УДК 517.51

А. Ф. Конограй (Ін–т математики НАН України, Київ)
О. В. Федуник–Яремчук (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)

Оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності

We obtain exact order estimates of approximation of classes $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ of periodic functions of several variables in the space L_q by using operators of orthogonal projection as well as linear operators subjected to some conditions.

Одержано точні за порядком оцінки наближення класів $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q за допомогою операторів ортогонального проектування, а також лінійних операторів, які підпорядковані деяким умовам.

Нехай $L_p(\pi_d)$, $1 \leq p < \infty$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p на кубі $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d}[0;2\pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$, в якому норма визначається наступним чином

$$||f||_{L_p(\pi_d)} = ||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$L_\infty(\pi_d)$ — простір 2π-періодичних по кожній змінній суттєво обмежених функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ з нормою

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = ||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\pi_d} |f(x)|.$$

Всюди далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx_j = 0 \ , \quad j = \overline{1,d}.$$

Для $f \in L_p(\pi_d), 1 \leq p \leq \infty$, і $t = (t_1, ..., t_d)$, $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$, розглянемо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j=\overline{1,d}}} ||\Delta_h^l f(\cdot)||_p ,$$

де $l \in \mathbb{N}$, $\Delta_h^l f(x) = \Delta_{h_1}^l \dots \Delta_{h_d}^l f(x) = \Delta_{h_d}^l (\dots (\Delta_{h_1}^l f(x)))$ — мішана різниця порядку l з векторним кроком $h = (h_1, ..., h_d)$, а різниця l–го порядку з кроком h_j за змінною x_j визначається наступним чином

$$\Delta_{h_j}^l f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ не спадає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \leq \left(\prod_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \neq j$.

Нехай $1 \le p \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$, а Ω — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l. Тоді класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна означити наступним чином [2]

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d):\ ||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\},$$

де

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} := \left\{ \int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} := \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)},$$

(запис $t > 0$ для $t = (t_1, ..., t_d)$ рівносильний $t_j > 0,\ j = \overline{1,d}$).

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з класами H^{Ω}_p, які були розглянуті М.М. Пустовойтовим в [3].

Зауважимо також, що при $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j},\ 0 < r_j < l$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є аналогами відомих класів Бєсова $B^r_{p,\theta},\ 1 \le \theta < \infty$, та Нікольського $B^r_{p,\infty} = H^r_p$ (див., наприклад, [4]).

Для подальших міркувань будемо використовувати еквівалентні (з точністю до абсолютних сталих) означення норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Нехай $V_n(t),\ n \in \mathbb{N}$ позначає ядро Валле Пуссена порядку $2n - 1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

Кожному вектору $s = (s_1, \ldots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right)$$

і для $f \in L_p(\pi_d), 1 \le p \le \infty$, через $A_s(f,x)$ позначимо згортку

$$A_s(f,x) = f * A_s.$$

Нехай $1 \le p \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$ і Ω — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l), тоді з точністю до абсолютних сталих класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна означити наступним чином

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1 \right\}, \quad (1)$$

де $1 \le \theta < \infty$ та

$$B^{\Omega}_{p,\infty} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \le 1 \right\}, \qquad (2)$$

тут і надалі $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Зазначимо, що співвідношення (1) і (2) були отримані в роботах [5] і [3] відповідно.

Тут і далі для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\forall N \in \mathbb{N}$ виконується $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо також, що всі сталі $C_i, i = 1, 2, \dots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

У роботі будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією Ω деякого спеціального вигляду:

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_d) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=1}^{d} \frac{t_j^r}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0,\ j = \overline{1,d}; \\ 0, & \text{якщо } \displaystyle\prod_{j=1}^{d} t_j = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Тут і надалі розглядаються логарифми за основою 2, крім того

$$\left(\log\frac{1}{t_j}\right)_+ = \max\left\{1, \log\frac{1}{t_j}\right\}.$$

Також будемо вважати, що $b_j < r,\ j=\overline{1,d}$, і $0<r<l$, а значить для функції Ω вигляду (3) виконуються умови 1 – 4, (S) та (S_l).

Нами встановлюються точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ у просторі $L_q(\pi_d)$ при $1\le q<\infty$. Поняття ортопроекційного поперечника ввів В. М. Темляков [6]. Перш ніж навести означення величини, що нами досліджується, введемо деякі позначення.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ — ортонормована система функцій $u_i\in L_\infty(\pi_d)$. Кожній функції $f\in L_q(\pi_d)$, $1\le q\le\infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду $\sum\limits_{i=1}^{M}(f,u_i)u_i$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$. Тоді для функціонального класу $F\subset L_q(\pi_d)$ величина

$$d^{\perp}_M(F,L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M}\sup_{f\in F}\left\|f(\cdot)-\sum_{i=1}^{M}(f,u_i)u_i(\cdot)\right\|_q \tag{4}$$

називається ортопроекційним поперечником (Фур'є–поперечником) цього класу в просторі $L_q(\pi_d)$.

У роботі, крім ортопроекційних поперечників, будемо досліджувати величини $d^B_M(F,L_q)$, розглянуті В. М. Темляковим (див., наприклад, [7]), які визначаються наступним чином:

$$d^B_M(F,L_q) = \inf_{G\in L_M(B)_q}\ \sup_{f\in F\cap D(G)}\|f(\cdot)-Gf(\cdot)\|_q\,. \tag{5}$$

Через $L_M(B)_q$ тут позначено множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься в підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує таке число $B\ge1$, що для всіх векторів $k=(k_1,\dots,k_d)$, $k_j\in\mathbb{Z},\ j=\overline{1,d}$, виконується нерівність $\left\|Ge^{i(k,\cdot)}\right\|_2\le B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M, а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який визначається послідовністю $\{\lambda_m\}$ такою, що $|\lambda_m| \le 1$ для всіх m.

Із (4) і (5) легко бачити, що величини $d_M^{\perp}(F, L_q)$ і $d_M^B(F, L_q)$ пов'язані між собою нерівністю

$$d_M^B(F, L_q) \le d_M^{\perp}(F, L_q).$$

На сьогодні відомо багато робіт, в яких досліджувалися величини $d_M^{\perp}(F, L_q)$ і $d_M^B(F, L_q)$ для тих чи інших класів функцій. Тут згадаємо роботи [7–11], в яких вивчались величини (4) і (5) для класів функцій багатьох змінних $W^r_{p,\alpha}$, H^r_p, $B^r_{p,\theta}$ та H^{Ω}_p, і в яких можна ознайомитись з більш детальною бібліографією.

Зауважимо, що одержані нижче оцінки доповнюють результати, які отримані в роботах [12–14].

Наведемо необхідні позначення та означення, які будемо використовувати у подальших міркуваннях.

Кожному вектору $s = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \left\{k = (k_1, ..., k_d) : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = \overline{1,d}\right\}.$$

Для натурального N покладемо

$$\chi(N) = \left\{ s = (s_1, ..., s_d) : \ s_j \in \mathbb{N}, \ j = \overline{1,d}, \ \Omega(2^{-s}) \ge \frac{1}{N} \right\},$$

$$Q(N) = \bigcup_{s \in \chi(N)} \rho(s).$$

Враховуючи (3), множину $\chi(N)$ можна означити так:

$$\chi(N) = \left\{ s = (s_1, ..., s_d) : \ s_j \in \mathbb{N}, \ j = \overline{1,d}, \ \prod_{j=1}^{d} 2^{r s_j} s_j^{b_j} \le N \right\}.$$

Далі, нехай

$$\chi^{\perp}(N) = \mathbb{N}^d \setminus \chi(N),$$

$$\Theta(N) = \left\{ s = (s_1, ..., s_d): \ s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d}, \ \frac{1}{2^l N} \leq \Omega(2^{-s}) < \frac{1}{N} \right\}.$$

У прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Лема A [11]. *Кількість елементів множини* $Q(N)$ *рівна за порядком:*

$$|Q(N)| \asymp N^{\frac{1}{r}} \big(\log N \big)^{-\frac{b_1}{r} - \ldots - \frac{b_d}{r} + d - 1}.$$

Перш ніж перейти до викладу отриманих результатів покладемо $M = |Q(N)|$. Тоді, згідно з лемою A, отримаємо

$$\begin{gathered} M \asymp N^{\frac{1}{r}} \big(\log N \big)^{-\frac{b_1}{r} - \ldots - \frac{b_d}{r} + d - 1}, \\ \log M \asymp \log N, \quad N \asymp M^r \big(\log M \big)^{b_1 + \ldots + b_d - (d-1)r}. \end{gathered} \tag{6}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема. *Нехай* $1 \leq q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, *а* $\Omega(t)$ *задана формулою (3). Тоді при* $0 < r < l$ *мають місце співвідношення*

$$d^{\perp}_M (B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_q) \asymp d^B_M (B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_q) \asymp$$

$$\asymp M^{-r} \big(\log M \big)^{-b_1 - \ldots - b_d + (d-1) \left(r + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right)_+ \right)}, \tag{7}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Доведення. Відмітимо, оскільки $d^B_M (B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_q) \leq d^{\perp}_M (B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_q)$, то оцінку зверху в (7) достатньо встановити для поперечника $d^{\perp}_M (B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_q)$, а знизу — для величини $d^B_M (B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_q)$.

Оцінка зверху для поперечника $d^{\perp}_M (B^{\Omega}_{\infty,\theta}, L_q)$ у випадку $1 < q < \infty$, випливає із оцінки наближення функцій з класів $B^{\Omega}_{\infty,\theta}$ тригонометричними поліномами $t_{Q(N)}(x) = \sum\limits_{s \in \chi(N)} \delta_s(f, x)$, де $\delta_s(f, x) = \sum\limits_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}$, а $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f, $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

Тоді, скориставшись встановленим в [15] результатом

$$\sup_{f \in B^{\Omega}_{\infty,\theta}} \| f(\cdot) - t_{Q(N)}(\cdot) \|_q \asymp N^{-1} \big(\log N \big)^{(d-1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right)_+},$$

та співвідношеннями (6), одержуємо шукану оцінку зверху в (7) у випадку $1 < q < \infty$. Для $q = 1$ проведемо аналогічні до наведених вище міркування, додатково використавши нерівність $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_q$, $1 < q < \infty$.

Перейдемо до встановлення відповідної оцінки знизу. Зазначимо, що отримана оцінка зверху не залежить від параметра q, тому для доведення оцінки знизу величини $d_M^B(B^\Omega_{\infty,\theta}, L_q)$ достатньо розглянути випадок $q = 1$. Доведення розіб'ємо на дві частини.

Нехай спочатку $1 \le \theta < 2$. Використаємо міркування аналогічні до тих, які використовувались у прикладі 1 роботи [8]. Нехай число M задане, $G \in L_M(B)_1$. Тоді існує вектор $k^0 = (k_1^0, ..., k_d^0) \in \widetilde{Q}(N)$, де $\widetilde{Q}(N) = \bigcup\limits_{s\in\Theta(N)} \rho(s)$ такий, що

$$\big\|e^{i(k^0,\cdot)} - Ge^{i(k^0,\cdot)}\big\|_1 \gg 1. \tag{8}$$

Розглянемо функцію

$$g_1(x) = C_3 N^{-1} e^{i(k^0,x)}, \quad C_3 > 0,$$

яка при відповідному виборі сталої C_3 належить до класу $B^\Omega_{\infty,\theta}, 1 \le \theta < 2$.

Далі, скориставшись співвідношенням (8), отримаємо

$$\big\|g_1(\cdot) - Gg_1(\cdot)\big\|_1 \gg N^{-1}\big\|e^{i(k^0,\cdot)} - Ge^{i(k^0,\cdot)}\big\|_1 \gg$$
$$\gg N^{-1} \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)r}.$$

Нехай тепер $2 \le \theta < \infty$. В цьому випадку для встановлення оцінки знизу величини $d_M^B(B^\Omega_{\infty,\theta}, L_1)$ розглянемо функцію, яка аналогічна функції з прикладу 6 роботи [8].

За допомогою аналогічних міркувань, що і в [16], можна показати, що існує множина $\Theta_1(N) \subset \Theta(N)$ така, що для $s = (s_1, ..., s_d) \in \Theta_1(N)$ будуть виконуватись співвідношення

$$s_j \asymp \log N, \quad j = \overline{1,d} \ \text{ і } \ |\Theta_1(N)| \asymp \big(\log N\big)^{d-1}.$$

Далі, для $G \in L_M(B)_1$ знайдуться N, $\Theta_2(N) \subset \Theta_1(N)$ такі, що

$$|\Theta_2(N)| \ge \frac{1}{2}|\Theta_1(N)|,$$

і в кожному $\rho(s)$, $s \in \Theta_2(N)$, знайдуться такі вектори k^s, що для функції

$$g_2(x) = \sum_{s\in\Theta_2(N)} e^{i(k^s,x)}$$

знайдеться $y^* = (y_1^*, ..., y_d^*)$ такий, що

$$\|g_2(x+y^*) - Gg_2(x+y^*)\|_1 \gg \big(\log M\big)^{\frac{d-1}{2}}. \qquad (9)$$

Доведення співвідношення (9) проводиться за допомогою тих же міркувань, які використовувались при доведенні відповідної оцінки в прикладі 6 роботи [8].

Отже, розглянемо функцію

$$g_3(x) = C_4 N^{-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}} g_2(x),\ C_4 > 0.$$

Покажемо, що функція g_3 при відповідному виборі сталої C_4 належить до класу $B^{\Omega}_{\infty,\theta}, 2 \le \theta < \infty$.

Дійсно,

$$\|g_3\|_{B^{\Omega}_{\infty,\theta}} = \left(\sum_s \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|A_s(g_3,\cdot)\|_\infty^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll N^{-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{s\in\Theta_2(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|A_s(g_2,\cdot)\|_\infty^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll N^{-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}\left(\sum_{s\in\Theta_2(N)} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll N^{-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}} \cdot N \cdot |\Theta_2(N)|^{\frac{1}{\theta}} \asymp \big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}\big(\log N\big)^{\frac{d-1}{\theta}} = 1.$$

Таким чином, скориставшись співвідношенням (9), будемо мати

$$\|g_3(x+y^*) - Gg_3(x+y^*)\|_q \ge \|g_3(x+y^*) - Gg_3(x+y^*)\|_1 \gg$$

$$\gg N^{-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}\|g_2(x+y^*) - Gg_2(x+y^*)\|_1 \gg$$

$$\gg N^{-1}\big(\log N\big)^{-\frac{d-1}{\theta}}\big(\log M\big)^{\frac{d-1}{2}} \asymp$$

$$\asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Оцінку знизу встановлено. Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** У випадку $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^r$ результат теореми (для класів $B^r_{\infty,\theta}, 1 \le \theta < \infty$) встановлений А. С. Романюком [10].

***Зауваження* 2.** Точні за порядком оцінки величин $d_M^{\perp}(H^{\Omega}_{\infty}, L_q)$ та $d_M^{B}(H^{\Omega}_{\infty}, L_q)$ при $1 \le q < \infty$ отримані М. М. Пустовойтовим [11].

1. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483–522.

2. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1997. — **219**. — С. 356–377.

3. *Пустовойтов Н.Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — **20**. — С. 35–48.

4. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1989. — **187**. — С. 143–161.

5. *Стасюк С.А., Федуник О.В.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 5. — С. 692–704.

6. *Темляков В.Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. — 1982. — **267**, № 2. — С. 314–317.

7. *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**. — С. 1–112.

8. *Темляков В.Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **189**. — С. 138–168.

9. *Романюк А.С.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сб. — 2008. — **199**, № 2. — С. 93–114.

10. *Романюк А.С.* Поперечники и наилучшие приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. — 2011. — **37**. — С. 181–213.

11. *Пустовойтов Н.Н.* Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители // Anal. Math. — 2008. — **34**. — С. 187–224.

12. *Конограй А.Ф.* Оценки аппроксимативных характеристик классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. — 2014. — **95**, № 5. — С. 734–749.

13. *Конограй А.Ф., Федуник-Яремчук О.В.* Оцінки апроксимативних характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності // Теорія наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 1. — С. 148–160.

14. *Конограй А.Ф., Федуник-Яремчук О.В.* Оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності // Теорія наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 1. — С. 131–150.

15. *Стасюк С.А.* Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Мат. заметки. — 2010. — **87**, № 1. — С. 108–121.

16. *Пустовойтов Н.Н.* О приближении и характеризации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида // Anal. Math. — 2003. — **29**. — С. 201–218.