_k{}'' - a_j{}'' - C_k) + A_j(a_k{}' - a_j{}')^3}{a_k - a_j} + \\
&+\sum_j \frac{B_j(a_k{}' - a_j{}')^2 + C_j(a_j{}' - a_k{}')}{a_k - a_j} + E\,a_k{}' + D\,(a_k{}'' - C_k) + F_k \prod_j (a_k - a_j) = 0,
\end{aligned} \tag{14}$$

де $k, j = \overline{1,6};\ j \neq k.$

2. Виведення умов Шазі

В [8] не подано детального виведення умов (11)-(14). Процедура отримання цих умов подається нижче. Запишемо рівняння (4) у вигляді

$$\begin{aligned}
&(w - a_1)w''' = (w' - a_1{}')(w'' - a_1{}'') + A_1(w' - a_1{}')^3 + B_1(w' - a_1{}')^2 + C_1(w' - a_1{}') + (w - a_1)(Dw'' + Ew') + \\
&+\sum_{j=2}^{6} \frac{w - a_1}{w - a_j}\Big((w' - a_j{}')(w'' - a_j{}'') + A_j(w' - a_j{}')^3 + B_j(w' - a_j{}')^2 + C_j(w' - a_j{}')\Big) + \\
&+(w^6 - \sigma_1 w^5 + \sigma_2 w^4 - \sigma_3 w^3 + \sigma_4 w^2 - \sigma_5 w + \sigma_6) + \left(F_1 + \sum_{j=2}^{6} \frac{(w - a_1)F_j}{w - a_j}\right),
\end{aligned} \tag{15}$$

де σ_i $(i = \overline{1,6})$ – елементарні симетричні поліноми, що складені з елементів a_i $(i = \overline{1,6})$.

Розглянемо розклад функції *w* в степеневий ряд в околі точки z_0

$$w(z) = a_1(z_0) + \alpha(z - z_0) + \beta(z - z_0)^2 + \gamma(z - z_0)^3 + \ldots, \tag{16}$$

де α, γ, z_0 – довільні сталі. Диференціюючи (16), отримаємо

$$w'(z) = \alpha + 2\beta(z - z_0) + 3\gamma(z - z_0)^2 + \ldots, \quad w''(z) = 2\beta + 6\gamma(z - z_0) + \ldots, \quad w'''(z) = 6\gamma + \ldots\ . \tag{17}$$

Крім того, розглянемо розклади коефіцієнтів рівняння (15) в околі точки z_0. Маємо

$$\begin{aligned}
&a_i(z) = a_i(z_0) + a_i'(z_0)(z-z_0) + \frac{a_i''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \frac{a_i'''(z_0)}{6}(z-z_0)^3 + \dots,\\
&A_i(z) = A_i(z_0) + A_i'(z_0)(z-z_0) + \dots,\\
&B_i(z) = B_i(z_0) + B_i'(z_0)(z-z_0) + \dots,\\
&C_i(z) = C_i(z_0) + C_i'(z_0)(z-z_0) + \dots,\\
&F_i(z) = F_i(z_0) + \dots, \quad (i=\overline{1,6}),\\
&D(z) = D(z_0) + \dots, \quad E(z) = E(z_0) + \dots .
\end{aligned} \tag{18}$$

Підставимо (16)-(18) в рівняння (15) і візьмемо до уваги рівності

$$\frac{w-a_1}{w-a_j} = \frac{\alpha - a_1'}{a_1 - a_j}(z-z_0) + \frac{2(\alpha - a_1')(a_j' - \alpha) + (a_1 - a_j)(2\beta - a_1'')}{2(a_1-a_j)^2}(z-z_0)^2 +$$
$$+\left(\frac{a_1''' - 6\gamma}{6(a_j - a_1)} - \frac{(a_j' - \alpha)(a_1'' - 2\beta)}{2(a_1-a_j)^2} + \frac{(\alpha - a_1')(2(a_j' - \alpha)^2 + (a_1 - a_j)(a_j'' - 2\beta))}{2(a_1-a_j)^3}\right)(z-z_0)^3 + \dots .$$

Тут і надалі використовуються позначення $a_i = a_i(z_0)$, $a_i' = a_i'(z_0)$, $a_i'' = a_i''(z_0)$ $(i=\overline{1,6})$.

В отриманих рівняннях прирівняємо коефіцієнти при $(z-z_0)^0$:

$$C_1 - a_1'' + a_1'^2 A_1 + B_1\alpha + A_1\alpha^2 - a_1'(B_1 + 2A_1\alpha) + 2\beta = 0 ,$$

звідки знаходимо

$$\beta = \frac{1}{2}\left(a_1'' - C_1 + (a_1' - \alpha)(B_1 + A_1(\alpha - a_1'))\right) , \tag{19}$$

та коефіцієнти при $(z-z_0)^1$. У такий спосіб отримується деяка умова у вигляді рівняння (позначимо це рівняння (I)), яке можна записати у вигляді алгебраїчного поліноміального рівняння четвертого степеня стосовно α, при цьому в рівняння (I) замість β потрібно підставити його значення згідно формули (19)).

Прирівнявши в рівнянні (I) коефіцієнт при α^4 до нуля, отримаємо рівність

$$2A_1^2 + \sum_{j=2}^{6}\frac{A_1 - A_j}{a_1 - a_j} = 0 , \tag{20}$$

яка є першим рівнянням системи (6). Далі в рівнянні (I) прирівняємо до нуля коефіцієнт при α^3. Відповідну умову можна записати у вигляді

$$\sum_{j=2}^{6}\frac{B_1 - B_j}{a_1 - a_j} + 3B_1A_1 + A_1D - 8A_1^2 a_1' - A_1' + \sum_{j=2}^{6}\frac{A_j(a_1' + 3a_j') - A_1(3a_1' + a_j')}{a_1 - a_j} = 0 . \tag{21}$$

З першого рівняння системи (11) знаходимо функцію *D*:

$$D = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6}(3a_k' A_k - B_k) , \tag{22}$$

а з рівняння (20) – функцію A_1^2:

$$A_1^2 = -\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{6}\frac{A_1 - A_j}{a_1 - a_j} . \tag{23}$$

Після підстановки (22), (23) в рівняння (21) і деяких перетворень, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned}
&-(-\frac{5}{2}A_1 + \sum_{j=2}^{6}\frac{1}{a_1 - a_j})B_1 + \sum_j(\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{a_1 - a_j})B_j + A_1' \quad -\\
&-A_1\sum_j\frac{a_1' - a_j'}{a_1 - a_j} + 3\sum_j A_j\frac{a_1' - a_j'}{a_1 - a_j} - \frac{3}{2}A_1\sum_{i=1}^{6}a_i' A_i = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

яке є першим рівнянням системи (12).

Прирівнявши тепер в рівнянні (I) до нуля коефіцієнт при α^2, отримаємо умову вигляду

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{6}\frac{C_1 - C_j}{a_1 - a_j} + \sum_{j=2}^{6}\frac{a_j'' - a_1'' - a_j'(B_1 - 2B_j) + 3a_1'^2 A_1}{a_1 - a_j} + 12a_1'^2 A_1^2 + B_1(B_1 + D) - B_1' - E + 2C_1A_1 +\\
&+a_1'\sum_{j=2}^{6}\frac{B_j - 2B_1 + 3a_j'(A_1 - A_j)}{a_1 - a_j} - 3\sum_{j=2}^{6}\frac{a_j'^2 A_j}{a_1 - a_j} - 9a_1' A_1B_1 - 3a_1'(A_1D - A_1') = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Знайшовши з рівняння (24) функцію B_1 і підставивши її разом з (22), (23) в рівняння (25), після деяких перетворень отримаємо рівняння вигляду

$$\begin{aligned}&(2A_1+\sum_j \frac{1}{a_1-a_j})C_1-\sum_j C_j\frac{1}{a_1-a_j}+B_1^2-B_1'+B_1\sum_j\frac{a_1'-a_j'}{a_1-a_j}-\\&-\sum_j\frac{3A_j(a_1'-a_j')^2+2B_j(a_1'-a_j')}{a_1-a_j}+B_1D-E-\sum_j\frac{a_1''-a_j''}{a_1-a_j}=0\quad (j=\overline{2,6}).\end{aligned}\tag{26}$$

Легко бачити, що (26) є першим рівнянням системи (13).

Прирівнявши в рівнянні (I) до нуля коефіцієнт при α, отримаємо умову, яку можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}&a_1'''-C_1'-a_1''D+C_1(B_1+D)-\prod_{j=2}^{6}(a_1-a_j)F_1-8a_1'^3A_1^2+\sum_{j=2}^{6}\frac{a_1'^2(B_1-3a_jA_1)-a_1'^3A_1}{a_1-a_j}+\\&+\sum_{j=2}^{6}\frac{a_j'(a_1''-a_j''-a_j'B_j-C_1+C_j+a_j'^2A_j)}{a_1-a_j}+9A_1B_1+3(A_1D-A_1')+2B_1'-\\&-2B_1(B_1+D)+E-4C_1A_1+a_1'\sum_{j=2}^{6}\frac{a_1''-a_j''+2a_j'(B_1-B_j)-C_1+C_j+3a_j'^2A_j}{a_1-a_j}=0.\end{aligned}\tag{27}$$

Функцію B_1, яку визначено з рівняння (24), та функцію C_1, яку визначено з рівняння (26), підставимо разом із співвідношеннями (22), (23) в (27). Після деяких перетворень отримаємо рівняння вигляду

$$\begin{aligned}&-a_1'''-B_1C_1+C_1'+\sum_j\frac{(a_1'-a_j')(a_1''-a_j''-C_1)+A_j(a_1'-a_j')^3}{a_1-a_j}+\\&+\sum_j\frac{B_j(a_1'-a_j')^2+C_j(a_j'-a_1')}{a_1-a_j}+E\,a_1'+D\,(a_1''-C_1)+F_1\prod_j(a_1-a_j)=0\quad (j=\overline{2,6}).\end{aligned}\tag{28}$$

Легко бачити, що (28) є першим рівнянням системи (14).

Зауваження. Якщо у виразі, що аналогічний виразу $\frac{w-a_1}{w-a_j}$ рівняння (15), замість функції a_1 взяти функцію a_j $(j=\overline{2,6})$ та при кожному *j* скористатися міркуваннями, що аналогічні викладеним вище, то отримаємо ще по п'ять співвідношень вигляду (24), (26) і (28).

Перейдемо тепер до виведення чотирьох рівнянь системи (11). Рівняння (4) має шість скінченних полюсів в площині змінної w. Розглянемо значення z_0, при якому $w=\infty$ не може бути полюсом рівняння (4), тобто точка z_0 є лише точкою голоморфності цього рівняння, яке можна записати у вигляді (15). Розглянемо розклад для простого полюса z_0 функції w. Маємо

$$w(z)=\frac{\alpha}{z-z_0}+\beta+\gamma(z-z_0)^2+\delta(z-z_0)^3+\ \ldots\ ,\tag{29}$$

де α,β,z_0- довільні сталі.

Тоді знаходимо

$$\begin{gathered}\frac{w-a_1}{w-a_j}=1+\frac{a_j-a_1}{\alpha}(z-z_0)+\frac{a_1\beta-(\beta+a_1)a_j+a_j^2+\alpha(a_j-a_1)}{\alpha^2}(z-z_0)^2+\ldots\quad (j=\overline{2,6}),\\(w-a_1)w'''=-\frac{6\alpha^2}{(z-z_0)^5}+\frac{6\alpha(a_1-\beta)}{(z-z_0)^4}+\ldots\quad,\\\frac{w-a_1}{w-a_j}(w'-a_1')^3=\frac{-\alpha^3}{(z-z_0)^6}+\frac{\alpha^2(a_1-a_j)}{(z-z_0)^5}+\frac{\alpha((\beta+a_1-a_j)a_j-\beta a_1+\alpha(a_1'-4a_j'))}{(z-z_0)^4}+\ldots\ ,\\\frac{w-a_1}{w-a_j}(w'-a_1')^2=\frac{\alpha^2}{(z-z_0)^4}+\frac{\alpha(a_j-a_1)}{(z-z_0)^3}+\ldots,\\\frac{w-a_1}{w-a_j}(w'-a_1')(w''-a_1'')=-\frac{2\alpha^2}{(z-z_0)^5}+\frac{2\alpha(a_1-a_j)}{(z-z_0)^4}-\frac{2((\beta-a_j)(a_1-a_j)+\alpha a_j')}{(z-z_0)^3}+\ldots\quad .\end{gathered}\tag{30}$$

Звідси отримуємо коефіцієнтні умови (5), (6), (11) як резонансні умови [5] для довільних значень α, β. Дійсно, підставимо співвідношення (29), (30) в рівняння (15) і прирівняємо коефіцієнти при $(z-z_0)^{-6}$, $(z-z_0)^{-5}$, $(z-z_0)^{-4}$.

Коефіцієнтна умова при $(z-z_0)^{-6}$ має вигляд $\alpha^6\sum_{k=1}^{6}F_k=\alpha^3\sum_{k=1}^{6}A_k$. Звідси, поділивши на α^3, отримаємо першу умову системи (5)

$$0=\sum_{k=1}^{6}A_k\tag{31}$$

та співвідношення

$$\sum_{k=1}^{6} F_k = 0 \text{ (другу умову системи (11)).} \tag{32}$$

Коефіцієнтну умову при $(z-z_0)^{-5}$ можна записати у вигляді

$$0 = \alpha^2 (6 + \sum_{k=1}^{6} a_k A_k) + \alpha^3 \sum_{k=1}^{6} A_k ' + \alpha^5 ((\sigma_1 - 6\beta) \sum_{k=1}^{6} F_k - \sum_{j=2}^{6} a_j F_j + a_1 \sum_{j=2}^{6} F_j) .$$

Сума $\sum_{k=1}^{6} A_k '$ при α^3 рівна нулеві, згідно співвідношення (31). Звідси, поділивши на α^2, отримуємо рівність $0 = 6 + \sum_{k=1}^{6} a_k A_k$, тобто другу умову системи (5). Конфіцієнт при α^5, згідно співвідношення (32), запишемо у вигляді $-\sum_{j=2}^{6} a_j F_j + a_1(-F_1)$, після прирівнювання його до нуля отримаємо третю умову системи (11).

Коефіцієнтна умова при $(z-z_0)^{-4}$ має вигляд

$$\begin{aligned} 0 = & -15\alpha^4 \beta^2 \sum_{i=1}^{6} F_i + \beta (a_1 \sum_{j=2}^{6} A_j - \sum_{j=2}^{6} a_j A_j - 6)\alpha + (\sigma_1 \sum_{i=1}^{6} F_i - \sum_{j=2}^{6} a_j F_j + a_1 \sum_{i=1}^{6} F_i)\alpha^4) + \\ & + \alpha (2\sum_{j=2}^{6} a_j - 4a_1 - a_1 \sum_{j=2}^{6} a_j A_j + \sum_{j=2}^{6} a_j{}^2 A_j) + (\sum_{i=1}^{6} (3a_i ' A_i - B_i) - 2D + \sum_{j=2}^{6} (a_j A_j ' + a_j ' A_j) - \\ & - a_1 ' \sum_{j=2}^{6} A_j - a_1 \sum_{j=2}^{6} A_j ')\alpha^2 + ((a_1 + \sigma_1) \sum_{j=2}^{6} a_j F_j - \sum_{j=2}^{6} a_j{}^2 F_j - \sigma_1 a_1 \sum_{j=2}^{6} F_j - \sigma_2 \sum_{i=1}^{6} F_i)\alpha^4 + \\ & + (\sum_{i=1}^{6} (a_1 ' - a_i ') F_i)\alpha^5 . \end{aligned} \tag{33}$$

Оскільки α, β довільні сталі, то коефіцієнти при α та β мають бути рівними нулеві. Прирівнюючи коефіцієнт при $\alpha^4 \beta^2$ до нуля, отримаємо другу умову системи (11). Прирівнявши коефіцієнт при $\alpha\ \beta$ до нуля і використовуючи першу умову системи (5), отримаємо другу умову цієї системи. Прирівнюючи коефіцієнт при $\alpha^4\ \beta$ до нуля і враховуючи співвідношення (33), отримаємо третю умову системи (11).

Далі, прирівнюючи до нуля коефіцієнт при α, отримаємо співвідношення

$$2\sum_{i=1}^{6} a_i + \sum_{i=1}^{6} a_i{}^2 A_i - a_1{}^2 A_1 - 6a_1 - a_1 \sum_{j=2}^{6} a_j A_j = 0 . \tag{34}$$

Оскільки вираз $-a_1{}^2 A_1 - 6a_1 - a_1 \sum_{j=2}^{6} a_j A_j$ в (34) рівний нулеві згідно другої умови системи (5), то рівність (34) можна записати у вигляді третього співідношення системи (5).

Прирівнюючи коефіцієнт при α^2 до нуля, отримаємо

$$-2D - \sum_{i=1}^{6} (B_i - 3a_i ' A_i) \ -a_1 ' \sum_{j=2}^{6} A_j + \sum_{j=2}^{6} a_j A_j ' - a_1 \sum_{j=2}^{6} A_j ' + \sum_{j=2}^{6} a_j ' A_j = 0 . \tag{35}$$

Враховуючи співівідношення (31), перепишемо рівність (35) у вигляді

$$2D + \sum_{i=1}^{6} (B_i - 3a_i ' A_i) \ -\sum_{i=1}^{6} a_i ' A_i - \sum_{j=2}^{6} a_j A_j ' + a_1(-A_1 ') = 0 . \tag{36}$$

Ураховуючи співвідношення $-\sum_{i=1}^{6} a_i ' A_i - \sum_{j=2}^{6} a_j A_j ' + a_1(-A_1 ') = -(\sum_{i=1}^{6} a_i A_i)'$, бачимо, що рівність (36) являє собою першу умову системи (11).

3. Інтегрування рівнянь Шазі зі сталими коефіцієнтами

Алгоритм інтегрування рівняння Шазі зі сталими (фіксованими) коефіцієнтами розглянемо на прикладі. Нехай в рівнянні (4) коефіцієнти $a_k \quad (k = \overline{1,6})$ мають вигляд

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = -2, \quad a_5 = \frac{1}{2}, \quad a_6 = -\frac{1}{2} . \tag{37}$$

В подальшому використовується метод, який викладено в [6]. Обчислимо значення симетричних поліномів

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -\frac{21}{4}, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_4 = \frac{21}{4}, \quad \sigma_5 = 0, \quad \sigma_6 = -1 \tag{38}$$

і підставимо (37), (38) у співвідношення (10) . В результаті отримаємо рівняння п'ятого ступеня вигляду

$$(4\alpha_2+7)^2(4\alpha_2^3+7\alpha_2^2-7\alpha_2-4)=0\,. \tag{39}$$

Корінь $\alpha_2=-7/4$ відразу виключимо з розгляду, оскільки він перетворює знаменники правих частин рівнянь (8) та (9) в нуль. Коренями другого множника лівої частини рівняння (39) є $\alpha_2=1$, $\alpha_2=\frac{\sqrt{57}-11}{8}$, $\alpha_2=\frac{-\sqrt{57}-11}{8}$. Для спрощення обчислень розглянемо корінь

$$\alpha_2=1\,. \tag{40}$$

Підставивши значення (38), (40) у співвідношення (7)-(9), знайдемо коефіцієнти

$$A_1=-1,\quad A_2=1,\quad A_3=-\frac{13}{20},\quad A_4=\frac{13}{20},\quad A_5=-\frac{7}{5},\quad A_6=\frac{7}{5}\,. \tag{41}$$

Після цього підставимо значення коефіцієнтів (37), (41) в систему (12) і отримаємо значення функцій $B_k\ \ (k=\overline{1,6})$:

$$B_1=\frac{81}{80}B_5-\frac{1}{80}B_6,\ \ B_2=\frac{81}{80}B_6-\frac{1}{80}B_5,\ \ B_3=B_5,\quad B_4=B_6\,, \tag{42}$$

де $B_5,\ B_6$ – довільні аналітичні функції.

Підставимо значення коефіцієнтів (37), (41), (42) у перше рівняння системи (11) і з отриманого рівняння знайдемо функцію *D*:

$$D=-\frac{2}{3}(B_5+B_6)\,. \tag{43}$$

Підставимо значення коефіцієнтів (37), (41), (42), (43) в систему (13) і знайдемо з перших чотирьох рівнянь отриманої системи функції $C_k\ \ (k=\overline{1,4})$, потім підставимо ці функції в п'яте і шосте рівняння цієї системи. Останні рівняння після деяких перетворень утворять систему

$$B_5B_6+B_5{}'=B_6{}^2+B_6{}',\quad B_5B_6+B_6{}'=B_5{}^2+B_5{}',$$

яка має розв'язок

$$B_5=B_6\,. \tag{44}$$

Враховуючи співвідношення (44), функції $C_k\ \ (k=\overline{1,4})$ можна зобразити таким чином

$$\begin{gathered}
C_1=\frac{1}{28}\left(3E+6B_6{}^2+45C_5+25C_6+3B_6{}'\right),\\
C_2=\frac{1}{28}\left(-3E-6B_6{}^2+25C_5+45C_6-3B_6{}'\right),\\
C_3=\frac{1}{112}\left(75E+150B_6{}^2+250C_5+198C_6+75B_6{}'\right),\\
C_4=\frac{1}{112}\left(-75E-150B_6{}^2+198C_5+250C_6-75B_6{}'\right),
\end{gathered} \tag{45}$$

де $C_5,\ C_6$ – довільні аналітичні функції.

Підставимо значення коефіцієнтів (37), (41) – (45) в систему (14) і знайдемо з отриманої системи функції $F_k\ \ (k=\overline{1,4})$, після чого підставимо їх значення зі значеннями коефіцієнтів (37), (41) – (45) в три останні рівняння системи (11), які в результаті цих перетворень набудуть вигляду

$$5E'+2B_6(5E+10B_6^2-58C_5+58C_6+15B_6{}')+58C_6{}'+5B_6{}''=58C_5{}'\,,\ \ 2B_6(C_5+C_6)+C_5{}'+C_6{}'=0\,,$$

$$5E'+2B_6(5E+10B_6^2-2C_5+2C_6+15B_6{}')+2C_6{}'+5B_6{}''=2C_5{}'\,.$$

Розв'язок останньої системи має вигляд

$$E'=-(2EB_6+4B_6{}^3+6B_6B_6{}'+B_6{}''),\quad C_5{}'=-2B_6C_5,\quad C_6{}'=-2B_6C_6\,. \tag{46}$$

Знову підставимо значеня коефіцієнтів (37), (41)--(46) в систему (14) і розв'яжемо її стосовно функцій $F_k\ \ (k=\overline{1,6})$:

$$F_k=0\ \ (k=\overline{1,6})\,. \tag{47}$$

Таким чином, при заданих сталих коефіцієнтах $a_k\ \ (k=\overline{1,6})$ вигляду (37), у випадку кореня $\alpha_2=1$ ми отримуємо такі значення коефіцієнтів рівняння (4): $A_k\ \ (k=\overline{1,6})$ мають вигляд (41); $B_j=B_6\ \ (j=\overline{1,5})$, $C_k\ \ (k=\overline{1,6})$ мають вигляд (45); $F_k\ \ (k=\overline{1,6})$ мають вигляд (47); $D=-\frac{4}{3}B_6$; виконується також співвідношення (46) і B_6 – довільна аналітична функція .

Розглянемо випадок, коли функція $B_6=0$. Тоді функції $E\equiv\alpha$, $C_5\equiv\beta$, $C_6\equiv\gamma$ – сталі. У цьому випадку рівняння (4) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
w'''=&\left(\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w+1}+\frac{1}{w-2}+\frac{1}{w+2}+\frac{1}{w-1/2}+\frac{1}{w+1/2}+\right)w'w''+\\
+&\left(\frac{1}{w+1}-\frac{1}{w-1}+\frac{13}{20(w+2)}-\frac{13}{20(w-2)}+\frac{7}{5(w+1/2)}-\frac{7}{5(w-1/2)}\right)w'^3+\\
+&\left(\frac{25\beta-3\alpha+45\gamma}{28(w+1)}+\frac{25\gamma+3\alpha+45\beta}{28(w-1)}+\frac{198\beta-75\alpha+250\gamma}{112(w+2)}+\frac{198\gamma+75\alpha+250\beta}{112(w-2)}+\alpha\right)w'+\left(\frac{\beta}{w-1/2}+\frac{\gamma}{w+1/2}\right)w'.
\end{aligned} \tag{48}$$

Рівняння (48) є автономним диференціальним рівнянням, порядок якого можна понизити на одиницю за допомогою стандартної заміни

$$w' = p(w), \quad w'' = p(w)p'(w), \quad w''' = p(w)(p'^2(w) + p(w)p''(w)) .$$

Отримане рівняння можна проінтегрувати:

$$p = \pm\frac{1}{2\sqrt{7}}(f(w))^{1/2}, \tag{49}$$

де

$$\begin{gathered} f(w) = (3+28w^2)\alpha + 10(\beta(1+7w)+\gamma(7w-1)) + 28w(1+w^2)C_2 + \\ +\frac{56\sqrt{2w^2-5w+2}\ \sqrt{2w^4+5w^3-5w-2}+(4w^4+33w^2+4)C_1}{\sqrt{2w^6-21w^4+21w^2-4}}, \end{gathered} \tag{50}$$

C_1, C_2 – довільні сталі.

Рівняння (49), (50) легко інтегрується як неповне рівняння (відсутня зміна *z*).

Для того, щоб побудувати наближений розв'язок і його графік для конкретних значень параметрів α, β, γ, довільних сталих C_1, C_2 і початкової умови $w(z_0) = w_0$, можна використати сучасні системи символьних обчислень, зокрема, систему *Mathematica* [10]. Зокрема, для набору значень $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$, $C_1 = 1, C_2 = 2$ та початкової умови $w(0) = 0$ за допомогою функцій NDSolve та Plot [7, 10] визначимо шуканий частинний розв'язок і побудуємо його графік в околі нуля (див. рис.1).

Зауважимо, що диференціальне рівняння (48) має розв'язок в елементарних функціях. Дійсно, нехай $C_1 = 0, \beta = -\frac{4C_2 + 3\alpha}{20}, \gamma = \frac{3\alpha - 4C_2}{20}$. Тоді для цих значень рівняння (49), (50) має вигляд $w' + 4\sqrt{C_2 w + \alpha} = 0$, а його загальний розв'язок записується за допомогою формули

$$w = \frac{\alpha}{C_2}\left(\tanh^2\left(\frac{\sqrt{\alpha}(z - C_3)}{2}\right) - 1\right). \tag{51}$$

На рис.2 подано графік отриманого розв'язку в дійсній площині для значень параметрів $\alpha = 1, C_2 = 1, C_3 = 2$.

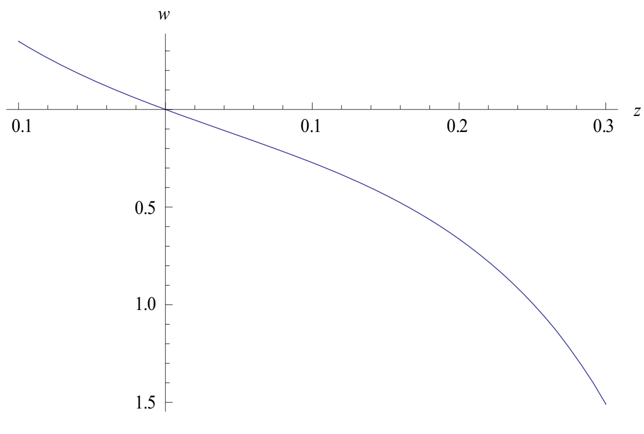

Рис.1. Графік частинного розв'язку при $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$, $C_1 = 1, C_2 = 2$, $w(0) = 0$

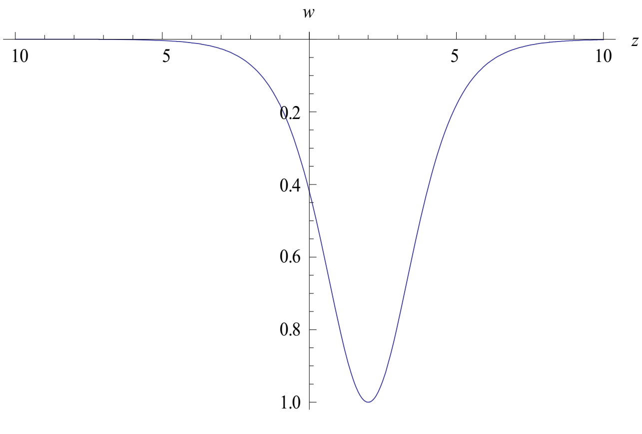

Рис. 2. Графік частинного розв'язку при $\alpha = 1, \beta = -7/20, \gamma = -1/20$, $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 2$

4. Висновки

Дано детальне виведення 22 умов для системи Шазі, які виникають при розв'язанні задачі про належність рівняння Шазі з шістьма особливими точками до рівнянь Пенлеве типу та представлено метод побудови рівняння Шазі з шістьма особливими точками, коефіцієнти якого задовольняють систему Шазі.

1. *Добровольский В.А.* Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. – К., 1974. 2. *Лукашевич Н.А.* К теории уравнения Шази // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т.29, № 2. – С. 353-357. 3. *Мартынов И.П., Чичурин А.В.* Использование системы *Mathematica* при решении системы уравнений Шази // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: Тезисы докладов межд. конф., Минск, 2007.– Минск, ИМ НАНБ, 2007. – С. 89 – 91. 4. *Мартынов И.П., Чичурин А.В.* О решении системы уравнений Шази // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12. № 1. – С.92 – 98. 5. *Мартынов И.П.* О некоторых задачах аналитической теории дифференциальных уравнений, решаемых в Гродненском государственном университете // Веснік Гродненского дзяржаунага універсітэта. – 2003, сер. 2, № 2(22), с. 15-25. 6. *Чичурин А.В.* Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса. – М., 2003. 7. *Прокопеня А.Н., Чичурин А.В.* Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. – Мн.: БГУ, 1999. 8. *Chazy J.* Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes // Acta Math. – 1911. – Vol. 34. – P. 317-385. 9. *Painleve P.* Lecons sur les theorie analytique des equations differentielles. Professies a Stokholm. – Paris, 1897. 10. *Wolfram S.* The Mathematica Book. – 4-th ed. – Wolfram Media/ Cambridge University Press, 1999.

Надійшла до редколегії 25.02.10