Волинський національний університет імені Лесі Українки

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Методичний посібник для студентів математичного факультету

Ч. І

Луцьк 2009

ББК 22. 17
УДК 519.21

Теорія ймовірностей. Методичний посібник для студентів спеціальностей «математика і інформатика». – Луцьк.: 2009 – 45 с.

Укладач: Сорока Л.І.
Рецензенти: Мамчич Т.І., кандидат фіз. мат. наук, доцент
Миронюк П.Й. , кандидат фіз.мат. наук, доцент

Посібник містить теоретичний матеріал, розв'язки задач і дидактичний матеріал для індивідуальних робіт з теорії ймовірностей. Посібник розрахований для студентів математичних спеціальностей денної і заочної форм навчання, але може бути використаний і для студентів інших спеціальностей.

Передмова

У методичному посібнику викладено в стислій формі теоретичний матеріал по випадкових подіях. Подано основні поняття, теореми, а також деякі висновки, зауваження, потрібні для розв'язування задач.

Кожна тема ілюструється прикладами розв'язання типових задач. Досвід показує, що основною причиною труднощів для студентів при виконанні практичних завдань є слабкі навики аналізу різних ситуацій та їх ймовірнісного моделювання. Саме тому велику увагу приділяємо алгоритмізації розв'язування задач.

Запропонована велика кількість завдань для самостійного розв'язування може бути використана викладачами для проміжного і підсумкового контролю знань студентів.

ГЛАВА I .ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ЇХ ЙМОВІРНОСТІ

1.1 СТОХАСТИЧНИЙ ЕКСПЕРЕМЕНТ.ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Основними поняттями теорії ймовірності є стохастичний експеремент, випадкова подія, ймовірність випадкової події.

Експеремент називається **стохастичним**, якщо:

1) результат експеременту не можна заздалегідь передбачити;
2) експеремент можна повторити будь-яку кількість разів за одних і тих же умов.

З кожним стохастичним експериментом можна пов'язати множину Ω усіх можливих найпростіших його результатів (які не розкладаються на простіші). Множину Ω називають **простором елементарних подій** , а її елементи-**елементарними подіями**; елементи Ω позначають ω (можливо з індексами).

Наведемо кілька прикладів.

Приклад 1.1. Підкидають дві монети і реєструються сторони, якими лягли монети.

$$\Omega=\{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}.$$

Приклад 1.2. Підкидається монета доти, доки не випаде герб.

$$\Omega=\{Г, ЦГ, ЦЦГ,\dots\}.$$

Приклад1.3. Стержень завдовжки l навмання розламують на дві частини.

$$\Omega=\{x\colon 0<x<l\}.$$

Простір елементарних подій може бути:

1) скінченним;
2) нескінченним, але зліченним;
3) незліченним.

У стохастичному експеременті можна розгядати ті чи інші події, їх називають **випадковими** і позначають A, B, C,… Кожну випадкову подію можна описати деякою підмножиною простору елементарних подій Ω.

У прикладі 1.1. подія ″монети випали різними сторонами″ опишеться підмножиною {ГЦ, ЦГ}. У прикладі 2 подія ″ експеремент закінчиться до 3 підкидання″ опишеться підмножиною {Г, ЦГ}.

Подія, яка відбувається при кожній реалізації стохастичного експеременту, називається **достовірною** й описується множиною Ω. Подія, яка не відбувається при жодній реалізації експеременту вона називається **неможливою** й описується множиною $\varnothing$.

Нехай A і B випадкові події стохастичного експеременту, які описуються відповідно підмножинами A і B простору елементарних подій Ω.

Подія, яка підлягає в тому, що відбувається принаймні одна з подій A або B, називається **сумою A і B** і позначається $\mathbf{A\cup B}$.

Подія, яка підлягає в тому, що відбувається як подія A, так і подія B, називається **добутком A і B** і позначається $\mathbf{A\cap B}$.

Якщо $A\cap B=\varnothing$, то вони називаються **несумісними.**

Подія, яка підлягає в тому, що подія A відбувається, а подія B не відбувається, називається **різницею** подій A і B та позначається **A\B**.

Подія, яка підлягає в тому, що A не відбувається, називається **протилежною** до події A і позначається $\overline{A}$.

Дії на подіями мають ті самі властивості, що й відповідні дії над множинами.

1.2 КЛАСИЧНА МОДЕНЬ ЙМОВІРНОСТІ

Класичною моделлю або **класичною схемою** будемо називати стохастичні експеременти, для яких виконуються дві умови:

1) простір елементарних подій скінченний;
2) всі елементи події рівноможливі.

У класичній моделі для довільної елементарної події ω_i є Ω значення

$$P(\omega_i)=\frac{1}{n(\Omega)},\ i=1, 2,\ldots,n(\Omega). \qquad (1.1)$$

Ймовірність довільної події А ($A\subset\Omega$) називається число

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}. \qquad (1.2)$$

Формула (1.2) називається **класичним означенням ймовірності.**

<u>Приклад1.4.</u> В прикладі 1.1 знайти ймовірність того, що моменти випадуть різними сторонами.

Позначимо шукану подію А, А={ГЦ, ЦГ}. Потужності простору Ω і події А дорівнюють: $n(\Omega)=4$, $n(\Omega)=2$. Тоді за класичним означенням (1.2)

$$P(A)=\frac{2}{4}=0{,}5.$$

<u>Приклад 1.5.</u> З урни, в якій міститься п'ять куль, серед яких дві чорні й три білі, навмання взято дві кулі. Визначити ймовірність, що серед взятих куль принаймні одна буде білою.

1) Занумеруємо кулі цифрами від 1 до 5, причому чорні кулі будуть під номерами 4 і 5.

Тоді $\Omega=$ {(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)}, $n(\Omega)=10$.

Подія А={(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)}, n(A)=9.

Маємо:

$$P(A)=\frac{9}{10}=0{,}9.$$

2) Кількість елментарних подій – це число комбінацій $C_5^2=10,$ тобто $n(\Omega)=10$.

Потужніть події А дорівнює $C_3^1\cdot C_2^1+C_3^2\cdot C_2^0=3\cdot2+3=9$.

Звідси:

$$P(A)=\frac{9}{10}=0{,}9.$$

Розглянемо протилежну подію $\overline{A}$, яка полягає в тому, що обидві кулі чорні. Потужність $\overline{A}$ дорівнює $C_2^2\cdot C_3^0=1$. Тому $P(\overline{A})=\frac{1}{10}=0{,}1,$ а $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}1=0{,}9$.

1.3 ГЕОМЕТРИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

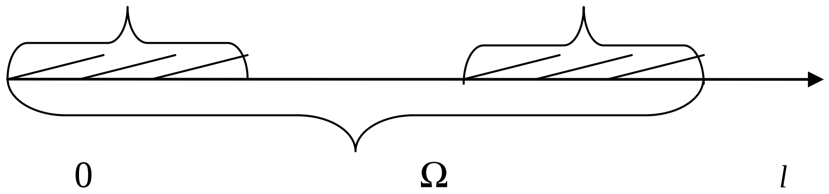
Нехай стохастичний експеремент полягає в киданні навмання точки в множину Ω з R^n, де Ω - обмежена область, яка має міру Лебега. Треба обчислити ймовірність того, що точка потрапить до $A\subset\Omega$, яка також має міру Лебега (довжина в R^1, площа в R^2, об'эм в R^3). Тоді ймовірність події А визначається за формулою

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)} \qquad (1.3)$$

Якщо ймовірність визначається за формулою (1.3), то її називають **геометричною ймовірністю.**

Приклад 1.6. В прикладі 1.3. визначити ймовірність того, що довжина меншої частини не перевищує $\frac{l}{3}$.

Маємо: Ω={ $x: 0 \prec x \prec l$ }, A= { $x: 0 \prec x \prec \frac{l}{3}$, або $\frac{2l}{3} \le l - x \prec l$ }.



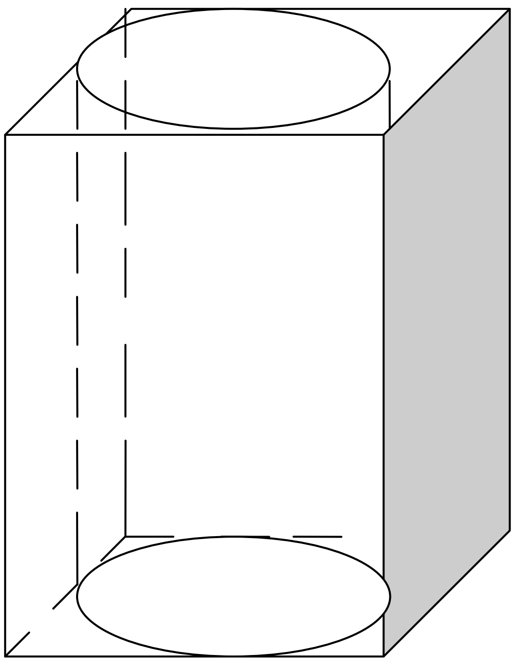
За міру візьмемо довжину . Маємо : L(Ω)=l, L(A)=$\frac{l}{3} + \frac{l}{3} = \frac{2l}{3}$.

За означенням (1.3) $P(A) = \frac{2l}{3} \Big/ l = \frac{2}{3}$.

Приклад 1.7. Точку навмання кидають в правильну чотирикутну призму. Яка ймовірність, що точка попаде у вписаний в призму циліндр?

Позначимо сторону основи призми а, довжину бічного ребра – h. Тоді $L(\Omega) = V_{пр} = a^2 \cdot h, \quad L(A) = V_{цил} = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot h.$

Шукана ймовірність $P(A) = \frac{V_{цил}}{V_{пр}} = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot h}{a^2 \cdot h} = \frac{\pi}{4}.$



а

1.4 ЙМОВІРНІСТЬ У ДИСКРЕТНИХ ПРОСТОРАХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОДІЙ

Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ... \}$ дискретний (множина Ω скінченна або зліченна). Кожній елементарній події ω_k поставимо у відповідність число p_k (ймовірність елементарної події ω_k) так, що:

1) $p_k \geq 0$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$

Ймовірністю випадкової події А $(A \subset \Omega)$ називають число

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k \tag{1.4}$$

В класичній моделі кожна елементарна подія має одну й ту саму ймовірність $p_r = \frac{1}{n}, k = \overline{1,n},$ де $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n \}$. Отже, класичне означення ймовірності є окремим випадком означення ймовірності в дискретних просторах елементарних подій.

Приклад 1.7 Підкидають один раз гральний кубик,маса якого розподілена таким чином, що ймовірність появи певної грані пропорційна її номеру. Визначити ймовірність появи числа очок, яке ділиться на 3.

Простір елементарних подій $\Omega\{ \omega_1, \omega_2, ..., \omega_6 \}$, де $\omega_к$ відповідає появі к очок. За умовою задачі $p_k = \lambda k$, де $\lambda > 0$- коефіцієнт пропорційності. Оскільки $p_1 + p_2 + ... + p_6 = 1,$ то $\lambda \cdot$(1+2+…+6)=1. Звідси $\lambda = \frac{1}{21}.$ Отже, $\lambda = \frac{к}{21}$. Шукана подія А=$\{ \omega_3, \omega_6 \}$. За формулою (1.4)

$$P(A) = p_3 + p_6 = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = \frac{3}{7}.$$

Приклад 1.8 Для прикладу 1.3 визначити ймовірність події, шо в експеременті буде зроблено не більше ніж три підкидання.

Простір елементарних подій $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, ..., \omega_к, ... \}$, де $\omega_к = \underbrace{ЦЦ...ЦГ}_{к-1}$ - дуде зроблено к підкидань, к=1,2,…

Покладемо $p_к = \frac{1}{2^к}$: 1) $p_к > 0$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2}{1 - 1/2}$=1.

За означенням (1.4) ймовірність події А=$\{ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \}$ дорівнює:

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}.$$

ГЛАВА II. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ

2.1ВЛАСТИВОСТІ ЙМОВІРНОСТІ

Нехай Ω- простір елементарних подій деякого стохастичного експеременту з σ-алгеброю випадкових подій F (F готичне). Вважатимемо, що на σ-алгебрі випадкових подій F задано ймовірність P(·), якщо кожній випадковій події A$\in \mathsf{F}$ поставлено у відповідніть число P(A) так, що виконуються умови:

1) P(A)≥0;
2) P(Ω)=1;
3) Якщо A_n, n=1,2,…- послідовність попарно-несумісних подій ($A_i \cap A_j = \varnothing$), то

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Число P(A) називається **ймовірністю випадкової події A**, а умови 1 - 4 – **аксіомами ймовірності**.

Отже, P(A) можна розглядати як числову функцію, визначену на σ-алгебрі F випадкових подій. Ця функція має такі властивості:

1) 0≤P(A)≤1 для довільної випадкової події A.
2) P(Ω)=1 для вірогідної події Ω.
3) P(Ø)=0 для неможливої події Ø.
4) P($\overline{A}$)=1-P(A) для протилежної події $\overline{A}$ до випадкової події A.
5) P(A$\cap$B)=P(A)+P(B), якщо випадкові події A і B несумісні (A$\cap$B=Ø).
6) P(B\A)=P(B)-P(A), якщо A$\subset$B.
7) P(A)≤P(B), якщо A$\subset$B.
8) P(A$\cup$B)=P(A)+P(B)-P(A$\cap$B) для довільних випадкових подій A і B.
9) P($\bigcup_{i=1}^{n} A_i$)=$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, якщо випадкові події A_1, A_2,…,A_n попарно несумісні ($A_i \cap A_j = \varnothing$,i$\neq$j).
10)
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i\prec j\le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i\prec j\prec k\le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots +$$
$$+(-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

Властивість (8) називається **теоремою додавання**.

2.2 УМОВНІ ЙМОВІРНОСТІ. НЕЗАЛЕЖНІ ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Означення 2.1. ***Умовною ймовірністю*** *події B при умові, що подія A відбулася називається*

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}, \qquad (2.1)$$

де P(A)>0.

Умовна ймовірність має такі властивості:

1) $0 \le P(B/A) \le 1$.
2) $P(\Omega/A)=1$, $P(A/A)=1$, $P(\varnothing/A)=0$.

3) Якщо $B\cap C=\varnothing$, то $P(B\cup C/A)=P(B/A)+P(C/A)$.

4) $P(\overline{B}/A)=1-P(B/A)$.

Теорема2.1.(Теорема множення ймовірностей)
Якщо $P(A)>0$, $P(B)>0$, то $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$. (2.2)

Формулу (2.2) можна узагальнити для довільного скінченного числа випадкових подій:

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot(A_n/A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}). \quad (2.3)$$

<u>Приклад 2.1</u>. З урни, в якій міститься 10 куль, серед яких 4 білих і 6 чорних виймають 3 кулі. Яка ймовірність, що всі вони чорні?

Нехай подія A_i полягає в тому, що і-та вийнята куля чорна, і=1,2,3. Потрібно знайти $P(A_1\cap A_2\cap A_3)$ для цього скористаємося формулою (2.3).

Отже,

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cap A_2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{6}.$$

Означення 2.2. *Випадкові події A і B називається* ***незалежними****, якщо*

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B). \quad (2.4)$$

Мають місце такі важливі теореми про незалежність випадкових подій.

Теорема2.2. Нехай $P(A)>0$. Події A і B незалежні тоді і тільки тоді, коли $P(B/A)=P(B)$. (поява події A не впливає на ймовірність події B).

Теорема2.3. Якщо випадкові події A і B незалежні, то A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і B, $\overline{A}$ і $\overline{B}$ також незалежні.

Означення 2.3. *Події* A_1, A_2,..., A_n *називаються* ***незалежними в сукупності****, якщо для довільного к=2,3,…,n і довільного набору індексів* $1\le i_1<i_2<\ldots<i_к\le n$

$$P(A_{i1}\cap A_{i2}\cap\ldots\cap A_{iк})=P(A_{i1})\cdot P(A_{i2})\cdot\ldots\cdot P(A_{iк}). \quad (2.5)$$

Означення 2.4. *Події* A_1, A_2,..., A_n *називаються* ***незалежними****, якщо для будь-яких двох різних індексів s і k* $P(A_s\cap A_k)=P(A_s)\cdot P(A_k)$.

Із незалежності в сукупності випливає попарна незалежність подій A_1, A_2,..., A_n . Але з попарної незалежності, взагалі кажучи, не випливає незалежність в сукупності.

2.3 ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛИ БАЙЄСА.

Означення 2.5. *Випадкові події* H_1, H_2,…,H_n *утворюють* ***повну групу подій,*** *якщо:*

1) *ці події попарно несумісні, тобто* $H_i\cap H_j=\varnothing$ *при* $i\ne j$;

2) $\bigcup_{i=1}^{n}H_i=\Omega$.

Теорема2.4. Якщо H_1, H_2,…,H_n - повна група подій і $P(H_i)>0$, i=1,2,3,…,n, то для будь-якої випадкової події A

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i). \quad (2.6)$$

Формула (2.6) називається **формулою повної ймовірності**.

Теорема2.5. Нехай випадкові події H_1, $H_2,\dots,H_n$ утворюють повну групу подій і $P(H_i)>0$, $i=1,2,3,\dots,n$. Тоді для довільної події A, $P(A)>0$,

$$P(H_к/A)=\frac{P(H_к)\cdot P(A/H_к)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)}, \qquad (2.7)$$

$к=1,2,3,\dots,n$.

Формули (2.7) називають **формулами Байєса**.

<u>Приклад 2.2.</u> Є 3 урни: у першій знаходиться 5 білих і 10 чорних куль, у другій 10 білих і 5 чорних, у третій – 7 білих і 8 чорних. Навмання вибирають одну з урн із неї без повертання дві кулі. Обидві виявились білими. Знайти ймовірність, що вибір був зроблений з першої, з другої або третьої урни.

Нехай подія A – «взяли дві білі кулі», H_i – «вибрали і-ту урну», $i=1,2,3$.

Очевидно ймовірності гіпотез однакові:

$P(H_i)=\frac{1}{3}$, $i=1,2,3$,.

Знайдемо умовні ймовірності(за теоремою множення 2.1)

$$P(A/H_1)=\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}=\frac{20}{210};$$

$$P(A/H_2)=\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}=\frac{90}{210};$$

$$P(A/H_3)=\frac{7}{15}\cdot\frac{6}{14}=\frac{42}{210}.$$

За формулами Байєса:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{210}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{210}+\frac{1}{3}\cdot\frac{90}{210}+\frac{1}{3}\cdot\frac{42}{210}}=\frac{20}{20+90+42}=\frac{20}{152}\approx 0{,}13.$$

Аналогічно $P(H_2/A)=\frac{90}{152}\approx 0{,}59$, $P(H_3/A)=\frac{42}{152}\approx 0{,}28$.

ГЛАВА III. ПОВТОРНІ ВИПРОБОВУВАННЯ

3.1 СХЕМА БЕРНУЛЛІ

Повторні незалежні випробовування стохастичного експерименту називають **схемою Бернуллі,**якщо при кожному випробовуванні можливі лише два результати: подія А (успіх) або $\overline{A}$ (невдача) і ймовірність появи події А в кожному випробовуванні незмінна і дорівнює р (0<p<1).

Наприклад: стрільба по цілі (влучення або промах), підкидання монети (герб чи цифра), підкидання грального кубика (випало 6 очок або не випало 6 очок), перевірка деталі на придатність (стандартна або бракована).

Позначимо Р(А)=р – ймовірність успіху, а Р($\overline{A}$)=q – ймовірність невдачі.

Теорема 3.1 Нехай $P_n(m)$- ймовірність того, що в схемі Бернуллі при n випробуваннях m раз відбулася подія А. Тоді

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{3.1}$$

де m=0,1,2,…,n; q=1–p.

Формулу (3.1) називають **формулою Бернуллі**, а ймовірності $P_n(m)$ (m=0,1,2,…,n) називають **біноміальними ймовірностями,** сума всіх біноміальних ймовірностей дорівнює 1, оскільки за біномом Ньютона

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Нехай $P_n(m_1 \le m \le m_2)$- це ймовірність того, що в n випробуваннях Бернуллі числа успіхів не менше ніж m_1, але не більше ніж m_2 ($0 \le m_1 \le m_2 \le n$). Тоді

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{3.2}$$

Ймовірність того, що в результаті n випробувань хоча б один раз буде успіх обчислюється за формулою

$$P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n. \tag{3.3}$$

Якщо розглядати $P_n(m)$ як функцію від m, то $P_n(m)$ при фіксованому n спочатку зростає зі збільшенням m від 0 до деякого m_0, а потім спадає зі збільшенням m від m_0 до n. Число m_0 називається **найімовірнішим числом появи події А.** Число m_0 визначають з нерівності

$$np - q \le m_0 \le np + p, \tag{3.4}$$

що має один або два цілі розв'язки.

Приклад 3.1 Ймовірність виготовлення якісної деталі на автоматичному верстаті рівна 0,8. Знайти найімовірніше число бракованих деталей серед 5 відібраних та обчислити ймовірність цього числа.

Ймовірність виговлення бракованої деталі р= 1–0,8=0,2. Тоді q=0,8.

Знайдемо найімовірніше число бракованих деталей серед 5 відібраних (n=5; р=0,2; q=0,8) за формулою (3.4)

$$5 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 \le m_0 \le 5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2;$$

$$0{,}2 \le m_0 \le 1{,}2.$$

Єдиний цілий розв'язок цієї нерівності m_0=1.

Знайдемо $P_5(m_0) = P_5(1)$ за формулою (3.1):

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{5-1} = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096.$$

3.2 ПОЛІНОМІАЛЬНА ТЕОРЕМА

Повторні незалежні випробування називають **поліноміальною схемою**, яущо при кожному випробуванні можливі більш ніж два результати.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких може відбутися одна і тільки одна з k несумісних подій $A_1, A_2, ..., A_k$ відповідно з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_k, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$

Теорема 3.2 Нехай $P_n(m_1, m_2, ..., m_k)$ - ймовірність того, що в поліноміальній схемі при n випробуваннях подія A_1 відбулася m_1 раз, подія A_2 відбулася m_2 рази, … , подія A_k - m_k раз. Тоді

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdot ... \cdot m_k!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}, \qquad (3.5)$$

де $m_1 + m_2 + ... + m_k = n.$

Формулу (3.5) називають **поліноміальною формулою**, оскільки ймовірності (3.5) є коефіцієнтами при $x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_k^{m_k}$ в розкладі полінома $(p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_k x_k)$ за степенями.

Формула (3.1) є частинним випадком формули (3.5) при k=2 і $m_1 = m, m_2 = n - m, p_1 = p, p_2 = 1 - p_1 = q.$

<u>**Приклад 3.2**</u> В урні є 5 білих, 4 червоні і 3 зелені кулі. Виймають з наступним поверненням в урну 7 раз по одній кулі. Яка ймовірність вийняти при цьому 3 білих, 4 червоні і одну зелену кулю?

Позначимо: подія A_1 - “ вийняти білу кулю ”, A_2 - “ вийняти червону кулю ”, A_3 - “ вийняти зелену кулю ”. Оскільки кожну вийняту кулю повертають назад до урни, то ймовірності подій A_1, A_2, A_3 сталі, причому $P(A_1) = \frac{5}{12}, P(A_2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, P(A_3) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$

Треба знайти ймовірність, що подія A_1 з'явиться 3 рази, A_2 - 4 рази і A_3 - 1 раз. За формулою (3.5)

$$P_8(3,4,1) = \frac{8!}{3! \cdot 4! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \approx 0{,}0625.$$

3.3 ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ В СХЕМІ БЕРНУЛЛІ

<u>*3.1.1 Теорема Пуассона*</u>

Теорема 3.3(Пуассона) *Якщо* $n \to \infty, p \to 0$ *так, що* $np \to \lambda (\lambda > 0)$ *то*

$$\lim_{n \to \infty} C_n^m p^n q^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

де m=0,1,2,… - фіксоване.

Практично теорема Пуассона застосовується для обчислення біноміальних ймовірностей $P_n(m)$ у вигляді наближеної рівності

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = P_m(\lambda), \lambda = n \cdot p. \qquad (3.6)$$

У таблиці 2 додатків наведені значення функції $P_m(\lambda)$.

Формула (3.6) застосовується для наближених обчислень, якщо р мале (p<0,1), а n велике (n≥100) і npq<9.

При тих самих припущеннях і невеликій кількості доданків у сумі $\sum_{m=m_1}^{m_2} P(m)$ можна користуватись формулою:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx e^{-\lambda} \cdot \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!}. \tag{3.7}$$

<u>**Приклад 3.3**</u> Ймовірність виготовлення бракованої деталі на верстаті дорівнює 0,03. Визначити ймовірність того, що з 200 виготовлених цим верстатом деталей 4 будуть нестандартними.

За умовою n=200, p=0,03, npq=5,82. Ці числа задовільняють зазначені вище вимоги, тому за формулою (3.7)

$$P_{200}(4) \approx \frac{6^4}{4!} e^{-6} \approx 0{,}13385.$$

<u>3.1.2 Локальна гранична теорема Муавра-Лапласса</u>

Локальна теорема 3.4 (Муавра-Лапласса) Нехай $P_n(m)$ - ймовірність m успіхів в n незалежних випробуваннях, p(0<p<1)-ймовірність успіху, $x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}, q = 1-p.$ Для кожного m, що задовольняє умову $|x_m| \le c,$ (c-константа),

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{npq} P_n(m) / \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_m^2/2} = 1.$$

Практично локальна теорема застосовується у вигляді найближеної рівності

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{3.8}$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Функція $\varphi(x)$ називають **функцією Гаусса.** Для функції Гаусса побудованого таблицю значень від 0 до 4 (див. таблицю 1 додатків), при x>4 значення $\varphi(x)$ покладають рівним 0 (функція швидко спадає). Функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Формула (3.8) дає добрі наближення при досить великих n (не менше кількох десятків), крім того p не повинно бути близьке до 0 чи 1, а npq≥9.

<u>**Приклад 3.4** </u>Визначити ймовірність того, що з 400 виробів , виготовлених на фабриці, 70-вищого сорту. Відомо, що ймовірність того, що кожен виріб вищого сорту, дорівнює 0,2.

За умовою n=400, m=70, p=0,2, q=0,8. $P_{400}(70)$ застосуємо формулу (3.8) :

$$P_{400}(70) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi\left(\frac{70-80}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) \approx \frac{1}{8}\varphi(-1{,}25) \approx \frac{1}{8} \cdot 0{,}18265 \approx 0{,}2283.$$

<u>3.3.3 Інтегральна гранична теорема Муавра-Лапласа</u>

Нехай m – число успіхів у n випробуваннях Бернуллі, p (0<p<1) – ймовірність успіху. Тоді для довільних a та b (a<b)

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

На практиці інтегральна теорема Муавра-Лапласа використовується у вигляді наближеної рівності:

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (3.9)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$

Функцію Φ(x) називають **функцією Лапласа.** Для Φ(x) побудовано таблицю значень від 0 до 5, (див. таблицю 3 додатків), при x>5 значення Φ(x) покладають рівним 0,5. Функція Φ(x) зростає на R, неперна і $\lim_{n\to\infty}\Phi(x) = 0{,}5,$ $\lim_{n\to\infty}\Phi(x) = -0{,}5.$

Формула (3.9) дає хороші наближення, коли n велике, npq≥9.

Приклад 3.5 Для прикладу 3.4 визначити ймовірність того, що виробів вищого сорту буде від 60 до 90.

За формулою (3.9)

$$P_{200}(60 \le m \le 90) \approx \Phi\left(\frac{90-80}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\right) - \Phi\left(\frac{60-90}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\right) = \Phi\left(\frac{10}{8}\right) - \Phi\left(\frac{-20}{8}\right) = \Phi(1{,}25) - \Phi(2{,}50) \approx$$
$$\approx 0{,}39435 + 0{,}49379 = 0{,}88814.$$

Нехай маємо n незалежних випробувань Бернуллі з ймовірністю успіху $p \in (0;1)$. Тоді з формули (3.9) випливає для ε >0

$$P_n\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (3.10)$$

Ймовірність (3.10) характеризує частку випробувань, у яких відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності p не перевищує заданої похибки ε.

Приклад 3.6 Для прикладу 3.4 оцінити ймовірність того, що відносна частота виробів вищого сорту відрізняється від відповідної ймовірності не більше, ніж на 0,05?

За умовою n=400, p=0,2, q=0,8, $\varepsilon = 0{,}05.$

За формулою (3.10)

$$P\left\{\left|\frac{m}{400} - 0{,}2\right| \le 0{,}05\right\} \approx 2\Phi\left(0{,}05\cdot\sqrt{\frac{400}{0{,}2\cdot 0{,}8}}\right) = 2\Phi(2{,}5) \approx 2\cdot 0{,}49379 = 0{,}98758.$$

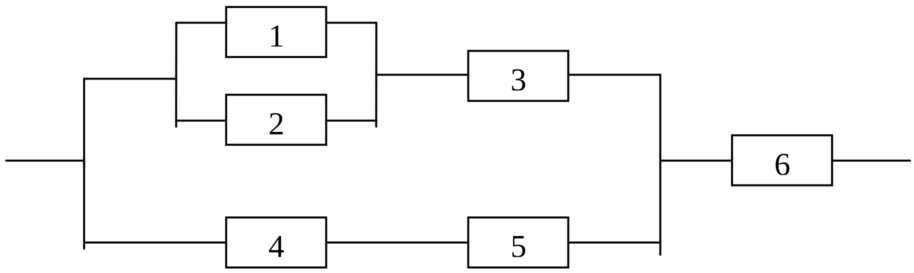
Якщо відома ймовірність $P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \prec \varepsilon\right\}$, то можна визначити за формулою (3.10) одне з чисел n чи ε, якщо інше відоме.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Робота кожного з чотирьох учнів заочної математичної школи може перевірятися одним із семи викладачів. Яка ймовірність того, що всі чотири роботи перевірені різними викладачами? Тільки дві роботи перевірені одним викладачем?

2. Розрахувати ймовірність справної роботи ланцюга (йде струм).



де p_i – ймовірність справної роботи i-го елемента.

3. В першій шухляді є 4 стандартні і дві браковані деталі, в другій – п’ять стандартних і три браковані, третя – порожня. З першої шухляди навмання взято дві деталі, з другої – одну, і все це перекладають у третю. Знайти ймовірність, що навмання взята з третьої шухляди деталь виявиться стандартною.

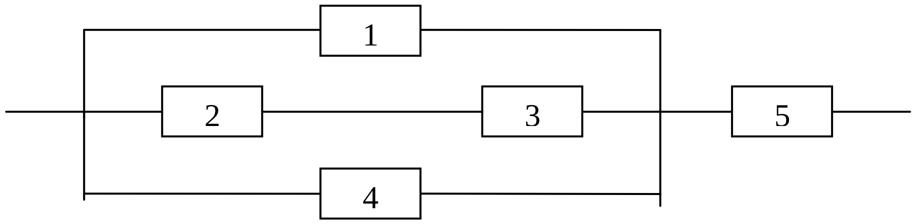
4. Три автомати штампують однорідні деталі, які потрапляють на спільний конвейєр. Продуктивності автоматів відносяться як 5:2:3. З конвейєра відібрано 8 деталей. Яка ймовірність, що серед них 4 деталі з першого автомату, 3 – з другого і 1 – з третього.

5. Ймовірність появи події в кожному із 300 незалежних випробувань дорівнює 0,9. Знайти таке додатне число ε, щоб з ймовірністю 0,96 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності 0,9 не перевищила ε.

Варіант 2

1. 12 однакових монет розкладають по п’яти різних гаманцях. Яка ймовірність, що жоден гаманець не залишиться порожнім?

2. Розрахувати ймовірність відмови ланцюга (не йде струм).



де p_i – ймовірність справної роботи i-го елемента.

3. У товарному потязі 50 вагонів, завантажених вугіллям двох сортів: 25 вагонів містять 70% вугілля першого сорту, 15 вагонів – 60% і 10 вагонів – 85% вугілля другого сорту. Випадково взятий шматок вугілля виявився другого сорту. Знайти ймовірність того, що він взятий із вагону другої групи.

4. В середньому 30% акцій видавничих фірм протягом року стають збитковими. Яка ймовірність того, що серед 12 акцій цих фірм збитковими буде:

1) три;

2) більше трьох.

Знайти найімовірніше число збиткових акцій і його ймовірність.

5. Текст із 2000 літер передається по телеграфу. При передачі однієї літери можлива помилка із ймовірністю 0,003. Знайти ймовірність, що при передачі тексту виявиться:

1) дві помилки;

2) не менше двох помилок.

Варіант 3

1. 9 різних книг треба упакувати в 5 бандеролей. Яка ймовірність, що чотири бандеролі містять по дві книги?

2. Двоє виймають по кульці по черзі з урни, яка містить 8 білих кульок і чотири чорні. Причому кожен раз повертають витягнену кульку. Виграє той, хто першим витягне білу кульку. Знайти ймовірність виграшу для кожного гравця. А якщо кульки не вертати?

3. На підприємстві вироби виготовляються на трьох поточних лініях. На першій лінії виготовляється 20% виробів від усього обсягу їх виробництва, на другій – 30%, на третій – 50%. Кожна з ліній характеризується відповідно такими відсотками стандартних виробів: 97%, 98% і 95%. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб, виготовлений на підприємстві, виявиться бракованим, а також ймовірності того, що цей виріб виготовлений на:

а) першій лінії;

б) другій;

в) третій.

4. Ймовірність появи події А в кожному з незалежних випробуваннях рівна 0,4. Яка ймовірність того, що при 10 випробуваннях подія А появиться:

1) 3 рази;

2) не більше 3 раз.

Знайти найімовірніше число появ події А і його ймовірність.

5. Ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться першосортною, дорівнює 0,8. Скільки потрібно перевірити деталей, щоб з ймовірністю 0,3 можна було стверджувати, що хоча б 160 з них виявляться першосортними?

Варіант 4

1. На полиці стоять m книг в червоних палітурках і n книг в синіх палітурках. Яка ймовірність, що книги в червоних палітурках стоять поруч?

2. Ймовірність того, що потрібна наладчику деталь знаходиться в першому ящику рівна 0,5, в другому – 0,7, в третьому – 0,6, в четвертому – 0,85. Знайти ймовірність, що деталь міститься:
   а) не більше ніж в трьох ящиках;
   б) не менше ніж в двох ящиках.

3. У першому комплекті міститься 20 деталей, 5 з яких нестандартні; в другому – 10, 3 з яких нестандартні. З кожного комплекту навмання виймають по одній деталі, а потім із цих двох деталей навмання вибирають одну. Знайти ймовірність, що ця деталь виявиться стандартною. Яка ймовірність, що вона з першого комплекту?

4. В урні 10 білих і 40 чорних куль. Виймають 14 куль підряд, причому колір вийнятої кулі реєструють, а потім кулю вертають в урну. Визначити найімовірніше число появ білої кулі і його ймовірність. Обчислити ймовірність, що білих куль буде не менше 4.

5. Відомо, що в технологічному процесі виготовлення мікросхем забезпечується 98% продукції, яка відповідає технічним вимогам. Яка ймовірність, що з 200 мікросхем бракованих не менше трьох?

Варіант 5

1. Урна містить 3 білі, 4 червоні і 5 зелених куль. Навмання виймають чотири кулі. Яка ймовірність того, що витягнені кулі будуть всіх можливих кольорів.

2. Партія із 100 деталей піддається вибірковому контролю. Умовою непридатності партії є наявність хоча б одної бракованої деталі серед п’яти перевірених. Яка ймовірність для даної партії бути неприйнятою, якщо вона містить 5% непридатних деталей?

3. У продаж поступили дискети трьох кольорів: синього, чорного і червоного. Чорних і червоних дискет порівну, а синіх у два рази менше ніж чорних. Серед дискет чорного кольору 2% бракованих, червоного – 1%, синього – 0,5%. Знайти ймовірність, що навмання вибрана дискета виявиться якісною; яка ймовірність, що вона червона?

4. Два лучники стріляють по одній мішені кожен по 6 разів. Ймовірність влучання при одному пострілі для першого дорівнює 0,8, а для другого 0,5. Знайти ймовірність, що після стрільби в мішені буде одна стріла.

5. Радіостанція протягом дня транслює 200 музичних програм. Яка ймовірність того, що не менше 150 з них виконуються англійською мовою, якщо відомо, що англомовні програми складають 80% репертуару радіостанції?

Варіант 6

1. В понеділок 5 уроків: алгебра, геометрія, історія, географія і література. Яка ймовірність, що в розкладі алгебра і геометрія не стоять поруч?

2. На пошту поступило 20 телеграм, адресованих в чотири різні пункти (по 5 в кожен пункт). Із всіх телеграм вибирають навмання чотири. Знайти ймовірність подій: а) всі телеграми адресовані в один пункт; б) всі телеграми адресовані в різні пункти.

3. Три верстати-автомати штампують деталі, що потрапляють на спільний конвейєр. Продуктивність автоматів визначається відношенням 3:2:4. Відсотки браку для кожного автомата дорівнюють відповідно 3;1,5;2,5. 1) Яка ймовірність, що навмання взята деталь виявиться бракованою? 2) Навмання взята деталь виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що вона була виготовлена на 2-му верстаті.

4. Для нормальної роботи гуртової бази на лінії має бути не менше 4 вантажних бусів, а їх є сім. Ймовірність для кожного з них не вийти на лінію дорівнює 0,05. Знайти ймовірність того, що найближчого дня гуртова база буде працювати нормально.

5. Ймовірність того, що стодоларова купюра фальшива, дорівнює 0,02. Знайти найімовірніше число фальшивих купюр серед 400, а також ймовірність, що з 400 купюр хоча б дві виявляться фальшивими.

Варіант 7

1. Яка ймовірність, що довільне шестицифрове число містить три парні і три непарні цифри?

2. В групу студентів входить 4 англійці, 5 французів і 3 німці. Яка ймовірність того, що три навмання вибрані студенти виявляться:
   1) однієї національності;
   2) різних національностей.

3. У піраміді знаходиться 20 гвинтівок, 4 з яких обладнані оптичним прицілом. Ймовірність влучення із гвинтівки з оптичним прицілом дорівнює 0,9, без оптичного прицілу – 0,6 (для певного стрільця). Цей стрілець із навмання взятої гвинтівки виконав постріл і влучив у ціль. Що ймовірніше: стрілець стріляв із гвинтівки з оптичним прицілом чи із гвинтівки без оптичного прицілу?

4. Знайти оцінку ймовірності появи події в кожному із 100 незалежних випробувань, якщо найімовірніше число появи події під час випробувань дорівнює 25.

5. Контролер перевіряє однотипні деталі на стандартність. Ймовірність, що деталь є стандартною, складає 0,8. Навмання бере 400 деталей. Яка ймовірність, що серед них стандартних більше 300?

Знайти межі, в яких з ймовірністю 0,95 знаходиться число стандартних деталей серед 400 перевірених.

Варіант 8

1. Яка ймовірність, що навмання взяте чотирицифрове натуральне число містить не менше як три різні цифри?

2. Маємо дві урни. В першій урні міститься 4 білих та 6 чорних кульок, в другій – 5 білих і 5 чорних. З кожної урни навмання беруть по три кульки. Яка ймовірність того, що взяті кульки виявляться білими або чорними?

3. Ймовірність того, що двокамерний холодильник “NORD” не зіпсується протягом гарантійного терміну, дорівнює 0,8, а для однокамерного ця ймовірність на 10% більша. Знайти ймовірність, що навмання куплений холодильник із шести двокамерних і десяти однокамерних зіпсується протягом гарантійного терміну.

4. В коло радіуса R вписано рівнобічну трапецію так, що: нижня основа є діаметром, а верхня дорівнює бічним сторонам. Навмання в круг кидають 12 точок. Яка ймовірність, що в трапецію попаде 3 точки, в сегменти (поза трапецією), обмежені нижньою і верхньою основами трапеції – відповідно 4 і 1 точка і сегменти (менші), утворені бічними сторонами, – по 2 точки?

5. Радіоапаратура складається з 1000 незалежно працюючих мікроелементів. Ймовірність відмови кожного елементу протягом доби дорівнює 0,004 і не залежить від стану інших елементів. Знайти ймовірність відмови:

1) двох елементів;
2) не більше двох елементів;
3) не менше двох елементів протягом доби.

Варіант 9

1. Із групи, яка складається з семи хлопців і чотирьох дівчат, треба скласти команду з шести людей. Яка ймовірність, що в неї входитиме не менше двох дівчат?

2. Підкидають два гральні кубики. Яка ймовірність, що на одному з кубиків випало шість очок, якщо відомо, що сума очок на двох кубиках не менша 9?

3. В першій урні є 4 білих і 6 червоних куль, у другій – 7 білих і 3 чорних кулі. Із першої урни навмання витягують дві кулі і перекидають у другу, і вміст її перемішується. Знайти ймовірність, що взята після цього із другої урни куля виявиться білою.

4. Що ймовірніше: виграти в гравця, однакового за силою (гра ведеться без нічиїх)

1) 4 партії з 8 чи 3 з 5;
2) 3 партії з 6 чи 2 з 4;
3) 3 партії з 4 чи 5 з 8;
4) не менше ніж 3 партії з 4 чи не менше ніж 5 з 8.

5. В урні міститься 8 білих і 2 чорні кулі. Кулі дістають по одній з поверненням. Дістали 400 куль. Обчислити ймовірності подій:

1) біла куля з’явиться 300 разів;
2) біла куля з’явиться від 300 до 350 разів.

Варіант 10

1. З чисел 3,5,7,11,13,17,19,23 складають дроби. Яка ймовірність, що навмання взятий дріб правильний? Неправильний?

2. При виготовлені одного виробу працюють послідовно три робітники. Якість виробу при передачі наступному робітнику не перевіряється. Перший робітник припускає брак з ймовірністю 0,005, другий – 0,009, третій – 0,002. Знайти ймовірність того, що виготовлений виріб буде:

а) якісним;
б) бракованим.

3. В двох контейнерах є по 20 деталей, причому в першому – 5 бракованих, а в другому – 3 браковані деталі. З першого контейнера навмання беруть дві деталі і перекладають в другий. Знайти ймовірність того, що навмання взяті після цього з другого контейнера дві деталі будуть стандартними.

4. Знайти ймовірність появи принаймні:

а) однієї шістки при шести підкиданнях грального кубика;
б) двох шісток при 12 підкиданнях;
в) трьох шісток при 18 підкиданнях.

5. Магазин отримав 600 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при перевезені пляшка виявиться розбитою, дорівнює 0,0005. Знайти ймовірність того, що магазин одержить розбитих пляшок:

1) рівно 4;
2) не більше 4;

3) не менше 4.

Варіант 11

1. Кидають три гральні кубики. Яка ймовірність, що сума очок на гранях, що випали буде 8 або 9?

2. Три стрільці стріляли по мішені по одному разу. Ймовірність влучень у мішень першим, другим та третім стрільцями відповідно дорівнює 0,85; 0,95; 0,9. Визначити ймовірність наступних подій:
   1) число влучень виявиться не більше двох;
   2) число влучень виявиться не менше двох;
   3) хоча б одне влучення.

3. На ринку продаються акції чотирьох фірм. Їх кількість відносно загальної кількості всіх чотирьох становить відповідно 25,30,15 і 30 відсотків. Але серед них є фальшиві і відсотковий склад таких відповідно рівний 10,4,1 і 3. Знайти ймовірність того, що навмання придбана акція є фальшивою. Яка ймовірність, що це акція другої фірми?

4. Стрілок робить 8 пострілів по мішені, яка складається з центрального круга і двох концентричних кілець. Ймовірність влучення в круг і кільця відповідно рівні 0,35; 0,20; 0,15. Яка ймовірність, що в круг він влучить 3 рази, в кільця відповідно по 2 рази?

5. Завод відправив на базу 10000 доброякісних виробів. Ймовірність того, що виріб в дорозі буде пошкоджено, постійна і дорівнює 0,0005. Обчислити ймовірність того, що серед 10000 виробів по дорозі буде пошкоджено:
   1) рівно 3;
   2) не більше3.

Варіант 12

1. Куб всі грані якого зафарбовані, розпиляли на 64 кубики однакового розміру, які потім змішали. Знайти ймовірність, що навмання взятий кубик матиме зафарбованих граней:
   а) одну;
   б) дві;
   в) три;
   г) чотири;
   д) не матиме жодної.

2. Обчислювальна машина складається з трьох незалежно працюючих блоків. Ймовірність безвідмовної роботи на протязі t для першого блоку дорівнює 0,98, другого – 0,95, третього – 0,92. При відмові будь-якого блоку обчислювальна машина не працює. Знайти ймовірність того, що за час t машина відмовить у роботі.

3. Для формування команди з 1-го курсу виділено 5 студентів, з 2-го – 7, з 3-го – 8, з 4-го – 6. Ймовірність того, що будь-який студент кожного курсу буде включений до складу команди відповідно дорівнює 0,6; 0,4; 0,8; 0,45. Навмання вибраний учасник змагань потрапив до складу команди. На якому курсі ймовірніше він навчається?

4. Здійснено 10 підкидань двох монет. Знайти ймовірність, що при цьому два герби появились:

1) 5 раз;

2) ні разу;

3) не менше 3 раз.

5. Ймовірність того, що протягом часу t конденсатор вийде з ладу, стала і рівна 0,2. Знайти ймовірність, що з 200 незалежно працюючих конденсаторів з ладу вийде:

1) не менше 35;

2) від 20 до 30;

3) рівно 35.

Варіант 13

1. Першість області з баскетболу виборюють 18 команд, які жеребкуванням розподіляються на дві групи по 9 команд в кожній. 5 команд зазвичай займають перші місця. Яка ймовірність попадання двох лідируючих команд в одну групу і трьох – в іншу?

2. Радіолокаційна станція веде спостереження за трьома об’єктами. За час спостереження перший об’єкт може бути загублений з ймовірністю 0,001, другий – 0,01, третій – 0,1. Знайти ймовірність події:

1) один з об’єктів буде загублено;

2) буде загублено не менше одного об’єкту.

3. При заповнені певного документу перший бухгалтер помиляється з ймовірністю 0,05, а другий – 0,1. За певний час перший бухгалтер заповнив 80 таких документів, а другий – 120. Всі ці документи в порядку їх заповнення складались в одну папку. Навмання витягнутий із цієї папки документ виявився з помилкою. Що більш ймовірніше: помилку допустив перший чи другий бухгалтер?

4. Відсоток браку всієї продукції становить 0,2. Навмання відібрано 5 деталей. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться:

1) рівно дві браковані;

2) хоча б дві браковані.

Яке найімовірніше число стандартних деталей серед відібраних.

5. Схожість насіння оцінюється ймовірністю 0,9. Знайти ймовірність того, що з 900 посіяних насінин зійде:

1) 800;

2) від 800 до 850.

Варіант 14

1. В касовому апараті є 8 монет по 5 коп., 6 монет по 10 коп., 4 монети по 25 коп. і 3 монети по 50 коп. Навмання беруть 5 монет. Яка ймовірність, що в сумі виявиться не менше однієї гривні?

2. В ящику міститься 5 стандартних і 3 браковані деталі. Деталі з ящика виймаються по одній без повернення. Вийняли три однакові деталі. Обчислити ймовірність подій:
   1) всі три деталі будуть стандартними;
   2) серед трьох деталей дві виявляться стандартними;
   3) всі три деталі будуть бракованими.

3. Клапани, виготовлені цехом заводу, перевіряють три контролери. З кожної сотні клапанів, що поступають на перевірку, 20 потрапляють до першого контролера, 50 – до другого, 30 – до третього. Ймовірність того, що бракована деталь буде виявлена першим контролером, дорівнює 0,01, другим – 0,09 і третім – 0,02. Під час контрольної перевірки незабракованих контролерами клапанів один виявився бракованим. Яка ймовірність що цей клапан перевіряв другий контролер?

4. При стрільбі по мішені ймовірність влучення при одному пострілі рівна 0,8. При якому числі пострілів найімовірніше число влучень буде 18.

5. Ймовірність того, що покупцеві, який відвідав магазин, потрібне взуття 42 розміру, дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що серед 400 покупців знадобиться взуття 42 розміру:
   1) 35 покупцям;
   2) від 30 до 45;
   3) менше 45.

Варіант 15

1. Цифри 1,2,3,4,5,6,7 записані на однакових картках, які ретельно перемішані. Тричі навмання беруть по одній картці і кладуть їх зліва на право. Знайти ймовірність, що утворене тризначне число виявиться:
   а) парним;
   б) кратним трьом;
   в) кратним 5.

2. В урні міститься 5 червоних, 6 синіх і 7 зелених кульок. Навмання з урни беруть чотири кульки. Яка ймовірність того, що взяті чотири кульки виявляться одного кольору?

3. Дві стріли залишилися в мішені після пострілу трьох лучників по ній. Ймовірності влучення для кожного із лучників відповідно дорівнюють 0,5; 0,6; 0,4. Знайти ймовірність того, що у мішені була стріла: а) третього лучника; б) першого і третього лучників.

4. В приміщені 8 ламп. Ймовірність роботи протягом року для кожної лампи 0,8. Знайти ймовірність, що протягом року горять:

1) рівно 3 лампи;

2) більше половини.

Чому дорівнює найімовірніше число ламп, які будуть працювати протягом року і яка його ймовірність?

5. На виробництві 100 ткацьких верстатів. Ймовірність обриву нитки протягом 1 хв. на одному верстаті рівна 0,04. Знайти ймовірність, що за хвилину відбудеться:

1) 5 обривів;

2) не менше 5;

3) не більше 5.

Варіант 16

1. В касовому апараті є 8 25-копійкових монет, 10 – вартістю по 50 коп. і 12 – по 5 коп. Знайти ймовірність того, що серед п'яти навмання взятих монет: а) не виявиться жодної вартістю 50 коп.; б) буде рівно дві монети вартістю 50 коп.; в) будуть різні монети.

2. Прилад складається із чотирьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність того, що елемент не вийде з ладу на протязі зміни роботи приладу для першого, другого, третього та четвертого елементів, відповідно дорівнює 0,7; 0,9; 0,6; 0,8. Обчислити ймовірність подій:

1) всі чотири елементи вийдуть з ладу за зміну;

2) два елементи з чотирьох не вийдуть з ладу;

3) хоча б один елемент приладу не вийде з ладу.

3. У першому контейнері є 30 деталей, з яких 4 браковані, у другому відповідно 20 і 3. Навмання взята деталь із випадковим чином вибраного контейнера виявилась стандартною. Яка ймовірність того, що деталь була взята із першого контейнера?

4. В урні 10 білих, 7 червоних і 3 зелених кулі. Навмання виймають кулі 6 раз з поверненням. Яка ймовірність, що при цьому витягнено:

1) 2 білих, 3 червоних і 1 зелену кулю.

2) однакову кількість кожного кольору.

5. Автоматична штамповка дає 10% браку. Навмання беруть 900 заготовок. Знайти ймовірність, що кількість бракованих виробів буде:

1) 80 штук;

2) менше 90.

Варіант 17

1. Із літер розрізаної абетки складено слово "абракадабра". Хлопчик змішав літери, а потім навмання їх зібрав. Яка ймовірність, що він знову отримає те ж саме слово?

2. Ймовірність того, що подія появиться хоча б один раз в трьох незалежних випробуваннях рівна 0,875. Знайти ймовірність появи в одному випробуванні, якщо вона однакова.

3. Із 16 баскетболістів чотири влучають в кошик із штрафного кидка з ймовірністю 0,9, сім – з ймовірністю 0,8, три – з ймовірністю 0,7, два – з ймовірністю 0,6.

1) Яка ймовірність того, що навмання відібраний спортсмен влучить у кошик із штрафного?

2) Довільно відібраний баскетболіст виконав один штрафний кидок і не влучив у кошик. До якої групи ймовірніше всього він належить?

4. В урні 15 куль, з них 5 білі. Кулі виймають з урни з поверненням. Знайти число n виймань кулі, яке треба здійснити, щоб найімовірніше число появ білої кулі дорівнювало 30.

5. Ймовірність виготовлення нестандартної електролампи заводом стала і рівна 0,1. Яка ймовірність того, що з 8100 радіоламп число нестандартних виявиться:

1) 800 штук;

2) не менше 800 штук.

Варіант 18

1. Експерт з управління цінними паперами розглядає 20 об’єктів для інвестування. Лише 4 з них будуть вибрані. Яка ймовірність того, що з чотирьох навмання вибраних об’єктів виявиться об’єкт під номером 8?

2. Ймовірність того, що перший спортсмен пройде дистанцію без штрафних очок дорівнює 0,6, а для другого і третього ймовірності відповідно рівні 0,9 та 0,8. Знайти ймовірність , що: 1) тільки два спортсмени пройдуть дистанцію без штрафних очок; 2) хоча б два; 3) не більше двох.

3. В урні знаходиться 13 куль, з яких п’ять білі. Знайти ймовірність того, що навмання витягнута з урни куля виявиться білою, якщо перед цим було взято: а) дві кулі; б) три кулі.

4. Для кожної з п’яти телевізійних камер ймовірність того, що вона включена в даний момент рівна 0,6. Знайти ймовірність того, що в даний момент: 1) включена хоча б одна камера; 2) включені дві камери; 3) включено не менше 3 камер.

5. Ймовірність появи випадкової події в кожному окремому випробуванні стала і рівна 0,6. Скільки необхідно провести випробувань, щоб із ймовірністю 0,987 можна було чекати, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності не більше, чим на 0,01.

Варіант 19

1. Знайти ймовірність того, що при п'ятиразовому підкиданні грального кубика: а) хоча б раз з'явиться грань із шістьма очками; б) принаймні два рази з'явиться п'ятірка.

2. Ймовірність виявлення бракованої деталі на першому станку-автоматі складає 0,02, на другому ця ймовірність на 40% вища, а на третьому дорівнює півсумі двох попередніх ймовірностей. На кожному верстаті виготовлено по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед цих трьох деталей буде: а) хоча б дві стандартні; б) не більше двох стандартних.

3. В урні лежать три кулі, які можуть бути білими або чорними. Всі припущення про початковий склад урни рівноможливі. Чотири рази витягнули з урни по одній кулі з поверненням, причому перша куля виявилась чорною, решта – білі. Знайти апостеріорні ймовірності різних складів урни.

4. В коло радіуса R вписано правильний трикутник. Яка ймовірність, що з чотирьох навмання кинутих в круг точок всередині трикутника виявляться: 1) дві точки; 2) всі точки; 3) жодної.

5. В цеху працюють незалежно один від одного 200 верстатів, причому ймовірність безперебійної роботи кожного з них на протязі зміни постійна і дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що на протязі зміни безперебійно працюватимуть: 1) 180 верстатів; 2) не менше 180 верстатів.

Варіант 20

1. На складі телеательє знаходиться 20 кінескопів, 12 з яких виготовлені львівським заводом. Знайти ймовірність, що з чотирьох навмання взятих кінескопів хоча б два львівського заводу.

2. Двері відкриваються одним із 4-х ключів, які знаходяться у зв'язці. В темряві господар навмання вибирає ключ і, якщо двері не відчиняються бере наступний. Знайти ймовірність того, що двері будуть відкриті за три спроби.

3. В магазині є 30 телевізорів фірми α і 20 – фірми β. Статистичні дані свідчать, що телевізор фірми α витримує подвійний гарантійний термін з ймовірністю 0,7, а другої – з ймовірністю 0,9. Навмання вибраний апарат витримує подвійний гарантійний термін. Що ймовірніше: він виготовлений фірмою α чи β?

4. В сім'ї десять дітей. Ймовірність народження хлопчика рівна 0,515. Визначити ймовірність що в сім'ї: 1) п'ять хлопчиків; 2) хлопчиків не менше трьох, але не більше 8.

5. Відомо, що 3/5 взуття, виготовленого фабрикою оцінюється як продукція 1-го ґатунку. Яка ймовірність того, що серед навмання вибраних 400 пар взуття, виготовленого фабрикою, 1-го ґатунку буде: 1) 250 пар; 2) від 250 до 300 пар.

Варіант 21

1. В ящику міститься 8 стандартних і 6 бракованих деталей. Навмання беруть чотири деталі. Яка ймовірність, що взяті чотири деталі виявляться стандартними або бракованими?

2. Для виготовлення деталей робітнику потрібно виконати чотири незалежні технологічні операції. Ймовірність допустити брак при виготовленні кожної з них відповідно дорівнює 0,004; 0,005; 0,008; 0,001. Знайти ймовірність того, що виготовлена робітником деталь виявиться бракованою.

3. Два станки виготовляють однотипні деталі, які потрапляють на спільний конвеєр. З кожних 100 деталей першого станка одна нестандартна, а з кожної тисячі другого – 8 нестандартних. Продуктивність другого станка на 20% більша від першого. Знайти ймовірність, що навмання взята з конвейєра деталь виявиться стандартною?

4. Два баскетболісти роблять по три кидки в корзину. Ймовірність влучення м’яча при кожному кидку рівна відповідно 0,6 і 0,7. Знайти ймовірність, що в обох буде рівна кількість влучень.

5. АТС обслуговує тисячу абонентів. Ймовірність того, що абонент зателефонує протягом 1 хв. рівна 0,003. Обчислити ймовірність, що за 1 хв. надійде: 1) 4 замовлення; 2) не більше 4; 3) не менше 2.

Варіант 22

1. В ліфт 11-поверхового будинку на першому поверсі зайшло п’ять чоловік. Кожен з яких з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі починаючи з 2-го. Обчислити ймовірність подій: 1) всі пасажири вийдуть на 4-му поверсі; 2) всі пасажири вийдуть на різних поверхах; 3) всі пасажири вийдуть лише на двох різних поверхах.

2. Три лучники випустили по одній стрілі у спільну мішень. Ймовірності влучення для кожного з них відповідно рівні 0,8; 0,6; 0,7. Знайти ймовірність, що в мішені виявиться: а) дві стріли; б) хоча б одна стріла.

3. Два автомати штампують однорідні деталі, які потрапляють на спільний конвейєр. Продуктивність першого автомату втричі більша, ніж продуктивність другого. Відсоток браку для кожного з них відповідно дорівнює 0,4 і 0,5. Яка ймовірність, що навмання взята деталь з конвейєра буде нестандартною. Навмання

взяту деталь виявили стандартною. Яка ймовірність, що вона виготовлена другим автоматом?

4. Партія виробів має 2% браку. Який повинен бути обсяг контрольної вибірки, щоб ймовірність знайти в ній хоча б один бракований виріб була не менша 0,95.

5. Комбінат побутового обслуговування обслуговує 2000 клієнтів. Ймовірність того, що клієнт зробить замовлення протягом години дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за годину на комбінат надійде: 1) 3 замовлення; 2) не більше 3; 3) не менше 3.

Варіант 23

1. Із слова "ротор", складеного за допомогою розрізної абетки, навмання послідовно виймають три літери і складають в ряд. Яка ймовірність того, що одержимо слово "тор" або "рот"?

2. В трьох урнах міститься відповідно: 7 червоних і 3 білі; 2 червоні і 6 білих; 4 червоні і 2 білі кулі. З кожної з них навмання береться по одній кулі. Знайти ймовірність того, що вони матимуть: а) однаковий колір; б) різні кольори.

3. Два з трьох незалежно працюючих елементів обчислювального пристрою вийшли з ладу. Зайти ймовірність того, що з ладу вийшли перший і другий елементи, якщо ймовірності виходу з ладу для кожного з них відповідно рівні 0,2; 0,4; 0,1.

4. Гральний кубик підкидають 9 раз. Знайти ймовірність, що 5 очок з'явиться: 1) 3 рази; 2) більше 3 разів; 3) не більше 6, але не менше 4 рази.

5. Верстат виготовляє стандартну деталь з ймовірністю 0,7. Скільки деталей повинен виготовити верстат для партії деталей, щоб з ймовірністю 0,9978 можна було чекати, що в партії відхилення відносної частоти появи стандартної деталі від ймовірності 0,7 буде менше 0,005?

Варіант 24

1. Маємо сім квитків вартістю по 10 грн., п'ять квитків по 30 грн. та три квитки по 50 грн. Навмання вибирають три квитки. Визначити ймовірність того, що: 1) два квитки з трьох матимуть однакову вартість; 2) всі три квитки матимуть однакову вартість.

2. Підприємство отримує сировину від трьох постачальників і не виконує контракт по виготовленню продукції, якщо хоча б один із постачальників зриває поставку сировини. Ймовірності вчасної поставки сировини для постачальників відповідно рівні 0,97; 0,95; 0,99. Знайти ймовірність невиконання контракту підприємством-виробником.

3. Відомо, що для деякої вікової групи K_1 відсотків всіх чоловіків і K_2 відсотків всіх жінок хворіють на серцево-судинні захворювання. Чисельність чоловіків для цієї групи менша на 5% від чисельності жінок. У навмання відібраної особи було виявлено ішемічну хворобу серця. Яка ймовірність, що це була жінка?

4. В середньому 70% студентів курсу здають даний залік з першої спроби. Знайти ймовірність, що з шести навмання взятих студентів з першого разу здадуть залік: 1) не більше чотирьох; 2) всі. Знайти ймовірність найімовірнішого числа студентів, які здадуть залік.

5. Ймовірність появи випадкової події в кожному з незалежних дослідів стала і рівна 0,9. Провели 676 дослідів. Обчислити ймовірності подій: 1) подія з’явиться при 676 дослідах 600 раз; 2) не більше 600 разів.

Варіант 25

1. В урні знаходяться червоні і зелені кулі. Ймовірність того, що навмання витягнуті три кулі будуть червоними дорівнює ½. Яка мінімальна кількість куль в урні?

2. Ймовірність одного попадання в ціль при одному залпі з двох рушниць дорівнює 0,38. Знайти ймовірність попадання в ціль при одному пострілі з першої гвинтівки, якщо відомо, що для другої ця ймовірність дорівнює 0,7.

3. Три автомати виготовляють однакові деталі, які попадають на один конвейєр. Продуктивності автоматів відносяться як 5:4:6. Відсотки браку для кожного автомата відповідно дорівнюють 2;1,5;2,5. Яка ймовірність, що навмання взята з конвейєра деталь виявиться стандартною? Навмання взята деталь виявилася бракованою. Знайти ймовірність її виготовлення 3-м автоматом.

4. Кожний десятий пасажир громадського транспорту має документ на пільговий проїзд. Контролер перевіряє проїзні документи в п’яти пасажирів. Яка ймовірність, що документ про пільговий проїзд мають: 1) хоча б один з перевірених пасажирів; 2) менше половини.

5. АТС обслуговує 500 абонентів. Ймовірність того, що абонент зателефонує на протязі години стала і рівна 0,02. Знайти ймовірність події: 1) на протязі години зателефонують 4 абоненти; 2) не більше 4; 3) не менше 4.

Варіант 26

1. В кулю вписана правильна трикутна піраміда (тетраедр). Точка навмання зафіксована в кулі. Знайти ймовірність попадання точки в піраміду.

2. В пачці 20 фотокарток, серед яких три шукані. Яка ймовірність, що серед п'яти відібраних карток виявиться рівно одна шукана?

3. Виріб перевіряється на стандартність одним із товарознавців. Причому перший товарознавець перевіряє 65% виробів, а другий – решту. Ймовірність того, що стандартний виріб буде підтверджений стандартним першим товарознавцем дорівнює 0,9, а другим – 0,98. Стандартний виріб при перевірці було підтверджено стандартним. Знайти ймовірність, що цей виріб перевірив другий товарознавець.

4. В гуртожитку мешкає 60% студентів стаціонару. Знайти ймовірність, що з 10 випадково вибраних студентів в гуртожитку проживає:

1) вісім студентів;

2) не більше 8.

Знайти ймовірність найбільш ймовірного числа студентів, що проживають у гуртожитку.

5. Частка I ґатунку деякої масової продукції в середньому складає 20%. Навмання беруть 625 екземплярів цієї продукції. Яка ймовірність того, що число екземплярів продукції I ґатунку виявиться рівним:

1) 100 шт.;

2) від 100 до 150 шт.

Варіант 27

1. На площині накреслено два концентричні кола, радіуси яких 6 і 12 см відповідно. Яка ймовірність того, що точка кинута навмання у великий круг, попаде в кільце?

2. Робітник при складанні механізму встановлює дві однакові деталі. Бере він їх випадковим чином із дванадцяти штук, серед яких три деталі меншого розміру. Механізм не буде працювати, якщо обидві деталі мають менший розмір. Знайти ймовірність, що механізм буде працювати.

3. На складі є монітори до комп'ютерів чотирьох партій відповідно 40%, 10%, 20% і 30%. Ймовірність того, що монітор відпрацює подвійний гарантійний термін, дорівнює відповідно для кожної партії 0,7; 0,8; 0,6; 0,9. Знайти ймовірність, що навмання вибраний монітор буде працювати подвійний гарантійний термін.

4. Ймовірність виготовити стандартну деталь на верстаті-автоматі дорівнює 0,95. Навмання беруть 8 деталей, виготовлених на цьому верстаті. Обчислити ймовірності подій:

1) три деталі стандартні;

2) три деталі браковані;

3) не менше трьох браковані.

Знайти ймовірність найбільш ймовірного числа стандартних деталей з восьми.

5. Ймовірність появи випадкової події в кожному з незалежних випробуваннях стала і дорівнює 0,2. Знайти, яке відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності по модулю можна чекати з ймовірністю 0,9128 при 10000 випробуваннях.

Варіант 28

1. Стержень довжиною l довільним чином зламали на три частини. Яка ймовірність того, що з цих частин можна скласти трикутник?

2. Бібліотечка складається із десяти різних книжок, причому ціна п'яти з них по 4 грн., трьох – по 5грн., двох – по 3грн. Знайти ймовірність, що сумарна вартість двох навмання взятих книжок складає 8 грн.

3. Деталь може надійти для обробки на перший автомат з ймовірністю 0,3, на другий – з ймовірністю 0,2, а на третій – з ймовірністю 0,5. При обробці на першому верстаті відсоток браку становить 1, на другому – 3, а на третьому – 8. Вибрана навмання деталь виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що її виготовлено на другому автоматі?

4. В партії виробів товарознавець відбирає вироби вищої проби. Ймовірність того, що навмання взятий виріб виявиться вищої якості, дорівнює 0,8. Яка ймовірність, що з семи взятих виробів виявиться:
   1) два вироби вищої якості;
   2) хоча б два вироби.
   Знайти ймовірність найімовірнішого числа виробів вищої якості.

5. Проростання насіння даної рослини стала і становить 90%. Було посаджено 2500 насінин. Обчислити ймовірності подій:
   1) насінин, що проросли, буде 2300;
   2) не більше 2300.

Варіант 29

1. В круг радіуса R вписано правильний шестикутник. Знайти ймовірність того, що точка кинута навмання у круг, не попаде в шестикутник.

2. В урні є 6 чорних і 8 білих куль. Знайти ймовірність того, що три навмання витягнуті кулі виявляться білими, якщо:

1) першу і другу кулю повертають в урну і перемішують кулі;

2) повертають тільки першу кулю;

3) кулі не повертають.

3. На складі телеательє знаходяться три комплекти однотипних деталей: в першому – 100 деталей, з яких дві браковані, в другому – 200, відсоток браку складає 2, в третьому – 1500, всі стандартні. Деталі склали в одну ємність і навмання вибрали одну деталь. Яка ймовірність, що вона стандартна?

4. В цеху є чотири резервних двигуни. Ймовірність того, що резервний двигун буде увімкнено в даний момент часу, стала і рівна 0,4. Обчислити ймовірність подій:

1) в даний момент буде увімкнено не більше двох двигунів;

2) хоча б один двигун.

Знайти ймовірність найімовірнішого числа ввімкнених двигунів.

5. Прядильниця обслуговує 100 веретен. Ймовірність, що обірветься нитка на одному веретені на протязі 1 хв., стала і рівна 0,006. Обчислити ймовірність подій:

1) на протязі 1 хв. нитка обірветься на 5 веретенах;

2) нитка обірветься не більше, ніж на п’яти веретенах.

Варіант 30

1. В область обмежену еліпсом $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{81}=1$ навмання кидається точка. Яка ймовірність, що вона попаде в область, обмежену еліпсом $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$?

2. Студент знає 50 із 60 питань програми. Знайти ймовірність того, що з трьох навмання витягнутих білетів він знатиме:

а) хоча б одне;

б) тільки одне;

в) не більше одного.

3. Три заводи виготовляють однакові вироби, причому перший випускає 50%, другий – 20%, третій – 30% всієї продукції. Відсотки браку для кожного з них становлять відповідно 1;6;3. Навмання відібраний виріб виявляється стандартним. Знайти ймовірність, що він був виготовлений на другому заводі.

4. Ймовірність влучення в мішень для даного стрілка при одному пострілі дорівнює 0,7. Скільки пострілів повинен зробити стрілець, щоб найімовірніше число влучень дорівнювало б 20.

5. Ймовірність появи випадкової події в кожному з незалежних випробувань стала і дорівнює 0,6. Виконали 1225 випробувань. Обчислити ймовірність подій:

1) подія випаде 735 разів;

2) не більше 735 разів.

Варіант 31

1. В області, обмеженій еліпсоїдом $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, навмання зафіксована точка. Яка ймовірність, що координати цієї точки будуть задовольняти нерівності $x^2+y^2+z^2\le 3^2$?

2. В урні знаходиться 15 білих і 25 чорних куль. Знайти ймовірність, що з трьох навмання витягнутих куль виявиться хоча б одна біла.

3. Два студенти незалежно один від другого здійснили постріл по мішені. Ймовірність влучення в мішень для першого студента дорівнює 0,8, а для другого – 0,6. Після залпу в мішені виявлена одна пробоїна. Знайти ймовірність, що влучив другий студент.

4. Скільки раз треба підкинути два гральні кубики, щоб ймовірність випадання хоча б раз двох шісток була більша $\frac{1}{2}$?

5. Маємо сто ящиків. В кожному ящику міститься по 8 стандартних та 2 браковані деталі. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі. Обчислити ймовірність наступних подій:

1) число стандартних деталей виявиться рівним 90;

2) не менше 90.

Варіант 32

1. В прямокутник з вершинами $K(-2{,}0)$, $L(-2{,}5)$, $M(1{,}5)$, $N(1{,}0)$ кинута точка. Яка ймовірність, що її координати $(x;y)$ будуть задовольняти нерівностям $x^2+1\le y\le 3-x$?

2. У зв'язці є 7 різних ключів, з яких тільки одним можна відкрити замок. Навмання вибирається ключ і робиться спроба відкрити ним замок. Ключ, що не підійшов, більше не випробовується. Знайти ймовірність, що замок буде відкрито до четвертої спроби.

2. В наслідок порушення технічного процесу в середньому 20% продукції виявилось бракованою. Кожна деталь із цієї групи поступала на контроль, який не був досконалим: якщо деталь відповідала нормі, контроль пропускав її з ймовірністю 0,9; якщо ж деталь була бракованою, то на контролі її бракували з ймовірністю 0,7.

Покупець навмання вибирає одну деталь з великої кількості партії проконтрольованої продукції. Знайти ймовірність того, що покупка виявиться з дефектом.

3. Серед автомобілів, що ввозяться в Україну, 85% становлять легківки. Протягом дня на митницю прибуло 10 автомобілів. Яка ймовірність, що:
1) 9 з них легківки;
2) не більше 9.
Знайти ймовірність найімовірнішого числа легківок.

4. Гральний кубик кидають 900 разів. Знайти наближено межі, в яких число m появи чотирьох очок буде входити з ймовірністю 0,9973.

Варіант 33

1. В прямокутник з вершинами $R(-2,0)$, $L(-2,9)$, $M(4,9)$, $N(4,0)$ кинута точка. Яка ймовірність, що її координати $(x;y)$ будуть задовольняти нерівностям $0 \le y \le 2x - x^2 + 8$?

2. Знайти ймовірність повного виграшу для картки спортлото “6 із 40”.

3. В групі 21 студент, в тому числі 5 відмінників, 10 “хорошистів” і 6, які слабо вчаться. На наступному екзамені відмінники можуть отримати лише відмінні оцінки. Добре встигаючі студенти (“хорошисти”) можуть отримати з однаковою ймовірністю добрі і відмінні оцінки. Студенти, які слабо займаються, можуть отримати з однаковою ймовірністю добрі, задовільні і відмінні оцінки. Для здачі екзамену запрошується навмання один студент. Яка ймовірність, що він отримає добру оцінку? Відмінну оцінку?

4. Детектор неправди фіксує невірну відповідь з ймовірністю 95%. Яка ймовірність, що з десяти питань неправильна відповідь буде зафіксована:
1) два рази;
2) хоча б два рази.
Знайти найімовірніше число зафіксованих неправильних відповідей і його ймовірність.

5. Ймовірність успіху в кожному із 784 незалежних випробувань стала і рівна 0,9. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи успіху відхилиться від його ймовірності не більше, чим на 0,08.

Варіант 34

1. Область G обмежена колом $x^2 + y^2 = 25$, а область g – цим колом і параболою $16x - 3y^2 = 0$. В область G кинута точка. Яка ймовірність того, що вона попаде в область g?

2. Ймовірність своєчасної сплати податків для першого підприємства дорівнює 0,9, для другого – 0,7, а для третього – корінь рівняння $5p^2 - 8p + 3 = 0$. Знайти ймовірність вчасної сплати податків не більше ніж одним підприємством.

3. З урни, яка містить m білих ($m \geq 3$) і n чорних куль загублено одну кулю. З урни взяли дві кулі, які виявилися білими. Обчислити ймовірність того, що загублена куля біла.

4. Встановлено, що 5% імпортних телевізорів виходять з ладу через перепади напруги в електромережі. Яка ймовірність того, що з десяти придбаних телевізорів: 1) три не вийде з ладу; 3) хоча б три. Знайти ймовірність найімовірнішого числа телевізорів, що не вийдуть з ладу.

5. Виробництво видає 1% браку. Яка ймовірність, що з 1000 відібраних виробів, бракованими виявляться: 1) не більше 3; 2) не менше двох.

Варіант 35

1. Точка кинута в область, обмежену еліпсом $x^2 + 4y^2 = 8$. Яка ймовірність того, що вона попаде в область, обмежену цим еліпсом і параболою $x^2 - 4y = 0$?

2. Ймовірність покращення спортсменами особистого досягнення по стрибках у висоту дорівнює 0,1. Яка ймовірність, що він покращить свій результат, якщо йому надана можливість зробити три спроби?

3. В п'яти ящиках лежать однакові по розміру і вазі кулі. В двох ящиках – по 6 голубих і 4 червоні кулі. В двох інших ящиках – по 8 голубих і 2 червоні кулі. В одному – 2 голубі і 8 червоних кулі. Навмання вибирається ящик і з нього виймається куля. Знайти ймовірність, що витягнена куля виявилась голубою.

4. Для студентського гуртожитку закуплено 6 телевізорів. Ймовірність того, що будь-який із них витримає гарантійний термін дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що протягом гарантійного терміну з ладу вийдуть: 1) 2 телевізори; 2) хоча б два. Знайти найімовірніше число телевізорів, що витримають гарантійний термін.

5. Ймовірність появи випадкової події при одному випробуванні стала і рівна 0,9. Знайти, яке відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності можна чекати з ймовірністю 0,99 при 625 випробуваннях.

Варіант 36

1. На відрізку [0;2] навмання вибрані числа x і y. Знайти ймовірність того, що ці числа задовольняють нерівностям $x^2 \leq 4y \leq 4x$.

2. До контролера поступила партія однотипних виробів в кількості 20 шт. Серед них 5 бракованих. Контролер навмання бере три вироби для перевірки. Якщо хоча б один із них виявиться бракованим, тоді вся партія бракується. Знайти ймовірність, що партія забракується.

3. Однотипні прилади випускаються трьома заводами в кількісному співвідношенні 1:2:3, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно рівні 3%, 2% і 1%. Прилад, придбаний науково-дослідним інститутом виявився бракований. Яка ймовірність, що цей прилад виготовлений першим заводом?

4. Деяка компанія володіє мережею дилерів на біржі. Ймовірність того, що дилер буде грати вдало, становить 0,8. Знайти ймовірність, що з шести дилерів у збитках виявляться: 1) два дилери; 2) хоча б два. Обчислити ймовірність найімовірнішого числа дилерів, що опиняться у збитках.

5. В ящику міститься 5 білих та 3 чорних кульки. Кульки беруть по одній з поверненням. Витягли 400 кульок. Обчислити ймовірності подій: 1) стандартна деталь з'явиться 156 разів; 2) від 156 до 300 разів.

Варіант 37

1. В прямокутнику з вершинами A(-1;0), B(-1;5), C(2;5), D(2;0) кинута точка. Яка ймовірність того, що її координати (x;y) будуть задовольняти нерівностям $x^2+1 \le y \le x+3$?

2. У папці 10 акцій 1-го виду і 8 – 2-го. Навмання беруть дві акції. Знайти ймовірність того, що вони будуть одного виду.

3. З першого верстата-автомата на складання надходить 35%, з другого – 25%, з третього – 25%, з четвертого – 15% деталей. Серед деталей виготовлених першим верстатом-автоматом, брак становить 3%, другим – 2%, третім – 4%, четвертим – 1%. Подана на складання деталь виявилась якісною. Яка ймовірність того, що її виготовив перший або четвертий верстат-автомат?

4. Робітник обслуговує п'ять верстатів-автоматів. Ймовірність того, що верстат-автомат вимагатиме уваги робітника на протязі зміни стала для кожного верстату і дорівнює 0,2. Обчислити ймовірносты подій: 1) на протязі зміни два верстати-автомати вимагатимуть уваги робітника; 2) не менше двох. Обчислити ймовірність найімовірнішого числа верстатів-автоматів, що потребують уваги робітника.

5. Скільки разів необхідно кинути гральний кубик, щоб з ймовірністю 0,999 можна було чекати, що відхилення відносної частоти появи цифри 5 від ймовірності виявиться по модулю менше 0,01.

Варіант 38

1. На колі одиничного радіуса з центром в початку координат навмання вибирають точку. Яка ймовірність того, що: а) проекція точки на вісь Ox знаходиться від центра на відстані, яка не перевищує r $(r<1)$; б) відстань від вибраної точки до точки з координатами $(1;0)$ не перевищує r?

2. В урні є 4 червоних, 6 синіх і 5 зелених куль. Тричі підряд навмання витягується по одній кулі, не повертаючи в урну. Знайти ймовірність, що всі вони виявляться: а) різних кольорів; б) одного кольору.

3. Троє робітників виготовляють однотипні деталі. При цьому відомо, що за зміну перший робітник виготовив в 9 разів більше ніж другий, а третій в 5 разів більше ніж перший. Відомо, що ймовірність зробити брак для першого, другого та третього робітників відповідно дорівнює 0,002; 0,005; 0,001. Всі деталі складаються до однієї ємності. Навмання взята деталь виявилась якісною. Яка ймовірність того, що цю деталь виготовив перший чи другий робітник?

4. Послідовно надіслано чотири радіосигнали. Ймовірність того, що радіосигнали приймуть, стала і рівна 0,4. Обчислити ймовірність події: 1) число прийнятих радіосигналів виявиться рівним трьом; 2) не більше трьох. Обчислити ймовірність найімовірнішого числа прийнятих сигналів.

5. Монету підкидають 225 разів. Обчислити ймовірність події: 1) герб випаде 110 разів; 2) герб випаде від 110 до 200 разів.

Варіант 39

1. У сфері радіусом R навмання незалежно одна від одної розкидано N точок. Обчислити ймовірність того, що відстань від центра до найближчої точки буде не менша, ніж r $(r < R)$.

2. В аудиторії серед 15 комп'ютерів 12 справних. Знайти ймовірність, що з двох навмання вибраних комп'ютерів хоча б один виявиться несправним.

3. На трьох фабриках виготовляються фільмокопії. Продуктивність першої фабрики в 5 разів більша, ніж другої , а потужність третьої фабрики в 6 разів менша, ніж першої. Ймовірності того, що стандартна фільмокопія, виготовлена на 1-й, 2-й та 3-й фабриках відповідно рівні 0,9; 0,95; 0,85. Отримана фільмокопія виявилась стандартною. Яка ймовірність, що її виготовила друга фабрика?

4. Баскетболіст шість разів кидає м'яч у корзину. Ймовірність влучень м'ячем кожний раз стала і рівна 0,9. Обчислити ймовірності подій: 1) кількість влучень виявиться рівною трьом; 2) не більше трьох. Обчислити ймовірність найімовірнішого числа влучень в корзину.

5. Ймовірність появи випадкової події в кожному з незалежних випробувань стала і рівна 0,6. Скільки необхідно зробити випробувань, щоб із ймовірністю 0,99 можна було чекати, що відхилення відносної частоти появи події від ймовірності p = 0,6 виявиться за модулем не більше 0,001.

Варіант 40

1. Площина розбита сіткою прямих: 1) на квадрати із стороною 1; 2) на правильні трикутники зі стороною 1. Яка ймовірність, що монета діаметром1, яку кинули навмання на площину, закриє одну з вершин сітки?

2. Відомо, що $P(A \cap \overline{B}) = 0.51$, $P(\overline{A} \cap B) = 0.35$, $P(A \cup B) = 0.89$. Чи сумісні події A та B? Знайти $P(A) + P(B)$.

3. Маємо чотири урни. В першій урні міститься 7 чорних і 3 білих кульки, в другій урні – 2 чорних і 8 білих кульок, в третій – 5 білих та 5 чорних. Четверта урна порожня. З першої другої і третьої урн навмання беруть по одній кульці і перекладають в четверту урну. Яка ймовірність після цього з четвертої урни витягнути чорну кульку?

4. Ймовірність виграшу по лотерейному білету постійна і рівна 0,01. Обчислити ймовірності подій: 1) з чотирьох білетів виграш випаде на 2; 2) не більше двох. Обчислити ймовірність найімовірнішого числа виграшних білетів.

5. В ящику міститься 7 стандартних та 3 бракованих деталі. Деталі з ящика беруть по одній з поверненням. Обчислити ймовірності подій: 1) стандартна деталь з'явиться 75 разів із 100; 2) стандартна деталь з'явиться від 65 до 80 разів із 100.

Варіант 41

1. A і B і ще 14 осіб стоять у черзі. Визначити ймовірність, що A і B відділені один від одного трьома способами?

2. Ймовірності вчасної сплати податків для кожного із трьох підприємств відповідно рівні 0,4; 0,8; 0,6. Знайти ймовірність вчасної сплати податків не більше, ніж двома підприємствами.

3. Маємо три однакові ящики. В першому ящику знаходяться 6 стандартних та 4 бракованих деталі, в другому – 8 стандартних і 2 браковані, в третьому – 5 стандартних і 5 бракованих. Яка ймовірність того, що з навмання вибраного ящика навмання вибрані три деталі виявляться стандартними?

4. Оптова база обслуговує 8 магазинів. Ймовірність того, що від магазину надійде замовлення на наступний день, постійна і рівна 0,6. Обчислити ймовірності подій: 1) на базу надійде три замовлення; 2) не більше трьох.

Обчислити ймовірність найімовірнішого числа магазинів, що надіслали замовлення на базу.

5. Ймовірність, що стрілець влучить в мішень, зробивши один постріл стала і дорівнює 0,9. По мішені вистрілили 144 рази. Обчислити ймовірності подій: 1) буде 100 влучень в мішень; 2) не менше 100 влучень.

Варіант 42

1. В конверті є 30 акцій, серед яких 3 шукані. Навмання беруть 3 акції. Знайти ймовірність, що серед них виявиться хоча б дві шукані.

2. Групі студентів для проходження практики виділено 30 місць: 15 – у Хмельницьку, 8 – у Львові, 7 – у Луцьку. Ці місця розподіляється між студентами випадковим чином. Знайти ймовірність, що двоє друзів будуть направлені для проходження практики в одне місто?

3. Перша партія містить 20% радіоламп, друга – 50%, третя – 10% четверта – решту. Ймовірності того, що лампа працюватиме протягом заданого часу, дорівнюють для цих партій відповідно 0,9; 0,95; 0,85 і 0,85. Визначити ймовірність, що взята навмання радіолампа не вийде із ладу протягом заданого часу. Лампа справно працювала заданий час, яка ймовірність належності до четвертої партії?

4. Ймовірність відмови кожного приладу при випробуваннях стала і рівна 0,1. Випробування провели над чотирма приладами. Обчислити ймовір-ності подій: 1) кількість приладів, що відмовили, виявиться рівною двом; 2) не менше двох. Обчислити ймовірність найімовірнішої кількості приладів, що відмови-ли.

5. Ймовірність появи випадкової події в кожному з незалежних випробувань стала і рівна 0,8. Знайти, яке відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності можна чекати з ймовірністю 0,999 при 10000 випробуваннях. Обчислити відповідні межі для числа появ події в цих 10000 випробуваннях.

Варіант 43

1. Знайти ймовірність, що власник однієї картки спортлото “5 з 36” закреслить: а) чотири виграшні числа; б) жодного.

2. Для вчасного збирання врожаю пшениці достатньо, щоб у полі працювало два комбайни. Знайти ймовірність, що пшениця буде вчасно зібрана, якщо господарство має три комбайни, ймовірності справної роботи яких відповідно рівні 0,4; 0,9; 0,8.

3. Із урни, яка містить 4 білих і 3 чорні кулі, перекладають навмання дві кулі в урну, яка містить 7 білих куль. Яка ймовірність тепер витягнути білу кулю з другої урни?

4. В ящику міститься 2 стандартні та 3 браковані деталі. Деталі з ящика виймають по одній з поверненням. Витягли вісім деталей. Обчислити ймовірності

подій: 1) стандартна деталь з’явиться 4 рази; 2) стандартна деталь з’явиться від 4 до 6 разів. Знайти ймовірність найімовірнішого числа появи кількості стандартних деталей.

5. Гральний кубик підкидають 625 раз. Обчислити ймовірності подій: 1) цифра 5 з’явиться 120 разів; 2) цифра 5 з’явиться від 120 до 200 разів.

Варіант 44

1. Ольга і Сергій домовилися зустрічати Новий рік в компанії чисельністю 8 чоловік. Вони обоє хотіли сидіти за святковим столом поруч. Яка ймовірність виконати їх бажання, якщо серед друзів є звичай розподіляти місця жеребкуванням?

2. Гральний кубик кидається доти, поки двічі підряд на верхній грані не випаде 5 очок. Знайти ймовірність, що дослід закінчиться до шостого кидання.

3. Маємо два ящики. В першому ящику міститься 8 стандартних і 4 браковані деталі, а в другому – 10 стандартних деталей. З першого ящика беруть навмання 4 деталі і перекладають в другий. Яка ймовірність після перекладання витягнути з другого ящика 2 стандартні деталі?

4. В урні міститься 6 чорних і 4 білих кулі. Кулі виймають по одній з поверненням. Витягли шість куль. Обчислити ймовірність подій: 1) чорна куля з’явиться 5 разів; 2) від 4 до 6 разів. Обчислити ймовірності найімовірнішого числа появ чорної кульки.

5. Ймовірність появи випадкової події при одному випробуванні стала і дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в 400 випробуваннях: 1) подія відбудеться 250 разів; 2) відносна частота появи події відхилиться від ймовірності $p = 0{,}6$ не більше, ніж на 0,004.

Варіант 45

1. На залік пропонується 80 питань, з яких студент знає 60. Якщо студент з п’яти запропонованих питань знатиме хоча б три, то отримає залік. Знайти ймовірність успішної здачі заліку.

2. Три спортсмени одночасно вистрілили з далекої відстані по повітряній кулі. Ймовірності влучання для кожного з них відповідно рівні 0,6; 0,7; і 0,5. Знайти ймовірність знищення кулі.

3. Маємо шість однакових ящиків. В чотирьох по 12 стандартних та 4 бракованих деталей, а в останніх двох – по 6 стандартних та 10 бракованих. Яка

ймовірність того, що з навмання взятого ящика навмання взяті 3 деталі виявляться стандартними?

4. Пристрій складається з шести незалежно працюючих елементів. Ймовірність того, що елемент працює в даний момент часу, стала для кожного елемента і дорівнює 0,7. Обчислити ймовірності події: 1) кількість працюючих елементів пристрою в даний момент виявиться рівною трьом; 2) кількість працюючих елементів пристрою не більше двох. Знайти найімовірніше число працюючих елементів пристрою та обчислити його ймовірность.

5. Ймовірність появи випадкової події в кожному з незалежних випробувань стала і рівна 0,7. Провели 900 випробувань. Обчислити ймовірності подій: 1) подія відбудеться в 620 випробуваннях; 2) подія відбудеться не менше 620 разів.

Варіант 46

1. Замок містить на спільній осі 4 диски, кожний з яких розподілений на 6 секторів, відмічених цифрами. Замок відкривається лише тоді, коли цифри на дисках утворюють певне число (код). Яка ймовірність відкрити замок, набравши довільний набір цифр?

2. Протипожежний пристрій складається з трьох незалежно працюючих сигналізаторів, які спрацьовують у випадку пожежі з ймовірностями 0,95;0,9;0,98. Знайти ймовірність того, що при пожежі спрацюють: а) тільки один сигналізатор; б) принаймні один; в) тільки два; г) хоча б два.

3. Маємо два ящики. В першому ящику міститься 6 стандартних та 4 бракованих деталі, другий ящик порожній. Із першого ящика навмання беруть три деталі і кладуть в другий. Яка ймовірність тепер взяти з другого ящика одну стандартну деталь?

4. Ймовірність влучити в мішень стрільцем при одному пострілі стала і дорівнює 0,9. По мішені було зроблено 5 пострілів. Обчислити ймовірності подій: 1) буде 3 влучення в мішень; 2) не більше трьох влучень. Знайти найімовірніше число влучень у мішень і обчислити його ймовірність.

5. Пристрій складається із 100 незалежно працюючих елементів. Ймовірність того, що елемент справний, стала для кожного елемента і дорівнює 0,9. Обчислити ймовірності подій: 1) число справних елементів дорівнює 90; 2) від 85 до 100 елементів.

Додатки

Значення функції Гаусса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{x^2}{2}}$

Таблиця 1

x	Соті долі x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17300
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04214	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01192	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014

x	Десяті долі x				
	0	2	4	6	8
4,	0,0001338	0000589	0000249	0000101	0000040
5,	0000015				

Значення функції $P(m;\lambda) = \dfrac{\lambda^m \cdot \ell^{-\lambda}}{m!}$

Таблиця 2

m	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,90484	81873	74082	67032	60653	54881	49659	44933	40657	36788
1	09048	16375	22225	26813	30327	32929	34761	35946	36591	36788
2	00452	01637	03334	05363	07582	09879	12166	14379	16466	19394
3	00015	00109	00333	00715	01264	01976	02839	03834	04940	06131
4		00005	00025	00072	00158	00296	00497	00767	01111	01533
5			00002	00006	00016	00036	00070	00123	00200	00307
6					00001	00004	00008	00016	00030	00051
7							00001	00002	00004	00007
8										00001
m	λ									
	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	0,22313	13534	08208	04979	03020	01832	01111	00674	00409	00248
1	33470	27067	20521	14936	10569	07326	04999	03369	02248	01487
2	25102	27067	25652	22404	18496	14653	11248	08422	06181	04462
3	12551	18045	21376	22404	21579	19537	16872	14037	11332	00924
4	04707	09022	13360	16803	18881	19537	18981	17547	15582	13385
5	01412	03609	06680	10082	13217	15629	17083	17547	17140	16062
6	00353	01203	02783	05041	07710	10420	12812	14622	15712	16062
7	00076	00344	00994	02160	03855	05954	08236	10444	12345	13768
8	00014	00086	00311	00810	01687	02977	04633	06528	08487	10326
9	00002	00019	00086	00270	00656	01323	02316	03627	05187	06884
10		00004	00022	00081	00230	00529	01042	01813	02853	04130
11		00001	00005	00022	00073	00192	00426	00824	01426	02253
12			00001	00006	00021	00064	00160	00343	00654	01126
13				00001	00006	00020	00055	00132	00277	00520
14					00001	00005	00018	00047	00109	00223
15						00002	00005	00016	00040	00089
16							00002	00005	00014	00033
17								00001	00004	00012
18									00001	00004
19										00001

Значення функції Лапласса $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \ell^{\frac{t^2}{2}} dt$

Таблиця 3

x	Соті долі x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524

Продовження таблиці 3

x	Соті долі x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37285	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	44352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49835	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997

x	Десяті долі x				
	0	2	4	6	8
4,	0,4999683	49999867	4999946	4999979	4999992
5,	4999997				

ЛІТЕРАТУРА

1. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Высшая школа, 1986. – 320 с.
2. Гнеденс Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987. – 400 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1967. – 400 с.
4. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. – Л.: Издательство Ленингр. ун-та, 1967. – 332 с.
5. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. – К.: КНЕУ, 2001. – 336 с.
6. Сеньо П.К. Теорія ймовірностей і математична статистика. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 448 с.
7. Теорія ймовірностей. Збірник задач. Під редакцією А. В. Скорохода. – К.: Вища школа, 1976. – 383 с.
8. Турчин В. М. Теорія ймовірностей. – К.: Видавництво А.С.К., 2004. - 208 с.
9. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей. – К.: Вища школа, 1994. – 192 с.